Capitolo 2

Spazi Normati. Spazi di Banach

Si ottengono degli spazi metrici particolarmente utili ed importanti se si considera uno spazio vettoriale e si definisce in esso una metrica a mezzo di una *norma.* Lo spazio risultante è chiamato *spazio normato.* Se uno spazio vettoriale normato è completo viene chiamato *spazio di Banach.* La teoria degli spazi normati, in particolare degli spazi di Banach, e la teoria degli operatori lineari definiti su di essi costituiscono la parte maggiormente sviluppata dell'analisi funzionale.

$\boxed{2.1}$ Spazio Vettoriale

2.1 Definizione (Spazio Vettoriale)
Uno spazio vettoriale (o *spazio lineare*) *su un campo* K è un insieme non vuoto X di elementi $x, y, \cdots$ (chiamati *vettori*) dotato di due operazioni algebriche. Queste operazioni sono chiamate *somma vettoriale* e *moltiplicazione di vettori per scalari*, cioè per elementi di K.

La **somma vettoriale** associa ad ogni coppia ordinata (x, y) di vettori un vettore $x + y$ chiamato la *somma* di *x e y,* in tal modo che siano soddisfatte le seguenti proprietà. La somma vettoriale è commutativa ed associativa, cioè per tutti i vettori si ha che

$$x + y = y + x$$
$$x + (y + z) = (x + y) + z;$$

inoltre esiste un vettore 0, chiamato *vettore nullo,* e per ogni vettore x un vettore $-x$ tali che per tutti i vettori si ha che

$$x + 0 = x$$
$$x + (-x) = 0.$$

Cioè X rispetto alla somma vettoriale è un gruppo additivo abeliano.

La **moltiplicazione per scalari** associa ad ogni vettore x e scalare α un vettore αx (scritto anche $x\alpha$) chiamato il *prodotto* di α e x, in tal modo che per tutti i vettori x, y e scalari α, β si ha che

$$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$$
$$1x = x$$

e le leggi distributive

$$\alpha(x+y) = \alpha x + \beta y$$
$$(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x. \qquad \blacksquare$$

Dalla definizione vediamo che la somma vettoriale è un'applicazione $X \times X \to X$, mentre la moltiplicazione per scalari è un'applicazione $K \times X \to X$.

K è chiamato il **campo scalare** (o *campo dei coefficienti*) dello spazio vettoriale X, e X è chiamato uno **spazio vettoriale reale** se $K = \mathbb{R}$ (il campo dei numeri reali) ed uno **spazio vettoriale complesso se** $K = \mathbb{C}$ (il campo dei numeri complessi).

L'uso dello 0 sia per lo scalare 0 che per il vettore nullo non dovrebbe, in generale, creare confusione. Se fosse desiderabile per ragioni di chiarezza, si può indicare il vettore nullo con $\mathbf{0}$.

Il lettore può provare che per tutti i vettori e gli scalari

$$0x = \mathbf{0}$$
$$\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

e

$$(-1)x = -x.$$

Un **sottospazio** di uno spazio vettoriale X è un sottoinsieme non vuoto Y di X tale che per ogni $y_{1,}$ $y_2 \in Y$ e tutti gli scalari α, β si ha che $\alpha y_1 + \beta y_2 \in Y$. Quindi Y stesso è uno spazio vettoriale, le due operazioni algebriche essendo quelle indotte da X.

Uno speciale sottospazio di X è il *sottospazio improprio* $Y = X$. Ogni altro sottospazio di X $(\neq \{0\})$ è chiamato *proprio.*

Un altro sottospazio speciale di un qualunque spazio vettoriale X è $Y = \{0\}$.

Una **combinazione lineare** dei vettori $x_1, \cdots, x_m$ di uno spazio vettoriale X è un'espressione della forma

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m$$

dove i coefficienti $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ sono scalari qualunque.

Per ogni sottoinsieme non vuoto $M \subset X$ l'insieme di tutte le combinazioni lineari di vettori di M è chiamato l'inviluppo o lo **span** di M e si scrive

$$\operatorname{span} M.$$

Ovviamente è un sottospazio Y di M e diciamo che Y è **generato** da M.

Introduciamo ora due concetti fra di loro collegati che verranno usati molto spesso nel seguito.

2.2 Definizione (Indipendenza Lineare, Dipendenza Lineare)
L'indipendenza e la dipendenza lineare di un dato insieme M di vettori $x_1, \cdots, x_r$ $(r \geq 1)$ in uno spazio vettoriale X sono definite a mezzo dell'equazione

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_r x_r = 0, \tag{2.1}$$

dove gli $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ sono scalari. Chiaramente l'equazione (2.1) vale per $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$. Se questa è la sola r–pla di scalari per cui la (2.1) è valida l'insieme M è detto *linearmente indipendente.* M è detto *linearmente dipendente* se M non è linearmente indipendente, cioè se (2.1) è anche valida per una r–pla di scalari non tutti zero.

Un sottoinsieme arbitrario M di X è detto *linearmente indipendente* se ogni sottoinsieme finito non vuoto di M è linearmente indipendente. M è detto *linearmente dipendente* se non è linearmente indipendente. ■

Una motivazione per questa terminologia proviene dal fatto che se $M = \{x_1, \cdots, x_r\}$ è linearmente dipendente almeno un vettore di M può essere scritto come combinazione lineare degli altri; per esempio se (2.1) vale con un $\alpha_r \neq 0$ allora M è linearmente dipendente e possiamo risolvere (2.1) rispetto a x_r e ottenere

$$x_r = \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_{r-1} x_{r-1} \qquad (\beta_j = -\alpha_j/\alpha_r).$$

Possiamo usare i concetti di dipendenza ed indipendenza lineare per definire la dimensione di uno spazio vettoriale.

2.3 Definizione (Base di Hamel)
Se X è uno spazio vettoriale qualunque e B è un sottoinsieme linearmente indipendente di X che genera X, allora B è chiamato una **base** (o **base di Hamel**) per X. ■

Uno spazio vettoriale X è detto *finito dimensionale* se ammette una base B di n vettori linearmente indipendenti. In questo caso è facile dimostrare che ogni altra base contiene n vettori indipendenti. n è perciò un numero caratteristico di X ed è chiamato la **dimensione** di X e si scrive $n = \dim X$. Per definizione $X = 0$ è finito dimensionale e $\dim X = 0$.

Se $\dim X = n$ una n–pla qualunque di vettori $\{e_1, \cdots, e_n\}$ di X linearmente indipendenti costituisce una **base** *per* X (o una *base in* X) ed ogni $x \in X$ ha una rappresentazione unica come combinazione lineare di questi vettori, ossia

$$x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n.$$

Se X non è finito dimensionale si dice *infinito dimensionale.*

Anche nel caso infinito dimensionale ogni $x \in X$ non nullo ha una rappresentazione unica come combinazione lineare di (in numero finito!) elementi di B con coefficienti scalari non tutti nulli.

Ogni spazio vettoriale $X \neq \{0\}$ ha una base di Hamel.

Per spazi vettoriali arbitrari infinito dimensionali la prova richiede l'uso del lemma di Zorn ed è rinviata a dopo che avremo introdotto questo lemma per altri propositi.

Menzioniamo il fatto che anche le basi di un dato spazio vettoriale X infinito dimensionale hanno lo stesso numero cardinale. Una prova richiederebbe alcuni strumenti piuttosto avanzati della teoria degli insiemi. Anche nel caso infinito dimensionale questo numero è chiamato la **dimensione** di X.

Più in là avremo bisogno del seguente semplice teorema.

2.4 Teorema (Dimensioni di un Sottospazio)

Sia X uno spazio vettoriale n–dimensionale. Allora ogni sottospazio proprio Y di X ha dimensioni minori di n. ■

Dimostrazione. Se $n = 0$ allora $X = \{0\}$ e non ha sottospazî propri. Sia ora $n > 0$. Chiaramente $\dim Y \leq \dim X = n$. Se $\dim Y$ fosse n allora Y avrebbe una base di n elementi, che sarebbe anche una base per X perché $\dim X = n$, così che $X = Y$. Ciò mostra che un qualunque insieme di vettori linearmente indipendenti in Y deve avere meno di n elementi e quindi $\dim Y < n$. ■

$\boxed{2.2}$ Spazio Normato. Spazio di Banach

In molti casi uno spazio vettoriale X può essere al medesimo tempo uno spazio metrico perché una metrica d è definita su X. Tuttavia se non v'è relazione fra la struttura algebrica e la metrica non possiamo aspettarci una teoria utile ed applicabile che combini entrambi i concetti. Per garantire una tale relazione fra gli aspetti "algebrici" e "geometrici" di X definiamo su X una metrica d in un modo speciale. Prima introduciamo un concetto ausiliario, quello di *norma,* che usa le operazioni algebriche dello spazio vettoriale. Poi utilizziamo la norma per ottenere un metrica d del tipo desiderato. Questa idea conduce al concetto di *spazio normato.*

2.5 DEFINIZIONE (SPAZIO NORMATO, SPAZIO DI BANACH)
Uno *spazio normato* X è uno spazio vettoriale dotato di una norma. Uno *spazio di Banach* è uno spazio normato completo (completo nella metrica definita dalla norma). La **norma** su un spazio vettoriale (reale o complesso) X è una funzione a valori reali su X il cui valore ad ogni $x \in X$ è indicato con

$$||x|| \qquad \text{(si legga “norma di } x\text{”)}$$

ed ha le proprietà

(N1) $\quad ||x|| \geq 0$

(N2) $\quad ||x|| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

(N3) $\quad ||\alpha x|| = |\alpha|||x||$

(N4) $\quad ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ $\qquad$ *(Disuguaglianza Triangolare);*

dove x e y sono vettori arbitrari in X e α è uno scalare qualunque.
Una norma su X definisce una metrica d su X che è data da

$$d(x, y) = ||x - y|| \qquad (x, y \in X)$$

ed è chiamata la *metrica indotta dalla norma.* Lo spazio normato appena definito si indica con $(X, || \cdot ||)$ o semplicemente con X. ∎

2.6 Lemma (Invarianza per Traslazioni)

Una metrica d indotta da una norma in uno spazio normato X soddisfa a

$$d(x + a, y + a) = d(x, y)$$
$$d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y)$$

per tutti gli $x, y, a \in X$ ed ogni scalare α. ∎

Dimostrazione. Abbiamo

$$d(x + a, y + a) = ||x + a - (y + a)|| = ||x - y|| = d(x, y)$$

e

$$d(\alpha x, \alpha y) = ||\alpha x - \alpha y|| = |\alpha|||x - y|| = |\alpha| d(x, y).$$ ∎

Convergenza di successioni e concetti collegati in uno spazio normato seguono facilmente dalle corrispondenti definizioni 1.7 e 1.9 per gli spazi metrici e dal fatto che ora $d(x, y) = ||x - y||$.

(i) Una successione (x_n) in uno spazio normato X è *convergente* se X contiene un x tale che
$$\lim_{n\to\infty} ||x_n - x|| = 0.$$
Allora scriviamo $x_n \to x$ e chiamiamo x il *limite* di (x_n).

(ii) Una successione (x_n) in uno spazio normato è di *Cauchy* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un N tale che
$$||x_m - x_n|| < \varepsilon \qquad \text{per tutti gli } m, n > N.$$

Le successioni erano disponibili anche in un generico spazio metrico. In uno spazio normato possiamo fare un passo avanti ed usare le serie.

Le **serie infinite** possono ora essere definite in un modo analogo a quello dell'analisi. Infatti se (x_k) è una successione in uno spazio normato X, possiamo associare a (x_k) la successione (s_n) di *somme parziali*
$$s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$
dove $n = 1, 2, \cdots$. Se (s_n) è convergente
$$s_n \to s \qquad \text{cioè} \qquad ||s_n - s|| \to 0$$
allora la *serie infinita* o, per brevità, la *serie*
$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$$
è detta *convergere* od *essere convergente*, s è chiamata la *somma* della serie e si scrive
$$s = \sum_{k=1}^{\infty} x_k.$$
Se $\sum_{k=1}^{\infty} ||x_k||$ converge la serie è detta **assolutamente convergente**. Tuttavia in uno spazio normato la assoluta convergenza implica la convergenza se e solo se X è completo.

Possiamo ora estendere il concetto di combinazione lineare al caso di una successione (x_n) e dire che x è combinazione lineare degli (x_n) con coefficienti la successione di scalari (α_n) se
$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k.$$
Analogamente si estende il concetto di indipendenza lineare alle successioni dicendo che una successione (x_n) è linearmente indipendente se una qualunque sua combinazione lineare nulla, anche infinita, ha necessariamente coefficienti tutti nulli.

È quindi naturale utilizzare la struttura di spazio topologico che in uno spazio normato è aggiunta a quella di spazio vettoriale per dare una definizione di base, che è alternativa a quella di Hamel data sopra e che, per distinguerla da quella, chiameremo base senza ulteriori specificazioni.

2.7 Definizione (Base)
Sia M un sottoinsieme di uno spazio normato X (successione o famiglia di vettori). Allora M si dice una *base* di X se ogni elemento $x \in X$ si può esprimere come combinazione lineare, eventualmente infinita, di vettori di M con coefficienti univocamente determinati. ∎

Si noti che ogni sottoinsieme finito o infinito numerabile di M è un insieme di vettori linearmente indipendenti, nel senso sopra detto, e che lo span di M in generale non copre X, ma è denso in X, ossia

$$\overline{\operatorname{span} M} = X.$$

Grazie a questa definizione possiamo costruirci delle basi molto meno ricche in elementi delle basi di Hamel e quindi maggiormente maneggiabili e soprattutto possiamo associare in maniera univoca ad ogni elemento x le sue "componenti" secondo i vettori della base, in maniera analoga a quanto succede per gli spazi vettoriali finito dimensionali.

Se M è una successione (e_n), allora (e_n) è chiamata una **base di Schauder** per X. In questo caso per ogni $x \in X$ v'è un'unica successione di scalari tali che

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k.$$

Se uno spazio normato X ha una base di Schauder allora è separabile. La dimostrazione è semplice e viene lasciata al lettore. Sorprendentemente l'inverso non è vero, cioè uno spazio di Banach separabile non ha necessariamente una base di Schauder.

Example 1. The real line R^1 becomes a normed linear space if we set $\|x\| = |x|$ for every number $x \in R^1$.

Example 2. To make real n-space R^n into a normed linear space, we set

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

for every element $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in R^n. The formula

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$$

then defines the same metric in R^n as already considered in Example 3, p. 38.

Example 3. We can also equip real n-space with the norm

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \tag{2}$$

or the norm

$$\|x\|_0 = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|. \tag{3}$$

The corresponding metrics lead to the spaces R_1^n and R_0^n considered in Examples 4 and 5, p. 39.

Example 4. The formula

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$$

introduces a norm in complex n-space C^n. Other possible norms in C^n are given by (2) and (3).

Example 5. The space $C_{[a,b]}$ of all functions continuous on the interval $[a, b]$ can be equipped with the norm

$$\|f\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |f(t)|.$$

The metric space corresponding to this norm has already been considered in Example 6, p. 39.

Example 1 ($L^\infty(\mathbb{R})$ and its subspaces) Let $L^\infty(\mathbb{R})$ be the set of (equivalence classes of) complex-valued measurable functions on $\mathbb{R}$ such that $|f(x)| \le M$ a.e. with respect to Lebesgue measure for some $M < \infty$ ($f \sim g$ means $f(x) = g(x)$ a.e.). Let $\|f\|_\infty$ be the smallest such M. It is an easy exercise (Problem 1) to show that $L^\infty(\mathbb{R})$ is a Banach space with norm $\|\cdot\|_\infty$. The bounded continuous functions $C(\mathbb{R})$ is a subspace of $L^\infty(\mathbb{R})$ and restricted to $C(\mathbb{R})$ the $\|\cdot\|_\infty$-norm is just the usual supremum norm under which $C(\mathbb{R})$ is complete (since the uniform limit of continuous functions is continuous). Thus, $C(\mathbb{R})$ is a closed subspace of $L^\infty(\mathbb{R})$.

Consider the set $\kappa(\mathbb{R})$ of continuous functions with compact support, that is, the continuous functions that vanish outside of some closed interval. $\kappa(\mathbb{R})$ is a normed linear space under $\|\cdot\|_\infty$ but is not complete. The completion of $\kappa(\mathbb{R})$ is not all of $C(\mathbb{R})$; for example, if f is the function which is identically equal to one, then f cannot be approximated by a function in $\kappa(\mathbb{R})$ since $\|f - g\|_\infty \geq 1$ for all $g \in \kappa(\mathbb{R})$. The completion of $\kappa(\mathbb{R})$ is just $C_\infty(\mathbb{R})$, the continuous functions which approach zero at $\pm\infty$ (Problem 5). Some of the most powerful theorems in functional analysis (Riesz–Markov, Stone–Weierstrass) are generalizations of properties of $C(\mathbb{R})$ (see Sections IV.3 and IV.4).

Example 2 (L^p spaces) Let $\langle X, \mu \rangle$ be a measure space and $p \geq 1$. We denote by $L^p(X, d\mu)$ the set of equivalence classes of measurable functions which satisfy:

$$\|f\|_p \equiv \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p} < \infty$$

Two functions are equivalent if they differ only on a set of measure zero.

Example 3 (sequence spaces) There is a nice class of spaces which is easy to describe and which we will often use to illustrate various concepts. In the following definitions,

$$a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

always denotes a sequence of complex numbers.

$$\ell_\infty = \left\{ a \,\middle|\, \|a\|_\infty \equiv \sup_n |a_n| < \infty \right\}$$

$$c_0 = \left\{ a \,\middle|\, \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \right\}$$

$$\ell_p = \left\{ a \,\middle|\, |a|_p \equiv \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

$$s = \left\{ a \,\middle|\, \lim_{n\to\infty} n^p a_n = 0 \quad \text{for all positive integers } p \right\}$$

$$f = \left\{ a \,\middle|\, a_n = 0 \quad \text{for all but a finite number of } n \right\}$$

It is clear that as sets $f \subset s \subset \ell_p \subset c_0 \subset \ell_\infty$.

The spaces ℓ_∞ and c_0 are Banach spaces with the $\|\cdot\|_\infty$ norm; ℓ_p is a Banach space with the $\|\cdot\|_p$ norm (note that this follows from Example 2 since $\ell_p = L^p(\mathbb{R}, d\mu)$ where μ is the measure with mass one at each positive integer and zero everywhere else). It will turn out that s is a Fréchet space (Section V.2). One of the reasons that these spaces are easy to handle is that f is dense in ℓ_p (in $\|\cdot\|_p$; $p < \infty$) and is dense in c_0 (in the $\|\cdot\|_\infty$ norm). Actually, the set of elements of f with only rational entries is also dense in ℓ_p and c_0. Since this set is countable, ℓ_p and c_0 are separable. ℓ_∞ is not separable (Problem 2).

2.22 DEFINIZIONE (OPERATORI LINEARI)
Se X e Y sono due spazi vettoriali sul medesimo campo K, si dice *operatore lineare* T un'applicazione $T : X \to Y$ tale che per tutti gli $x, y \in X$ e scalari α

$$\begin{aligned} T(x+y) &= Tx + Ty \\ T(\alpha x) &= \alpha Tx. \end{aligned} \tag{2.7}$$

■

Si osservi la notazione Tx invece di $T(x)$; questa semplificazione è standard in analisi funzionale.

Nel caso in cui lo spazio vettoriale X sia un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale più ampio lo si indica con $\mathcal{D}(T)$ e si chiama **dominio** di T. L'**immagine** di T, ossia $T(X)$, si indica con $\mathcal{R}(T)$. Lo **spazio nullo** di T è l'insieme di tutti gli $x \in X$ tali che $Tx = 0$ e si indica con $\mathcal{N}(T)$. Un'altra denominazione per lo spazio nullo è "kernel". Non adotteremo questo termine perché dobbiamo riservarlo ad un altro scopo nella teoria delle equazioni integrali.

Chiaramente (2.7) è equivalente a

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty. \tag{2.8}$$

Prendendo $\alpha = 0$ in (2.7) otteniamo la seguente formula di cui avremo bisogno molte volte nel seguito

$$T0 = 0. \tag{2.9}$$

2.23 DEFINIZIONE (OPERATORE IDENTITÀ)
L'*operatore identità* $I_X : X \to X$ è definito da $I_X x = x$ per tutti gli $x \in X$. Scriviamo anche semplicemente I per I_X; così $Ix = x$. ■

2.24 DEFINIZIONE (OPERATORE ZERO)
L'*operatore zero* $0 : X \to Y$ è definito da $0x = 0$ per tutti gli $x \in X$. ■

2.25 Teorema (Immagine e Spazio Nullo)

Sia T un operatore lineare. Allora

(a) *L'immagine $\mathcal{R}(T)$ è uno spazio vettoriale.*

(b) *Se* $\dim X = n < \infty$, *allora* $\dim \mathcal{R}(T) \leq n$.

(c) *Lo spazio nullo $\mathcal{N}(T)$ è uno spazio vettoriale.* ■

Dimostrazione. **(a)** Prendiamo due qualunque $y_1, y_2 \in \mathcal{R}(T)$ e mostriamo che $\alpha y_1 + \beta y_2 \in \mathcal{R}(T)$ per due scalari qualunque α e β. Poiché $y_1, y_2 \in \mathcal{R}(T)$ abbiamo che $y_1 = Tx_1$e $y_2 = Tx_2$ per qualche $x_1, x_2 \in X$. Anche $\alpha x_1 + \beta x_2 \in X$ perché X è uno spazio vettoriale. La linearità di T dà

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Tx_1 + \beta Tx_2 = \alpha y_1 + \beta y_2.$$

Quindi $\alpha y_1 + \beta y_2 \in \mathcal{R}(T)$. Poiché $y_1, y_2 \in \mathcal{R}(T)$ erano arbitrari e così lo erano gli scalari ciò prova che $\mathcal{R}(T)$ è uno spazio vettoriale.

(b) Scegliamo $n + 1$ elementi $y_1, \cdots, y_{n+1}$ di $\mathcal{R}(T)$ in una maniera arbitraria. Allora abbiamo $y_1 = Tx_1, \cdots, y_{n+1} = Tx_{n+1}$ per qualche $x_1, \cdots, x_{n+1}$ in X. Poiché $\dim X = n$ questo insieme $\{x_1, \cdots, x_{n+1}\}$ deve essere linearmente dipendente. Quindi

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1} = 0$$

per degli scalari non tutti nulli. Poiché T è lineare e $T0 = 0$ applicando T ad entrambi membri si ottiene

$$T(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1}) = \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_{n+1} y_{n+1} = 0.$$

Ciò mostra che l'insieme $\{y_1, \cdots, y_{n+1}\}$ è linearmente dipendente perché gli α_j non sono tutti nulli. Ricordando che questo sottoinsieme di $\mathcal{R}(T)$ era stato scelto in una maniera arbitraria ne concludiamo che $\mathcal{R}(T)$ non ammette sottoinsiemi linearmente indipendenti di $n+1$ o più elementi. Per definizione ciò significa che $\dim \mathcal{R}(T) \leq n$.

(c) Prendiamo due qualunque $x_1, x_2 \in \mathcal{N}(T)$. Allora $Tx_1 = Tx_2 = 0$. Poiché T è lineare per scalari qualunque α, β abbiamo che

$$T(\alpha_1 x_1 + \beta_2 x_2) = 0.$$

Ciò mostra che $\alpha_1 x_1 + \beta_2 x_2 \in \mathcal{N}(T)$. Quindi $\mathcal{N}(T)$ è uno spazio vettoriale. ∎

La seguente conseguenza immediata della parte *(b)* della dimostrazione è degna di nota.

Gli operatori lineari conservano la dipendenza lineare.

Occupiamoci ora dell'inverso di un operatore lineare. Ricordiamo dapprima che un'applicazione $T : X \to Y$ è detta **iniettiva** o **biunivoca** se punti differenti nel dominio hanno immagini differenti, cioè se per ogni $x_1, x_2 \in X$

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow Tx_1 \neq Tx_2 \tag{2.10}$$

o in maniera equivalente se

$$Tx_1 = Tx_2 \Longrightarrow x_1 = x_2. \tag{2.11}$$

In questo caso esiste l'applicazione

$$\begin{aligned} &T^{-1} : \mathcal{R}(T) \to X \\ &y_0 \longmapsto x_0 \qquad\qquad (y_0 = Tx_0) \end{aligned} \tag{2.12}$$

che applica ogni $y_0 \in \mathcal{R}(T)$ su quel $x_0 \in X$ per cui $Tx_0 = y_0$. L'applicazione T^{-1} è chiamata l'**inversa** di T.

Dalla (2.12) abbiamo chiaramente che

$$\begin{aligned} T^{-1}Tx &= x \qquad \text{per tutti gli } x \in X \\ TT^{-1}x &= x \qquad \text{per tutti gli } x \in \mathcal{R}(T). \end{aligned}$$

In connessione con gli operatori lineari sugli spazi vettoriali la situazione è la seguente. L'inverso di un operatore lineare esiste se e solo se lo spazio nullo dell'operatore consiste solamente del vettore nullo. Più precisamente abbiamo il seguente utile criterio che utilizzeremo molto frequentemente.

$\boxed{2.8}$ Operatori Lineari Limitati e Continui

Siamo ora interessati a definire una classe particolare di operatori lineari che ammettono norma e che costituiscono quindi essi stessi uno spazio normato.

2.28 Definizione (Operatori Lineari Limitati)
Siano X e Y spazi normati e $T : X \to Y$. L'operatore T è detto *limitato* se esiste un numero reale c tale che per tutti gli $x \in X$

$$||Tx|| \leq c||x||. \tag{2.14}$$

■

In (2.14) la norma a sinistra è quella di Y e la norma a destra quella di X. Per semplicità abbiamo indicato col medesimo simbolo $||\cdot||$ entrambe le norme, senza pericolo di confusione. La formula (2.14) mostra che un operatore limitato applica insiemi limitati in X in insiemi limitati in Y. Ciò motiva il termine "operatore limitato".

Attenzione. Si noti che il presente uso della parola "limitato" è differente da quello in analisi, dove una funzione limitata è una funzione la cui immagine è un insieme limitato.

Qual è il più piccolo c tale che la (2.14) è ancora valida per tutti gli $x \in X$ che non siano nulli? [Possiamo escludere $x = 0$ perché $Tx = 0$ per $x = 0$.] Dividendo si ottiene

$$\frac{||Tx||}{||x||} \leq c \qquad\qquad (x \neq 0)$$

e ciò mostra che c deve essere almeno altrettanto grande che l'estremo superiore dell'espressione a sinistra considerata su $X - \{0\}$. Quindi il minimo possibile c nella (2.14) è questo estremo superiore. Questa quantità è indicata con $||T||$; così

$$||T|| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{||Tx||}{||x||}. \tag{2.15}$$

$||T||$ è chiamato la **norma** dell'operatore T. Se $X = \{0\}$ definiamo $||T|| = 0$; in questo caso (relativamente ininteressante) $T = 0$ perché $T0 = 0$.

Si noti che la (2.14) con $c = ||T||$ diventa

$$||Tx|| \leq ||T||\,||x||. \tag{2.16}$$

Applicheremo questa formula piuttosto frequentemente.

Naturalmente dovremmo giustificare l'uso del termine "norma" nel presente contesto. Questo viene fatto nel seguente lemma.

2.29 Lemma (Norma)

Sia T un operatore lineare limitato. Allora

(a) *Una formula alternativa per la norma di T è*

$$||T|| = \sup_{\substack{x\in X\\ ||x||=1}} ||Tx||. \tag{2.17}$$

(b) *La norma definita dalla (2.15) soddisfa (N1) sino a (N4).* ∎

Dimostrazione. **(a)** Utilizzando la proprietà (N3) della norma in Y e la linearità di T otteniamo dalla (2.15)

$$||T|| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{1}{||x||}||Tx|| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \left\| T\left(\frac{1}{||x||}x\right)\right\| = \sup_{\substack{y\in X\\ ||y||=1}} ||Ty||.$$

Scrivendo x invece di y a destra abbiamo la (2.17).

(b) (N1) è ovvio e così $||0|| = 0$. Da $||T|| = 0$ abbiamo che $Tx = 0$ per tutti gli $x \in X$, così che $T = 0$. Quindi (N2) vale. Inoltre (N3) è ottenuto da

$$\sup_{||x||=1} ||\alpha Tx|| = \sup_{||x||=1} |\alpha|\,||Tx|| = |\alpha| \sup_{||x||=1} ||Tx||$$

dove $x \in X$. Infine (N4) segue da

$$\sup_{||x||=1} ||(T_1+T_2)x|| = \sup_{||x||=1} ||T_1x + T_2x|| \leq \sup_{||x||=1} ||T_1x|| + \sup_{||x||=1} ||T_2x||;$$

qui $x \in X$. ∎

Si noti che l'operatore identità $I : X \to X$ e l'operatore zero $0 : X \to X$ su uno spazio normato X sono operatori limitati ed hanno rispettivamente norma $||I|| = 1$ e $||0|| = 0$.

Osservazione. Nel caso in cui T sia una matrice $n \times n$ di elementi (τ_{jk}) e la norma nello spazio vettoriale di definizione sia quella euclidea la sua norma risulta essere $||T||^2 = \max_k \sum_{j=1}^n |\tau_{jk}|^2$. Se ne lascia per esercizio la dimostrazione al lettore.

Dal punto (b) del Lemma 2.29 otteniamo immediatamente il risultato cercato.

2.30 Teorema (Spazio $B(X,Y)$)

Lo spazio vettoriale $B(X,Y)$ di tutti gli operatori limitati lineari da uno spazio normato X in uno spazio normato Y è esso stesso uno spazio normato con norma definita da

$$||T|| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{||Tx||}{||x||} = \sup_{\substack{x\in X\\ ||x||=1}} ||Tx||. \tag{2.18}$$

∎

Consideriamo ora alcune importanti proprietà degli operatori lineari limitati.

Gli operatori sono applicazioni, così che ad essi si applica la definizione di continuità. È un fatto fondamentale che per gli operatori *lineari* continuità e limitatezza divengono concetti equivalenti. I dettagli sono i seguenti.

Sia $T : X \to Y$ un operatore qualunque non necessariamente lineare, dove X e Y sono spazi normati. Per la definizione 1.4 l'operatore T è *continuo in un* $x_0 \in X$ se per ogni $\varepsilon > 0$ v'è un $\delta > 0$ tale che

$$||Tx - Tx_0|| < \varepsilon \qquad \text{per tutti gli } x \in X \text{ per cui} \qquad ||x - x_0|| < \delta.$$

T è *continuo* se T è continuo in ogni $x \in X$.

Ora se T è lineare abbiamo il rimarchevole teorema seguente.

2.32 Teorema (Continuità e limitatezza)

Sia $T : X \to Y$ un operatore lineare e siano X e Y spazi normati. Allora

(a) *T è continuo se e solamente se T è limitato.*

(b) *Se T è continuo in un singolo punto allora è continuo.* ■

Dimostrazione. **(a)** Assumiamo che T sia limitato e dimostriamo che è continuo. Per $T = 0$ l'affermazione è banale. Sia $T \neq 0$. Allora $||T|| \neq 0$. Consideriamo un qualunque $x_0 \in X$. Sia dato un $\varepsilon > 0$ arbitrario. Allora poiché T è lineare per ogni $x \in X$ otteniamo

$$||Tx - Tx_0|| = ||T(x - x_0)|| \leq ||T||\,||x - x_0||.$$

Quindi per x tale che

$$||x - x_0|| \leq \frac{\varepsilon}{||T||}$$

otteniamo

$$||Tx - Tx_0|| \leq \varepsilon.$$

Poiché $x_0 \in X$ era arbitrario ciò mostra che T è continuo.

Viceversa assumiamo che T sia continuo in un arbitrario $x_0 \in X$. Allora dato un $\varepsilon > 0$ arbitrario v'è un $\delta > 0$ tale che

$$||Tx - Tx_0|| < \varepsilon \qquad \text{per tutti gli } x \in X \text{ per cui} \qquad ||x - x_0|| < \delta. \tag{2.19}$$

Prendiamo ora un qualunque $y \neq 0$ in X e poniamo

$$x = x_0 + \frac{\delta}{2||y||}y. \qquad \text{Allora} \qquad x - x_0 = \frac{\delta}{2||y||}y.$$

Quindi $||x - x_0|| = \delta/2$ così che possiamo usare la (2.19). Poiché T è lineare abbiamo

$$||Tx - Tx_0|| = ||T(x - x_0)|| = \left\| T\left(\frac{\delta}{2||y||}y\right)\right\| = \frac{\delta}{2||y||}||Ty||$$

e (2.19) implica

$$\frac{\delta}{2||y||}||Ty|| < \varepsilon. \qquad \text{Così} \qquad ||Ty|| < \frac{2\varepsilon}{\delta}||y||.$$

Ciò può essere scritto $||Ty|| \leq c||y||$, dove $c = 2\varepsilon/\delta$. Quindi poiché c dipende da x_0 e non da y ne segue che T è limitato.

(b) La continuità di T in un punto implica la limitatezza di T per la seconda parte della dimostrazione di *(a)*, che a sua volta implica la continuità di T per l'*(a)*. ■

2.33 Corollario (Continuità, Spazio Nullo)

Sia T un operatore lineare limitato. Allora

(a) *$x_n \to x$, dove $x_n, x \in X$, implica $Tx_n \to Tx$.*

(b) *Lo spazio nullo $\mathcal{N}(T)$ è chiuso.* ■

Dimostrazione. **(a)** segue dal Teorema 2.32(a) e 1.14 o direttamente dalla (2.16) perché per $n \to \infty$

$$||Tx_n - Tx|| = ||T(x_n - x)|| \leq ||T||\,||x_n - x|| \to 0.$$

(b) Per ogni $x \in \overline{\mathcal{N}(T)}$ v'è una successione (x_n) in $\mathcal{N}(T)$ tale che $x_n \to x$; cf. 1.12(a). Quindi $Tx_n \to Tx$ per la parte *(a)* di questo corollario. Anche $Tx = 0$ poiché $Tx_n = 0$ così che $x \in \mathcal{N}(T)$. Poiché $x \in \overline{\mathcal{N}(T)}$ era arbitrario, $\mathcal{N}(T)$ è chiuso. ■

È lasciata al lettore la semplice prova di un'altra utile formula

$$||T_1T_2|| \leq ||T_1||\,||T_2||, \qquad ||T^n|| \leq ||T||^n \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{2.20}$$

valida per operatori lineari limitati $T_2 : X \to Y$, $T_1 : Y \to Z$ e $T : X \to X$, dove X, Y, Z sono spazi normati.

Due operatori T_1 e T_2 sono definiti **uguali**, scrivendo

$$T_1 = T_2,$$

se hanno medesimo dominio $\mathcal{D}(T_1) = \mathcal{D}(T_2)$ e se $T_1x = T_2x$ per tutti gli $x \in \mathcal{D}(T_1) = \mathcal{D}(T_2)$.

La **restrizione** di un operatore $T : X \to Y$ ad un sottoinsieme $B \subset X$ è indicato con

$$T|_B$$

ed è l'operatore definito da

$$T|_B : B \to Y, \qquad T|_B x = Tx \text{ per tutti gli } x \in B.$$

Un'**estensione** di T definito in un sottospazio $\mathcal{D}(T) \subset X$ ad un insieme $M \supset \mathcal{D}(T)$ è un operatore

$$\widetilde{T} : M \to Y \qquad \text{tale che} \qquad \tilde{T}|_{\mathcal{D}(T)} = T.$$

Se $\mathcal{D}(T)$ è un sottoinsieme proprio di M, allora un dato T ha molte estensioni. Di interesse pratico sono quelle estensioni che conservano alcune proprietà basilari, per esempio la linearità (se T è lineare) o la limitatezza (se $\mathcal{D}(T)$ giace in uno spazio normato e T è limitato). Il seguente importante teorema è tipico a questo riguardo. Concerne l'estensione di un operatore lineare limitato T alla chiusura $\overline{\mathcal{D}(T)}$ del dominio tale che l'operatore esteso sia nuovamente limitato e lineare e abbia anche la stessa norma. Ciò include il caso dell'estensione da un insieme denso in uno spazio normato X a tutto X. Include anche il caso dell'estensione da uno spazio normato X al suo completamento.

2.34 Teorema (Estensione Limitata Lineare)

Sia

$$T : \mathcal{D}(T) \to Y$$

un operatore limitato lineare, dove $\mathcal{D}(T)$ giace in uno spazio normato X ed Y è uno spazio di Banach. Allora T ha un'unica estensione continua alla chiusura di $\mathcal{D}(T)$

$$\widetilde{T} : \overline{\mathcal{D}(T)} \to Y.$$

Inoltre l'estensione $\widetilde{T}$ è un operatore limitato lineare di norma

$$||\widetilde{T}|| = ||T||. \qquad \blacksquare$$

Dimostrazione. Consideriamo un qualunque $x \in \overline{\mathcal{D}(T)}$. Per il Teorema 1.12(a) v'è una successione (x_n) in $\mathcal{D}(T)$ tale che $x_n \to x$. Poiché T è lineare e limitato abbiamo che

$$||Tx_n - Tx_m|| = ||T(x_n - x_m)|| \leq ||T||\,||x_n - x_m||.$$

Ciò mostra che (Tx_n) è di Cauchy perché (x_n) converge. Per ipotesi Y è completo così che (Tx_n) converge, ossia

$$Tx_n \to y \in Y.$$

Quindi se l'estensione $\widetilde{T}$ esiste deve essere

$$\widetilde{T}x = y.$$

Mostriamo che questa definizione non è ambigua, è cioè indipendente dalla particolare successione scelta in $\mathcal{D}(T)$ convergente a x. Supponiamo che $x_n \to x$ e $z_n \to x$. Allora $x_n - z_n \to 0$. Poiché T è lineare e limitato abbiamo che

$$||Tx_n - Tz_n|| = ||T(x_n - z_n)|| \leq ||T||\,||x_n - z_n||$$

e le due successioni (Tx_n) e (Tz_n) hanno il medesimo limite. Ciò prova che $\widetilde{T}$ è univocamente definito per ogni $x \in \overline{\mathcal{D}(T)}$.

Chiaramente $\widetilde{T}$ è lineare e $\widetilde{T}x = Tx$ per ogni $x \in \mathcal{D}(T)$, così che $\widetilde{T}$ è un estensione di T. Ora usiamo

$$||Tx_n|| \leq ||T||\,||x_n||$$

e lasciamo $n \to \infty$. Allora $Tx_n \to y = \widetilde{T}x$. Poiché $x \longmapsto ||x||$ definisce un'applicazione continua otteniamo che

$$||\widetilde{T}x|| \leq ||T||\,||x||.$$

Quindi $\widetilde{T}$ è limitato e $||\widetilde{T}|| \leq ||T||$. Naturalmente $||\widetilde{T}|| \geq ||T||$ perché la norma essendo definita mediante un estremo superiore non può decrescere in un'estensione. Assieme danno $||\widetilde{T}|| = ||T||$. $\blacksquare$

2.11 Spazi Normati di Operatori. Spazio Duale

In che caso lo spazio normato $B(X,Y)$ delle applicazioni lineari limitate di X in Y è uno spazio di Banach? Questa è una domanda centrale a cui si risponde nel seguente teorema. È rimarchevole che le ipotesi del teorema non coinvolgano X; ossia X può essere o non essere completo.

2.41 Teorema (Completezza)

Se Y è uno spazio di Banach allora $B(X,Y)$ è uno spazio di Banach. ■

Dimostrazione. Consideriamo una successione arbitraria di Cauchy (T_n) in $B(X,Y)$ e mostriamo che (T_n) converge ad un operatore $T \in B(X,Y)$. Poiché (T_n) è di Cauchy, per ogni $\varepsilon > 0$ v'è un N tale che

$$||T_n - T_m|| < \varepsilon \qquad (n, m > N).$$

Per tutti gli $x \in X$ ed $n, m > N$ otteniamo così [cf. (2.16) nella Sez. 2.8]

$$||T_n x - T_m x|| = ||(T_n - T_m)x|| \leq ||T_n - T_m||\,||x|| < \varepsilon ||x||. \tag{2.37}$$

Ora per ogni x fisso e per un dato $\widetilde{\varepsilon}$ possiamo scegliere un $\varepsilon = \varepsilon_x$ tale che $\varepsilon_x ||x|| < \widetilde{\varepsilon}$. Allora dalla (2.37) abbiamo $||T_n x - T_m x|| < \widetilde{\varepsilon}$ e vediamo che $(T_n x)$ è di Cauchy in Y. Poiché Y è completo $(T_n x)$ converge, ossia $T_n x \to y$. Chiaramente il limite $y \in Y$ dipende dalla scelta di $x \in X$. Ciò definisce un operatore $T : X \to Y$, dove $y = Tx$. L'operatore T è lineare perché

$$\lim T_n(\alpha x + \beta z) = \lim(\alpha T_n x + \beta T_n z) = \alpha \lim T_n x + \beta \lim T_n z.$$

Proviamo che T è limitato e che $T_n \to T$, ossia che $||T_n - T|| \to 0$.

Poiché la (2.37) vale per ogni $m > N$ e $T_m x \to Tx$ possiamo fare $m \to \infty$. Usando la continuità della norma allora otteniamo dalla (2.37) per ogni $n > N$ e per tutti gli $x \in X$

$$||T_n x - Tx|| = ||T_n x - \lim_{m\to\infty} T_m x|| = \lim_{m\to\infty} ||T_n x - T_m x|| \leq \varepsilon ||x||. \tag{2.38}$$

Ciò mostra che $(T_n - T)$ con $n > N$ è un operatore limitato. Poiché T_n è limitato $T = T_n - (T_n - T)$ è limitato, ossia $T \in B(X,Y)$. Inoltre se in (2.38) prendiamo l'estremo superiore per tutti gli x di norma 1 otteniamo

$$||T_n - T|| \leq \varepsilon \qquad (n > N).$$

Quindi $||T_n - T|| \to 0$. ■

2.9 Funzionali Lineari

Un **funzionale** è un operatore la cui immagine giace sulla linea reale $\mathbb{R}$ o nel piano complesso $\mathbb{C}$. Inizialmente l'*analisi funzionale* era l'analisi dei funzionali. Questi ultimi appaiono così frequentemente che viene usata una notazione specifica. Indichiamo i funzionali con le lettere minuscole f, g, $h, \cdots$, il dominio di f con $\mathcal{D}(f)$, l'immagine con $\mathcal{R}(f)$ ed il valore di f in x con $f(x)$, con le parentesi.

I funzionali sono operatori cosicché si applicano le definizioni precedenti. Avremo in particolare bisogno delle seguenti due definizioni perché la maggioranza dei funzionali che considereremo saranno lineari e limitati.

2.35 Definizione (Funzionale Lineare)
Un *funzionale lineare* f è un operatore lineare definito in uno spazio vettoriale X con immagine nel campo scalare K di X; così

$$f : X \to K,$$

dove $K = \mathbb{R}$ se X è reale e $K = \mathbb{C}$ se X è complesso. ■

Se X è un sottospazio lineare di uno spazio vettoriale più ampio, si indica con $\mathcal{D}(f)$ e si chiama dominio di definizione di f.

2.36 Definizione (Funzionali Limitati Lineari)
Un *funzionale limitato lineare* f è un operatore limitato lineare (cf. Def. 2.28) con immagine nel campo scalare dello spazio normato X. Perciò esiste un numero reale c tale che per tutti gli $x \in X$

$$|f(x)| \leq c||x||. \tag{2.21}$$

Inoltre la *norma* di f è (cf. (2.15) nella Sez. 2.8)

$$||f|| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{||x||} \tag{2.22}$$

o

$$||f|| = \sup_{\substack{x \in X \\ ||x||=1}} |f(x)|. \tag{2.23}$$

■

La formula (2.16) nella Sez. 2.8 ora implica che

$$|f(x)| \leq ||f||\,||x||, \tag{2.24}$$

ed il Teorema 2.32 viene riformulato nel modo seguente.

2.37 Teorema (Continuità e Limitatezza)

Un funzionale lineare f con dominio $\mathcal{D}(f)$ in uno spazio normato è continuo se e solo se f è limitato. ■

2.42 DEFINIZIONE (SPAZIO DUALE X')

Sia X uno spazio normato. Allora l'insieme di tutti i funzionali lineari limitati su X costituisce uno spazio normato con norma definita da

$$||f|| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{||x||} = \sup_{\substack{x \in X \\ ||x||=1}} |f(x)| \tag{2.39}$$

[cf. (2.22) e (2.23) nella Sez. 2.9] che è chiamato la *spazio duale*[2] di X ed è indicato con X'. ■

[2] Altri termini sono *duale, spazio aggiunto* e *spazio coniugato*. Si ricordi dalla Sez. 2.9 che lo spazio duale *algebrico* X^* è lo spazio vettoriale di *tutti* i funzionali lineari su X.

Poiché un funzionale lineare su X applica X in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ (i campi scalari di X) e poiché $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ presi colla metrica usuale sono completi vediamo che X' è $B(X, Y)$ con lo spazio completo $Y = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Quindi il Teorema 2.41 è applicabile ed implica il basilare teorema seguente.

2.43 Teorema (Spazio Duale)

Lo spazio duale X' di uno spazio normato X è uno spazio di Banach (lo sia o no X). ∎

Costituisce un principio fondamentale dell'analisi funzionale che lo studio degli spazi sia spesso combinato con quello dei loro duali.