Capitolo 1

Spazi Metrici

Uno spazio metrico è un insieme X dotato di una *metrica.* La metrica associa ad ogni coppia di elementi (*punti*) di X una *distanza.* La metrica è definita assiomaticamente, gli assiomi essendo suggeriti da alcune proprietà semplici della distanza, così com'è familiarmente definita fra punti della retta reale $\mathbb{R}$ o del piano complesso $\mathbb{C}$. Si tratta come mostrano alcuni esempi basilari di un concetto molto generale. Un'importante proprietà aggiuntiva che uno spazio metrico può possedere è la *completezza.* Un altro concetto di interesse teorico e pratico è la *separabilità* di uno spazio metrico. Gli spazi metrici separabili sono più semplici di quelli non separabili.

1.1 Definizione (Spazio Metrico, Metrica)
Uno *spazio metrico* è una coppia (X, d), dove X è un insieme e d una *metrica su* X (o *distanza* su X), cioè una funzione definita su $X \times X$ tale che per ogni $x, y, z \in X$ si abbia

M1 d è a valori reali, finito e non negativo.

M2 $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$.

M3 $d(x, y) = d(y, x)$ **(Simmetria)**

M4 $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ **(Disuguaglianza Triangolare)**

■

Alcuni termini di uso corrente sono i seguenti. X è normalmente chiamato l'*insieme sottostante* a (X, d). I suoi elementi sono chiamati *punti.* Per x, y fissati il numero non negativo $d(x, y)$ si chiama *distanza* fra x e y. Le proprietà da (M1) a (M4) sono gli *assiomi della metrica.* Il nome "disuguaglianza triangolare" è preso a prestito dalla geometria elementare.

Un **sottoinsieme** $(Y, \widetilde{d})$ di (X, d) si ottiene prendendo un sottoinsieme $Y \subset X$ e restringendo d a $Y \times Y$; allora la metrica su Y è data dalla restrizione

$$\widetilde{d} = d|_{Y \times Y}.$$

$\widetilde{d}$ si chiama la metrica **indotta** su Y da d.

$\boxed{1.1}$ Insiemi Aperti. Insiemi Chiusi. Intorni.

V'è un considerevole numero di concetti ausiliari che giocano un ruolo in connessione con gli spazi metrici. Quelli di cui avremo bisogno sono inclusi in questa sezione. Perciò questa sezione contiene molti concetti, ma il lettore noterà che molti di loro divengono familiari quando vengono applicati agli spazi euclidei.

Consideriamo dapprima alcuni importanti sottoinsiemi di un dato spazio metrico $X = (X, d)$.

1.2 Definizione (Palla e Sfera)
Dato un punto $x_0 \in X$ ed un numero reale $r > 0$ definiamo tre tipi di insiemi

(a) $B(x_0; r) = \{x \in X | d(x, x_0) < r\}$ **(Palla Aperta)**

(b) $\widetilde{B}(x_0; r) = \{x \in X | d(x, x_0) \leq r\}$ **(Palla Chiusa)**

(c) $S(x_0; r) = \{x \in X | d(x, x_0) = r\}$ **(Sfera)**

■

In tutti e tre i casi x_0 è chiamato il *centro* ed r il *raggio*.

Attenzione. Lavorando con gli spazi metrici è assai utile utilizzare una terminologia analoga a quella della geometria Euclidea. Tuttavia bisogna essere coscienti di quanto sia pericoloso assumere che palle e sfere in uno spazio metrico arbitrario soddisfino alle medesime proprietà soddisfatte da palle e sfere in $\mathbb{R}^3$. Ad esempio una possibile proprietà inusuale è che una sfera può essere vuota. Un'altra possibile proprietà inusuale sarà citata più in là.

1.3 Definizione (Insiemi Aperti, Insiemi Chiusi)
Un sottoinsieme M di uno spazio metrico X è detto aperto se contiene una palla centrata in ciascuno dei suoi punti. Un sottoinsieme K è detto chiuso se il suo complemento (in X) è aperto, cioè se $K^C = X - K$ è aperto. ■

La dizione aperta e chiusa utilizzata nella definizione precedente è coerente con questa definizione di insieme aperto e chiuso. Infatti, utilizzando la diseguaglianza triangolare, è facile vedere che per ogni punto $x_1 \in B(x_0; r)$ la palla $B(x_1; r_1)$ centrata in x_1 e di raggio $r_1 = r - d(x_1, x_{0)}$ è contenuta in $B(x_0; r)$ e quindi $B(x_0; r)$ è un insieme aperto. Che $\widetilde{B}(x_0; r)$ sia chiuso si dimostra per assurdo. Sia infatti per assurdo il complemento di $\widetilde{B}(x_0; r)$ non aperto. Allora esiste ameno un punto x_1 esterno a $\widetilde{B}(x_0; r)$, ossia per cui $d(x_1, x_0) > r$, tale che ogni palla centrata in x_1 contiene almeno un punto $x \in \widetilde{B}(x_0; r)$. Consideriamo ora la palla $B(x_1; r_1)$ centrata in x_1 di raggio $r_1 = d(x_1, x_0) - r$. Per l' x comune a $\widetilde{B}(x_0; r)$ e $B(x_1; r_1)$ abbiamo $d(x_1, x_0) \leq d(x_1, x) + d(x, x_0) < r_1 + r = d(x_1, x_0)$, che è impossibile.

Una palla aperta $B(x_0; \varepsilon)$ di raggio ε è spesso chiamata un ε–*intorno* di x_0. Per un **intorno** di x_0 si intende un qualunque sottoinsieme di X che contiene un ε–intorno di x_0.

Vediamo direttamente dalla definizione che ciascun intorno di x_0 contiene x_0; in altre parole x_0 è un punto di ciascuno dei suoi intorni. Se N è un intorno di x_0 e $N \subset M$, allora anche M è un intorno di x_0.

Chiamiamo x_0 un **punto interno** di un insieme $M \subset X$ se M è un intorno di x_0. L'**interno** di M è l'insieme di tutti i punti interni a M e può essere indicato con M^0 o con $\mathrm{Int}(M)$. $\mathrm{Int}(M)$ è aperto ed è l'insieme aperto più grande contenuto in M.

Non è difficile mostrare che la collezione di tutti i sottoinsiemi aperti di X, che possiamo chiamare $\mathcal{T}$, ha le seguenti proprietà

T1 $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$.

T2 L'unione di membri di $\mathcal{T}$ è un membro di $\mathcal{T}$.

T3 L'intersezione di un numero finito di membri di $\mathcal{T}$ è un membro di $\mathcal{T}$.

Dimostrazione. (T1) segue dall'osservazione che $\emptyset$ non ha elementi e, ovviamente, X è aperto. Proviamo (T2). Un punto qualunque x dell'unione U degli insiemi aperti appartiene ad (almeno) uno di questi insiemi, sia M, ed M contiene una palla B di x poiché M è aperto. Allora $B \subset U$ per definizione di unione. Ciò prova (T2). Infine se y è un punto qualunque dell'intersezione degli insiemi aperti $M_1, \cdots, M_n$ allora ciascun M_j contiene una palla di y e la più piccola di queste palle è contenuta nell'intersezione. Ciò prova (T3). ∎

Osserviamo che le proprietà da (T1) a (T3) sono così fondamentali che vengono di norma inserite in un contesto più generale. Precisamente si definisce come uno **spazio topologico** $(X, \mathcal{T})$ un insieme X ed una collezione $\mathcal{T}$ che soddisfa gli *assiomi* da (T1) a (T3). L'insieme $\mathcal{T}$ è chiamato una *topologia per* X. Da questa definizione segue che

Uno spazio metrico è uno spazio topologico.

Gli insiemi aperti giocano anche un ruolo in connessione con le applicazioni continue, dove la continuità è una naturale generalizzazione della continuità conosciuta dall'analisi ed è definita come segue.

1.4 Definizione (Applicazione Continua)
Siano $X = (X, d)$ e $Y = (Y, \widetilde{d})$ due spazi metrici. Un'applicazione $T : X \to Y$ è detta *continua nel punto* $x_0 \in X$ se per ogni $\varepsilon > 0$ v'è un $\delta > 0$ tale che

$$\widetilde{d}(Tx, Tx_0) < \varepsilon \qquad \text{per ogni } x \text{ che soddisfa a} \qquad d(x, x_0) < \delta.$$

T è detta *continua* se è continua in ogni punto di X. ∎

È importante ed interessante che le applicazioni continue possano essere caratterizzate in termini di insiemi aperti come segue.

1.5 Teorema (Applicazioni Continue)

Un'applicazione T di uno spazio metrico X in uno spazio metrico Y è continua se e solo se l'immagine inversa di un qualunque sottoinsieme aperto di Y è un sottoinsieme aperto di X. ∎

Dimostrazione. **(a)** Supponiamo che T sia continua. Sia $S \subset Y$ aperto ed S_0 l'immagine inversa di S. Se $S_0 = \emptyset$ è aperto. Sia $S_0 \neq \emptyset$. Per un qualunque $x_0 \in S_0$ sia $y_0 = Tx_0$. Poiché S è aperto contiene un ε–intorno N di y_0. Poiché T è continua x_0 ha un δ–intorno N_0 che è applicato in N. Poiché $N \subset S$ abbiamo che $N_0 \subset S_0$ così che S_0 è aperto perché $x_0 \in S_0$ era arbitrario.

(b) Viceversa assumiamo che l'immagine inversa di ogni insieme aperto in Y sia un insieme aperto in X. Allora per ogni $x_0 \in X$ e qualunque ε–intorno N di Tx_0 l'immagine inversa N_0 di N è aperta, poiché N è aperto, e N_0 contiene x_0. Quindi anche N_0 contiene un δ–intorno di x_0 che è applicato in N poiché N_0 è applicato in N. Di conseguenza, per definizione, T è continua in x_0. Poiché $x_0 \in X$ era arbitrario ne segue che T è continua. ∎

Introduciamo ora due altri concetti che sono collegati. Sia M un sottoinsieme di uno spazio metrico X. Allora un punto x_0 di X (che può o può non essere un punto di M) è chiamato un **punto di accumulazione** di M (o *punto limite di* M) se ogni intorno di x_0 contiene almeno un punto $y \in M$ distinto da x_0. L'insieme costituito dai punti di M e dai punti di accumulazione di M è chiamato la **chiusura** *di* M ed è indicato con

$$\overline{M}.$$

L'insieme $\overline{M}$ è chiuso, perché se non lo fosse il suo complemento non sarebbe aperto e conterebbe quindi almeno un punto di accumulazione di M. Inoltre, allo stesso modo, si mostra che $\overline{M}$ è il più piccolo insieme chiuso che contiene M.

Prime di procedere menzioniamo un'altra proprietà inusuale delle palle in uno spazio metrico. Mentre in $\mathbb{R}^3$ la chiusura $\overline{B(x_0;r)}$ di una palla aperta $B(x_0;r)$ è la palla chiusa $\widetilde{B}(x_0;r)$, in un generico spazio metrico ciò può non essere valido.

Usando il concetto di chiusura vogliamo dare una definizione che risulterà di particolare importanza nel seguito.

1.6 Definizione (Insieme Denso, Spazio Separabile)
Un sottoinsieme M di uno spazio metrico X è detto *denso in* X se

$$\overline{M} = X.$$

X è detto *separabile* se ha un sottoinsieme numerabile che è denso in X. ∎

Quindi se M è denso in X ogni palla in X, per quanto piccola, conterrà punti di M; o, in altre parole, non c'è punto $x \in X$ che abbia un intorno che non contiene punti di M.

Vedremo nel seguito che gli spazi metrici separabili sono alquanto più semplici di quelli non separabili.

$\boxed{1.2}$ Convergenza. Successioni di Cauchy. Completezza.

Sappiamo che le successioni di numeri reali giocano un ruolo importante in analisi ed è la metrica di $\mathbb{R}$ che permette di definire il concetto basilare di convergenza di una tale successione. Lo stesso vale per le successioni di numeri complessi; in questo caso dobbiamo usare la metrica del piano complesso. In uno spazio metrico arbitrario $X = (X, d)$ la situazione è assai simile, cioè possiamo considerare una successione (x_n) di elementi $x_1, x_2, \cdots$ di X ed usare la metrica d per definire la convergenza in maniera analoga a quella dell'analisi.

1.7 Definizione (Convergenza di una Successione, Limite)
Una successione (x_n) in uno spazio metrico $X = (X, d)$ è detta *convergere* od *essere convergente* se v'è un $x \in X$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0.$$

x è chiamato il *limite* di (x_n) e si scrive

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

o semplicemente

$$x_n \to x.$$

Diciamo che (x_n) *converge a* x o *ammette il limite* x. Se (x_n) non è convergente si dice che è *divergente.* ■

Come è stata usata la metrica d in questa definizione? d ha fornito la successione di numeri reali $a_n = d(x_n, x)$ la cui convergenza definisce quella di (x_n). Quindi se $x_n \to x$, dato un $\varepsilon > 0$, esiste un $N = N(\varepsilon)$ tale che tutti gli x_n con $n > N$ giacciono in un ε–intorno $B(x; \varepsilon)$ di x.

Per evitare incomprensioni osserviamo che il limite di una successione convergente deve essere un punto dello spazio X.

Mostriamo ora che due proprietà delle successioni convergenti (unicità del limite e limitatezza), che risultano familiari dall'analisi, si mantengono in questo contesto molto più generale.

Chiamiamo un sottoinsieme non vuoto $M \subset X$ un *insieme limitato* se il suo *diametro*

$$\delta(M) = \sup_{x,y \in M} d(x,y)$$

è finito. Chiamiamo una successione (x_n) in X una **successione limitata** se l'insieme dei suoi punti è un sottoinsieme limitato di X.

Ovviamente se M è limitato allora $M \subset B(x_0; r)$, dove $x_0 \in X$ è un qualunque punto ed r è un numero reale (sufficientemente grande) e viceversa.

La nostra asserzione è allora formulata come segue.

1.8 Lemma (Limitatezza, Limite)

Sia $X = (X, d)$ uno spazio metrico. Allora

(a) *Una successione convergente in X è limitata ed il suo limite è unico.*

(b) *Se $x_n \to x$ e $y_m \to y$ in X, allora $d(x_n, y_m) \to d(x, y)$.* ∎

Dimostrazione. **(a)** Supponiamo che $x_n \to x$. Allora prendendo $\varepsilon = 1$ possiamo trovare un N tale che $d(x_n, x) < 1$ per tutti gli $n > N$. Quindi per tutti gli n abbiamo che $d(x_n, x) < 1 + a$ dove

$$a = \max\{d(x_1, x), \cdots, d(x_N, x)\}.$$

Ciò mostra che (x_n) è limitata. Assumendo che $x_n \to x$ e che $\mathrm{x}_n \to z$ abbiamo dalla (M4)

$$0 \leq d(x, z) \leq d(x, x_n) + d(x_n, z) \to 0 + 0$$

e l'unicità $x = z$ del limite segue dalla (M2).

(b) Dalla (M4) abbiamo che

$$d(x_n, y_m) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_m).$$

Da cui otteniamo

$$d(x_n, y_m) - d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(y_m, y)$$

ed una diseguaglianza simile scambiando x_n con x e y_m con y e moltiplicando per -1. Assieme forniscono

$$|d(x_n, y_m) - d(x, y)| \leq d(x_n, x) + d(y_m, y) \to 0$$

per $n, m \to \infty$. ∎

Definiremo ora il concetto di completezza di uno spazio metrico, che risulterà basilare nel seguito. La completezza *non* segue dagli assiomi (M1) sino a (M4), poiché vi sono spazi metrici *incompleti.* In altre parole, la completezza è una proprietà addizionale che gli spazi metrici possono avere o non avere. Essa ha varie conseguenze che rendono gli spazi metrici completi "migliori e più semplici" di quelli incompleti.

Ricordiamo dapprima dall'analisi che una successione (x_n) di numeri reali o complessi converge sulla retta reale $\mathbb{R}$ o nel piano complesso $\mathbb{C}$ se e solamente se soddisfa il *criterio di convergenza di Cauchy,* cioè se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ v'è un $N = N(\varepsilon)$ tale che

$$|x_m - x_n| < \varepsilon \qquad \text{per tutti gli } m, n > N.$$

Qui $|x_m - x_n|$ è la distanza $d(x_m, x_n)$ da x_m a x_n sulla retta reale $\mathbb{R}$ o nel piano complesso $\mathbb{C}$. Quindi possiamo scrivere la diseguaglianza del criterio di Cauchy nella forma

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon \qquad (\ m, n > N).$$

Se una successione (x_n) soddisfa alla condizione del criterio di Cauchy potremo chiamarla una *successione di Cauchy.* Allora il criterio di Cauchy dice semplicemente che una successione di numeri reali o complessi converge in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ se e solamente se è una successione di Cauchy. Sfortunatamente in spazi più generali la situazione può essere più complicata e vi possono essere successioni di Cauchy che non convergono.

1.9 Definizione (Successione di Cauchy, Completezza)
Una successione (x_n) in uno spazio metrico $X = (X, d)$ è detta di *Cauchy* (o *fondamentale*) se per ogni $\varepsilon > 0$ v'è un $N = N(\varepsilon)$ tale che

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon \qquad \text{per ogni } m, n > N. \tag{1.1}$$

Lo spazio X è detto *completo* se ogni successione di Cauchy in X converge (cioè se ha un limite che è un elemento di X). ■

A prescindere dalla completezza o meno di X la condizione (1.1) è necessaria per la convergenza di una successione. Infatti si ottiene facilmente il risultato seguente.

1.10 Teorema (Successione Convergente)

Ogni successione convergente in uno spazio metrico è una successione di Cauchy. ■

Dimostrazione. Se $x_n \to x$ allora per ogni $\varepsilon > 0$ v'è un $N = N(\varepsilon)$ tale che

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{per tutti gli } n > N.$$

Quindi dalla disuguaglianza triangolare otteniamo per $m, n > N$

$$d(x_m, x_n) \le d(x_m, x) + d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ciò mostra che (x_n) è di Cauchy. ■

Se lo spazio X è completo la condizione di Cauchy (1.1) diventa necessaria e sufficiente per la convergenza e si parla di criterio di Cauchy per la convergenza. Il teorema che afferma la validità del criterio di Cauchy in $\mathbb{R}$ e in $\mathbb{C}$ può essere riespresso in termini di completezza come segue.

1.11 Teorema (Retta Reale, Piano Complesso)

La retta reale ed il piano complesso sono spazi metrici completi. ■

Completiamo questa sezione con tre teoremi che sono legati alla convergenza e alla completezza e che saranno necessari nel seguito.

1.12 Teorema (Chiusura, Insieme Chiuso)

Sia M un sottoinsieme non vuoto di uno spazio metrico (X, d) e $\overline{M}$ la sua chiusura così come definita nella sezione precedente. Allora

(a) $x \in \overline{M}$ *se e solo se esiste una successione* (x_n) *in* M *tale che* $x_n \to x$.

(b) M *è chiuso se e solo se ogni successione convergente* (x_n) *di punti di* M *converge ad un punto di* M, *ossia se e solo se per ogni successione di punti* $x_n \in M$ *tale che* $x_n \to x$ *è* $x \in M$. ■

Dimostrazione. **(a)** Sia $x \in \overline{M}$. Se $x \in M$ una successione di questo tipo è $(x, x, \cdots)$. Se $x \notin M$ è un punto di accumulazione di M. Quindi per ogni $n = 1, 2, \cdots$ la palla $B(x; 1/n)$ contiene un $x_n \in M$ e $x_n \to x$ perché $1/n \to 0$ per $n \to \infty$.

Viceversa se (x_n) è in M e $x_n \to x$ allora se $x \in M$ non v'è nulla da dimostrare. Se $x \notin M$ ogni intorno di x contiene punti $x_n \neq x$, così che $x \in \overline{M}$ per definizione di chiusura.

(b) M è chiuso se e solo se $M = \overline{M}$ così che *(b)* segue facilmente da *(a)*. ∎

1.13 Teorema (Sottospazio Completo)

Un sottospazio M di uno spazio metrico completo X è esso stesso completo se e solo se l'insieme M è chiuso in X. ∎

Dimostrazione. Sia M completo. Grazie a 1.12(a) per ogni $x \in \overline{M}$ v'è una successione (x_n) in M che converge in M, il limite essendo unico per l' 1.8. Quindi $x \in M$. Questo prova che M è chiuso perché $x \in \overline{M}$ era arbitrario.

Viceversa sia M chiuso e (x_n) di Cauchy in M. Allora $x_n \to x \in X$ ciò che implica $x \in \overline{M}$ per l'1.12(a) e $x \in M$ poiché $M = \overline{M}$ per assunzione. Quindi la successione arbitraria di Cauchy (x_n) converge in M ciò che prova la completezza di M. ∎

Questo teorema è molto utile e ne avremo molto spesso bisogno nel seguito.

L'ultimo dei tre teoremi annunciati mostra l'importanza della convergenza delle successioni in connessione con la continuità di un'applicazione.

1.14 Teorema (Applicazione Continua)

Un'applicazione $T : X \to Y$ di uno spazio metrico (X, d) in uno spazio metrico $(Y, \widetilde{d})$ è continua in un punto $x_0 \in X$ se e solo se

$$x_n \to x_0 \qquad \textit{implica} \qquad Tx_n \to Tx_0. \qquad ∎$$

Dimostrazione. Si assuma che T sia continua in x_0. Allora per un dato $\varepsilon > 0$ v'è un $\delta > 0$ tale che

$$d(x, x_0) < \delta \qquad \text{implica} \qquad \widetilde{d}(Tx, Tx_0) < \varepsilon.$$

Sia $x_n \to x_0$. Allora v'è un N tale che per ogni $n > N$ sia

$$d(x_n, x_0) < \delta.$$

Quindi per ogni $n > N$

$$\widetilde{d}(Tx_n, Tx_0) < \varepsilon.$$

Per definizione ciò significa che $Tx_n \to Tx_0$.

Viceversa assumiamo che

$$x_n \to x_0 \qquad \text{implichi} \qquad Tx_n \to Tx_0$$

e proviamo che allora T è continua in x_0. Supponiamo che ciò sia falso. Allora v'è un $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ v'è un $x \neq x_0$ che soddisfa a

$$d(x, x_0) < \delta \qquad \text{ma tale che} \qquad \widetilde{d}(Tx, Tx_0) \geq \varepsilon.$$

In particolare per $\delta = 1/n$ v'è un x_n che soddisfa a

$$d(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \qquad \text{ma tale che} \qquad \widetilde{d}(Tx_n, Tx_0) \geq \varepsilon.$$

Chiaramente $x_n \to x$ ma (Tx_n) non converge a Tx_0. Ciò contraddice $Tx_n \to Tx_0$ e prova il teorema. ∎

In particolare da questo teorema e dal Lemma 1.8 al punto b) segue la seguente proposizione.

1.15 Proposizione (Continuità della distanza)

La distanza $d(x, y)$ in X è continua in x ed in y. ■

1.3 Completamento di uno Spazio metrico

Sappiamo che la retta razionale $\mathbb{Q}$ non è completa ma può essere "allargata" alla retta reale $\mathbb{R}$ che è completa. Questo "completamento" $\mathbb{R}$ di $\mathbb{Q}$ è tale che $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$. È molto importante che un arbitrario spazio metrico incompleto possa essere "completato" in una maniera simile. Per una formulazione precisa e conveniente useremo i due concetti seguenti collegati fra loro e che hanno anche diverse altre applicazioni.

1.16 Definizione (Applicazione isometrica, Spazi Isometrici)
Siano $X = (X, d)$ e $\widetilde{X} = (\widetilde{X}, \widetilde{d})$ spazi metrici. Allora

(a) Un'applicazione T di X in $\widetilde{X}$ è detta *isometrica* o una *isometria* se T conserva le distanze, cioè se per ogni $x, y \in X$

$$\widetilde{d}(Tx, Ty) = d(x, y),$$

dove Tx e Ty sono le immagini di x e y, rispettivamente.

(b) Lo spazio X è detto *isometrico* allo spazio $\widetilde{X}$ se esiste un'isometria biiettiva di X su $\widetilde{X}$. Gli spazi X e $\widetilde{X}$ sono allora chiamati *spazi isometrici.* ■

Si noti che una isometria è sempre iniettiva.

Due spazi isometrici possono differire al più per la natura dei loro punti ma sono indistinguibili dal punto di vista della metrica. In uno studio, in cui la natura dei punti non abbia importanza, i due spazi si possono considerare identici — ovvero come due copie del medesimo spazio "astratto".

Possiamo ora formulare e provare il teorema che asserisce che ogni spazio metrico può essere completato. Lo spazio $\widehat{X}$ che appare in questo teorema è chiamato **completamento** dello spazio dato X.

1.17 Teorema (Completamento)

Per ogni spazio metrico $X = (X, d)$ esiste uno spazio metrico completo $\widehat{X} = (\widehat{X}, \widehat{d})$ che ha un sottospazio W che è isometrico a X e che è denso in $\widehat{X}$. Questo spazio $\widehat{X}$ è unico a meno di isometrie, cioè, se $\widetilde{X}$ è un qualunque spazio metrico completo che ha un sottospazio denso $\widetilde{W}$ isometrico a X, allora $\widetilde{X}$ e $\widehat{X}$ sono isometrici. ■

Dimostrazione. La dimostrazione è piuttosto lunga ma diretta. La suddividiamo in quattro passi da *(a)* a *(d)*. Costruiamo

(a) $\widehat{X} = (\widehat{X}, \widehat{d})$
(b) un'isometria T di X su W, dove $\overline{W} = \widehat{X}$.

Poi proviamo

(c) la completezza di $\widehat{X}$,
(d) l'unicità di $\widehat{X}$ a meno di isometrie.

Parlando rozzamente possiamo dire che il nostro compito è quello di assegnare dei limiti convenienti a quelle successioni di Cauchy in X che non convergono. Tuttavia non dobbiamo introdurre "troppi" limiti, ma dobbiamo tener conto che certe successioni "alla fine divengono arbitrariamente vicine le une alle altre". Questa idea intuitiva può essere espressa matematicamente in termini di una conveniente relazione di equivalenza [vedi (1.2) qui di seguito].

(a) *Costruzione di* $\widehat{X} = (\widehat{X}, \widehat{d})$. Siano (x_n) e (x'_n) successioni di Cauchy in X. Definiamo (x_n) *equivalente* a (x'_n) e scriviamo $(x_n) \sim (x'_n)$ se

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x'_n) = 0. \tag{1.2}$$

Sia $\widehat{X}$ l'insieme delle classi di equivalenza $\widehat{x}, \widehat{y}, \cdots$ di successioni di Cauchy così ottenute. Scriviamo $(x_n) \in \widehat{x}$ per indicare che (x_n) è un membro di $\widehat{x}$ (un *rappresentate* della classe $\widehat{x}$). Poniamo ora

$$\widehat{d}(\widehat{x}, \widehat{y}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \tag{1.3}$$

dove $(x_n) \in \widehat{x}$ e $(y_n) \in \widehat{y}$. Mostriamo che questo limite esiste. Abbiamo

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n);$$

quindi otteniamo

$$d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m) \leq d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n)$$

e una disuguaglianza simile con m ed n scambiati. Da entrambe

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n). \tag{1.4}$$

Poiché (x_n) e (y_n) sono di Cauchy possiamo rendere il membro a destra piccolo a piacere. Ciò implica che il limite in (1.3) esiste perché $\mathbb{R}$ è completo.

Dobbiamo anche mostrare che il limite in (1.3) è indipendente dalla particolare scelta del rappresentante. Infatti se $(x_n) \sim (x'_n)$ e $(y_n) \sim (y'_n)$ allora per la (1.2)

$$|d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)| \leq d(x_n, x'_n) + d(y_n, y'_n) \to 0$$

per $n \to \infty$, che implica l'asserzione che

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(x'_n, y'_n).$$

Proviamo che $\widehat{d}$ in (1.3) è una metrica in $\widehat{X}$. Ovviamente $\widehat{d}$ soddisfa (M1) così come $\widehat{d}(\widehat{x}, \widehat{x}) = 0$ e (M3). Inoltre

$$\widehat{d}(\widehat{x}, \widehat{y}) = 0 \Longrightarrow (x_n) \sim (y_n) \Longrightarrow \widehat{x} = \widehat{y}$$

fornisce (M2) e (M4) per $\widehat{d}$ segue da

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, z_n) + d(z_n, y_n)$$

per $n \to \infty$.

(b) *Costruzione di un isometria* $T : X \to W \subset \widehat{X}$. A ciascun $b \in X$ associamo la classe $\widehat{b} \in \widehat{X}$ che contiene la successione costante di Cauchy $(b, b, \cdots)$. Ciò definisce un'applicazione

$T : X \to W$ sul sottospazio $W = T(X) \subset \widehat{X}$. L'applicazione T è data da $b \longmapsto \widehat{b} = Tb$, dove $(b, b, \cdots) \in \widehat{b}$. Vediamo che T è un'isometria perché (1.3) diviene semplicemente

$$\widehat{d}(\widehat{b}, \widehat{c}) = d(b, c);$$

qui $\widehat{c}$ è la classe di (y_n) dove $y_n = c$ per tutti gli n. Una qualunque isometria è iniettiva e $T : X \to W$ è surgettiva perché $T(X) = W$. Quindi W e X sono isometrici.

Mostriamo che W è denso in $\widehat{X}$. Consideriamo un qualunque $\widehat{x} \in \widehat{X}$. Sia $(x_n) \in \widehat{x}$. Per ogni $\varepsilon > 0$ v'è un N tale che

$$d(x_n, x_N) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (n > N).$$

Sia $(x_N, x_N, \cdots) \in \widehat{x}_N$. Allora $\widehat{x}_N \in W$. Per la (1.3)

$$\widehat{d}(\widehat{x}, \widehat{x}_N) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_N) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Ciò mostra che ogni ε–intorno dell'arbitrario $\widehat{x} \in \widehat{X}$ contiene un elemento di W. Quindi W è denso in $\widehat{X}$.

(c) *Completezza di* $\widehat{X}$. Sia $(\widehat{x}_n)$ una qualunque successione di Cauchy in $\widehat{X}$. Poiché W è denso in $\widehat{X}$ per ogni $\widehat{x}_n$ v'è un $\widehat{z}_n \in W$ tale che

$$\widehat{d}(\widehat{x}_n, \widehat{z}_n) < \frac{1}{n}. \tag{4}$$

Quindi per la disuguaglianza triangolare

$$\begin{aligned}\widehat{d}(\widehat{z}_m, \widehat{z}_n) &\leq \widehat{d}(\widehat{z}_m, \widehat{x}_m) + \widehat{d}(\widehat{x}_m, \widehat{x}_n) + \widehat{d}(\widehat{x}_n, \widehat{z}_n) \\ &< \frac{1}{m} + \widehat{d}(\widehat{x}_m, \widehat{x}_n) + \frac{1}{n}\end{aligned}$$

e ciò è minore di ogni dato $\varepsilon > 0$ per m ed n sufficientemente grandi perché $(\widehat{x}_m)$ è di Cauchy. Quindi $(\widehat{z}_m)$ è di Cauchy. Poiché $T : X \to W$ è isometrica e $\widehat{z}_m \in W$ la successione (z_m) dove $z_m = T^{-1}\widehat{z}_m$ è di Cauchy in X. Sia $\widehat{x} \in \widehat{X}$ la classe a cui (z_m) appartiene. Mostriamo che $\widehat{x}$ è il limite di $(\widehat{x}_n)$. Per la (4)

$$\begin{aligned}\widehat{d}(\widehat{x}_n, \widehat{x}) &\leq \widehat{d}(\widehat{x}_n, \widehat{z}_n) + \widehat{d}(\widehat{z}_n, \widehat{x}) \\ &< \frac{1}{n} + \widehat{d}(\widehat{z}_n, \widehat{x}).\end{aligned} \tag{1.5}$$

Poiché $(z_n) \in \widehat{x}$ e $\widehat{z}_n \in W$, così che $(z_n, z_n, \cdots) \in \widehat{z}_n$, grazie alla definizione di distanza in $\widehat{X}$ data nella (1.3), la disuguaglianza (1.5) diviene

$$\widehat{d}(\widehat{x}_n, \widehat{x}) < \frac{1}{n} + \lim_{m\to\infty} d(z_n, z_m)$$

ed il membro a destra diviene più piccolo di un qualunque dato $\varepsilon > 0$ per n sufficientemente grandi. Quindi la successione arbitraria di Cauchy $(\widehat{x}_n)$ in $\widehat{X}$ ha il limite $\widehat{x} \in \widehat{X}$ e $\widehat{X}$ è completo.

(d) *Unicità di* $\widehat{X}$ *a meno di isometrie.* Sia $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ un altro spazio metrico completo con un sottospazio $\widetilde{W}$ denso in $\widetilde{X}$ e isometrico a X. Grazie alla proprietà transitiva della isometria W e $\widetilde{W}$ sono isometrici e si può utilizzare questa isometria per definire una applicazione biiettiva T di $\widehat{X}$ in $\widetilde{X}$. Precisamente per ogni $\widehat{x} \in \widehat{X}$ consideriamo una successione $(\widehat{x}_n)$ in

W tale che $\widehat{x}_n \to \widehat{x}$. Se $(\widetilde{x}_n)$ è la successione corrispondente nella isometria in $\widetilde{W}$ vi sarà un $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ tale che $\widetilde{x}_n \to \widetilde{x}$ e poniamo allora $T\widehat{x} = \widetilde{x}$.

Consideriamo ora una coppia $\widehat{x}, \widehat{y} \in \widehat{X}$ e la coppia corrispondente $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \widetilde{X}$ nell'applicazione T. Abbiamo

$$\widehat{d}(\widehat{x}, \widehat{y}) = \lim_{n\to\infty} \widehat{d}(\widehat{x}_n, \widehat{y}_n)$$

e

$$\widetilde{d}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{d}(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n)$$

dove le successioni appartengono rispettivamente a $\widetilde{W}$ e a W e sono definite come indicato sopra. Poiché W e $\widetilde{W}$ sono isometrici è $\widehat{d}(\widehat{x}_n, \widehat{y}_n) = \widetilde{d}(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n)$ e le distanze in $\widetilde{X}$ e $\widehat{X}$ sono le medesime. Quindi $\widetilde{X}$ e $\widehat{X}$ sono isometrici. ∎