

Capitolo 2

Spazi Normati. Spazi di Banach

Si ottengono degli spazi metrici particolarmente utili ed importanti se si considera uno spazio vettoriale e si definisce in esso una metrica a mezzo di una *norma*. Lo spazio risultante è chiamato *spazio normato*. Se uno spazio vettoriale normato è completo viene chiamato *spazio di Banach*. La teoria degli spazi normati, in particolare degli spazi di Banach, e la teoria degli operatori lineari definiti su di essi costituiscono la parte maggiormente sviluppata dell'analisi funzionale.

2.1 Spazio Vettoriale

2.1 DEFINIZIONE (SPAZIO VETTORIALE)

Uno spazio vettoriale (o spazio lineare) su un campo K è un insieme non vuoto X di elementi x, y, \dots (chiamati *vettori*) dotato di due operazioni algebriche. Queste operazioni sono chiamate *somma vettoriale* e *moltiplicazione di vettori per scalari*, cioè per elementi di K .

La **somma vettoriale** associa ad ogni coppia ordinata (x, y) di vettori un vettore $x + y$ chiamato la *somma* di x e y , in tal modo che siano soddisfatte le seguenti proprietà. La somma vettoriale è commutativa ed associativa, cioè per tutti i vettori si ha che

$$\begin{aligned}x + y &= y + x \\x + (y + z) &= (x + y) + z;\end{aligned}$$

inoltre esiste un vettore 0 , chiamato *vettore nullo*, e per ogni vettore x un vettore $-x$ tali che per tutti i vettori si ha che

$$\begin{aligned}x + 0 &= x \\x + (-x) &= 0.\end{aligned}$$

Cioè X rispetto alla somma vettoriale è un gruppo additivo abeliano.

La **moltiplicazione per scalari** associa ad ogni vettore x e scalare α un vettore αx (scritto anche $x\alpha$) chiamato il *prodotto* di α e x , in tal modo che per tutti i vettori x, y e scalari α, β si ha che

$$\begin{aligned}\alpha(\beta x) &= (\alpha\beta)x \\1x &= x\end{aligned}$$

e le leggi distributive

$$\begin{aligned}\alpha(x + y) &= \alpha x + \beta y \\ (\alpha + \beta)x &= \alpha x + \beta x.\end{aligned}$$

■

Dalla definizione vediamo che la somma vettoriale è un'applicazione $X \times X \rightarrow X$, mentre la moltiplicazione per scalari è un'applicazione $K \times X \rightarrow X$.

K è chiamato il **campo scalare** (o *campo dei coefficienti*) dello spazio vettoriale X , e X è chiamato uno **spazio vettoriale reale** se $K = \mathbb{R}$ (il campo dei numeri reali) ed uno **spazio vettoriale complesso** se $K = \mathbb{C}$ (il campo dei numeri complessi).

L'uso dello 0 sia per lo scalare 0 che per il vettore nullo non dovrebbe, in generale, creare confusione. Se fosse desiderabile per ragioni di chiarezza, si può indicare il vettore nullo con $\mathbf{0}$.

Il lettore può provare che per tutti i vettori e gli scalari

$$\begin{aligned}0x &= \mathbf{0} \\ \alpha\mathbf{0} &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

e

$$(-1)x = -x.$$

Un **sottospazio** di uno spazio vettoriale X è un sottoinsieme non vuoto Y di X tale che per ogni $y_1, y_2 \in Y$ e tutti gli scalari α, β si ha che $\alpha y_1 + \beta y_2 \in Y$. Quindi Y stesso è uno spazio vettoriale, le due operazioni algebriche essendo quelle indotte da X .

Uno speciale sottospazio di X è il *sottospazio improprio* $Y = X$. Ogni altro sottospazio di X ($\neq \{0\}$) è chiamato *proprio*.

Un altro sottospazio speciale di un qualunque spazio vettoriale X è $Y = \{0\}$.

Una **combinazione lineare** dei vettori x_1, \dots, x_m di uno spazio vettoriale X è un'espressione della forma

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m$$

dove i coefficienti $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ sono scalari qualunque.

Per ogni sottoinsieme non vuoto $M \subset X$ l'insieme di tutte le combinazioni lineari di vettori di M è chiamato l'involuppo o lo **span** di M e si scrive

$$\text{span } M.$$

Ovviamente è un sottospazio Y di M e diciamo che Y è **generato** da M .

Introduciamo ora due concetti fra di loro collegati che verranno usati molto spesso nel seguito.

2.2 DEFINIZIONE (INDIPENDENZA LINEARE, DIPENDENZA LINEARE)

L'indipendenza e la dipendenza lineare di un dato insieme M di vettori x_1, \dots, x_r ($r \geq 1$) in uno spazio vettoriale X sono definite a mezzo dell'equazione

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_r x_r = 0, \tag{2.1}$$

dove gli $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sono scalari. Chiaramente l'equazione (2.1) vale per $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0$. Se questa è la sola r -pla di scalari per cui la (2.1) è valida l'insieme M è detto *linearmente indipendente*. M è detto *linearmente dipendente* se M non è linearmente indipendente, cioè se (2.1) è anche valida per una r -pla di scalari non tutti zero.

Un sottoinsieme arbitrario M di X è detto *linearmente indipendente* se ogni sottoinsieme finito non vuoto di M è linearmente indipendente. M è detto *linearmente dipendente* se non è linearmente indipendente. ■

Una motivazione per questa terminologia proviene dal fatto che se $M = \{x_1, \dots, x_r\}$ è linearmente dipendente almeno un vettore di M può essere scritto come combinazione lineare degli altri; per esempio se (2.1) vale con un $\alpha_r \neq 0$ allora M è linearmente dipendente e possiamo risolvere (2.1) rispetto a x_r e ottenere

$$x_r = \beta_1 x_1 + \dots + \beta_{r-1} x_{r-1} \quad (\beta_j = -\alpha_j/\alpha_r).$$

Possiamo usare i concetti di dipendenza ed indipendenza lineare per definire la dimensione di uno spazio vettoriale.

2.3 DEFINIZIONE (BASE DI HAMEL)

Se X è uno spazio vettoriale qualunque e B è un sottoinsieme linearmente indipendente di X che genera X , allora B è chiamato una **base** (o **base di Hamel**) per X . ■

Uno spazio vettoriale X è detto *finito dimensionale* se ammette una base B di n vettori linearmente indipendenti. In questo caso è facile dimostrare che ogni altra base contiene n vettori indipendenti. n è perciò un numero caratteristico di X ed è chiamato la **dimensione** di X e si scrive $n = \dim X$. Per definizione $X = 0$ è finito dimensionale e $\dim X = 0$.

Se $\dim X = n$ una n -pla qualunque di vettori $\{e_1, \dots, e_n\}$ di X linearmente indipendenti costituisce una **base per** X (o una *base in* X) ed ogni $x \in X$ ha una rappresentazione unica come combinazione lineare di questi vettori, ossia

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n.$$

Se X non è finito dimensionale si dice *infinito dimensionale*.

Anche nel caso infinito dimensionale ogni $x \in X$ non nullo ha una rappresentazione unica come combinazione lineare di (in numero finito!) elementi di B con coefficienti scalari non tutti nulli.

Ogni spazio vettoriale $X \neq \{0\}$ ha una base di Hamel.

Per spazi vettoriali arbitrari infinito dimensionali la prova richiede l'uso del lemma di Zorn ed è rinviata a dopo che avremo introdotto questo lemma per altri propositi.

Menzioniamo il fatto che anche le basi di un dato spazio vettoriale X infinito dimensionale hanno lo stesso numero cardinale. Una prova richiederebbe alcuni strumenti piuttosto avanzati della teoria degli insiemi. Anche nel caso infinito dimensionale questo numero è chiamato la **dimensione** di X .

Più in là avremo bisogno del seguente semplice teorema.

2.4 Teorema (Dimensioni di un Sottospazio)

Sia X uno spazio vettoriale n -dimensionale. Allora ogni sottospazio proprio Y di X ha dimensioni minori di n . ■

Dimostrazione. Se $n = 0$ allora $X = \{0\}$ e non ha sottospazi propri. Sia ora $n > 0$. Chiaramente $\dim Y \leq \dim X = n$. Se $\dim Y$ fosse n allora Y avrebbe una base di n elementi, che sarebbe anche una base per X perché $\dim X = n$, così che $X = Y$. Ciò mostra che un qualunque insieme di vettori linearmente indipendenti in Y deve avere meno di n elementi e quindi $\dim Y < n$. ■

2.2 Spazio Normato. Spazio di Banach

In molti casi uno spazio vettoriale X può essere al medesimo tempo uno spazio metrico perché una metrica d è definita su X . Tuttavia se non v'è relazione fra la struttura algebrica e la metrica non possiamo aspettarci una teoria utile ed applicabile che combini entrambi i concetti. Per garantire una tale relazione fra gli aspetti “algebrici” e “geometrici” di X definiamo su X una metrica d in un modo speciale. Prima introduciamo un concetto ausiliario, quello di *norma*, che usa le operazioni algebriche dello spazio vettoriale. Poi utilizziamo la norma per ottenere una metrica d del tipo desiderato. Questa idea conduce al concetto di *spazio normato*.

2.5 DEFINIZIONE (SPAZIO NORMATO, SPAZIO DI BANACH)

Uno *spazio normato* X è uno spazio vettoriale dotato di una norma. Uno *spazio di Banach* è uno spazio normato completo (completo nella metrica definita dalla norma). La **norma** su un spazio vettoriale (reale o complesso) X è una funzione a valori reali su X il cui valore ad ogni $x \in X$ è indicato con

$$\|x\| \quad (\text{si legga “norma di } x\text{”})$$

ed ha le proprietà

$$(N1) \quad \|x\| \geq 0$$

$$(N2) \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$$

$$(N3) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

$$(N4) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{Disuguaglianza Triangolare});$$

dove x e y sono vettori arbitrari in X e α è uno scalare qualunque.

Una norma su X definisce una metrica d su X che è data da

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad (x, y \in X)$$

ed è chiamata la *metrica indotta dalla norma*. Lo spazio normato appena definito si indica con $(X, \|\cdot\|)$ o semplicemente con X . ■

2.6 Lemma (Invarianza per Traslazioni)

Una metrica d indotta da una norma in uno spazio normato X soddisfa a

$$\begin{aligned} d(x + a, y + a) &= d(x, y) \\ d(\alpha x, \alpha y) &= |\alpha| d(x, y) \end{aligned}$$

per tutti gli $x, y, a \in X$ ed ogni scalare α . ■

Dimostrazione. Abbiamo

$$d(x + a, y + a) = \|x + a - (y + a)\| = \|x - y\| = d(x, y)$$

e

$$d(\alpha x, \alpha y) = \|\alpha x - \alpha y\| = |\alpha| \|x - y\| = |\alpha| d(x, y). \quad \blacksquare$$

Convergenza di successioni e concetti collegati in uno spazio normato seguono facilmente dalle corrispondenti definizioni 1.7 e 1.9 per gli spazi metrici e dal fatto che ora $d(x, y) = \|x - y\|$.

- (i) Una successione (x_n) in uno spazio normato X è *convergente* se X contiene un x tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Allora scriviamo $x_n \rightarrow x$ e chiamiamo x il *limite* di (x_n) .

- (ii) Una successione (x_n) in uno spazio normato è di *Cauchy* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un N tale che

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon \quad \text{per tutti gli } m, n > N.$$

Le successioni erano disponibili anche in un generico spazio metrico. In uno spazio normato possiamo fare un passo avanti ed usare le serie.

Le **serie infinite** possono ora essere definite in un modo analogo a quello dell'analisi. Infatti se (x_k) è una successione in uno spazio normato X , possiamo associare a (x_k) la successione (s_n) di *somme parziali*

$$s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

dove $n = 1, 2, \dots$. Se (s_n) è convergente

$$s_n \rightarrow s \quad \text{cioè} \quad \|s_n - s\| \rightarrow 0$$

allora la *serie infinita* o, per brevità, la *serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

è detta *convergere* od *essere convergente*, s è chiamata la *somma* della serie e si scrive

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} x_k.$$

Se $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ converge la serie è detta **assolutamente convergente**. Tuttavia in uno spazio normato la assoluta convergenza implica la convergenza se e solo se X è completo.

Possiamo ora estendere il concetto di combinazione lineare al caso di una successione (x_n) e dire che x è combinazione lineare degli (x_n) con coefficienti la successione di scalari (α_n) se

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k.$$

Analogamente si estende il concetto di indipendenza lineare alle successioni dicendo che una successione (x_n) è linearmente indipendente se una qualunque sua combinazione lineare nulla, anche infinita, ha necessariamente coefficienti tutti nulli.

È quindi naturale utilizzare la struttura di spazio topologico che in uno spazio normato è aggiunta a quella di spazio vettoriale per dare una definizione di base, che è alternativa a quella di Hamel data sopra e che, per distinguerla da quella, chiameremo base senza ulteriori specificazioni.

2.7 DEFINIZIONE (BASE)

Sia M un sottoinsieme di uno spazio normato X (successione o famiglia di vettori). Allora M si dice una *base* di X se ogni elemento $x \in X$ si può esprimere come combinazione lineare, eventualmente infinita, di vettori di M con coefficienti univocamente determinati. ■

Si noti che ogni sottoinsieme finito o infinito numerabile di M è un insieme di vettori linearmente indipendenti, nel senso sopra detto, e che lo span di M in generale non copre X , ma è denso in X , ossia

$$\overline{\text{span } M} = X.$$

Grazie a questa definizione possiamo costruirci delle basi molto meno ricche in elementi delle basi di Hamel e quindi maggiormente maneggiabili e soprattutto possiamo associare in maniera univoca ad ogni elemento x le sue “componenti” secondo i vettori della base, in maniera analoga a quanto succede per gli spazi vettoriali finito dimensionali.

Se M è una successione (e_n) , allora (e_n) è chiamata una **base di Schauder** per X . In questo caso per ogni $x \in X$ v'è un'unica successione di scalari tali che

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k.$$

Se uno spazio normato X ha una base di Schauder allora è separabile. La dimostrazione è semplice e viene lasciata al lettore. Sorprendentemente l'inverso non è vero, cioè uno spazio di Banach separabile non ha necessariamente una base di Schauder.

Example 1. The real line R^1 becomes a normed linear space if we set $\|x\| = |x|$ for every number $x \in R^1$.

Example 2. To make real n -space R^n into a normed linear space, we set

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$$

for every element $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ in R^n . The formula

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}$$

then defines the same metric in R^n as already considered in Example 3, p. 38.

Example 3. We can also equip real n -space with the norm

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k| \quad (2)$$

or the norm

$$\|x\|_0 = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|. \quad (3)$$

The corresponding metrics lead to the spaces R_1^n and R_0^n considered in Examples 4 and 5, p. 39.

Example 4. The formula

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}$$

introduces a norm in complex n -space C^n . Other possible norms in C^n are given by (2) and (3).

Example 5. The space $C_{[a,b]}$ of all functions continuous on the interval $[a, b]$ can be equipped with the norm

$$\|f\| = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|.$$

The metric space corresponding to this norm has already been considered in Example 6, p. 39.

Example 1 ($L^\infty(\mathbb{R})$ and its subspaces) Let $L^\infty(\mathbb{R})$ be the set of (equivalence classes of) complex-valued measurable functions on \mathbb{R} such that $|f(x)| \leq M$ a.e. with respect to Lebesgue measure for some $M < \infty$ ($f \sim g$ means $f(x) = g(x)$ a.e.). Let $\|f\|_\infty$ be the smallest such M . It is an easy exercise (Problem 1) to

† A supplement to this section begins on p. 348.

show that $L^\infty(\mathbb{R})$ is a Banach space with norm $\|\cdot\|_\infty$. The bounded continuous functions $C(\mathbb{R})$ is a subspace of $L^\infty(\mathbb{R})$ and restricted to $C(\mathbb{R})$ the $\|\cdot\|_\infty$ -norm is just the usual supremum norm under which $C(\mathbb{R})$ is complete (since the uniform limit of continuous functions is continuous). Thus, $C(\mathbb{R})$ is a closed subspace of $L^\infty(\mathbb{R})$.

Consider the set $\kappa(\mathbb{R})$ of continuous functions with compact support, that is, the continuous functions that vanish outside of some closed interval. $\kappa(\mathbb{R})$ is a normed linear space under $\|\cdot\|_\infty$ but is not complete. The completion of $\kappa(\mathbb{R})$ is not all of $C(\mathbb{R})$; for example, if f is the function which is identically equal to one, then f cannot be approximated by a function in $\kappa(\mathbb{R})$ since $\|f - g\|_\infty \geq 1$ for all $g \in \kappa(\mathbb{R})$. The completion of $\kappa(\mathbb{R})$ is just $C_\infty(\mathbb{R})$, the continuous functions which approach zero at $\pm\infty$ (Problem 5). Some of the most powerful theorems in functional analysis (Riesz–Markov, Stone–Weierstrass) are generalizations of properties of $C(\mathbb{R})$ (see Sections IV.3 and IV.4).

Example 2 (L^p spaces) Let $\langle X, \mu \rangle$ be a measure space and $p \geq 1$. We denote by $L^p(X, d\mu)$ the set of equivalence classes of measurable functions which satisfy:

$$\|f\|_p \equiv \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} < \infty$$

Two functions are equivalent if they differ only on a set of measure zero. The following theorem collects many of the standard facts about L^p spaces.

Example 3 (sequence spaces) There is a nice class of spaces which is easy to describe and which we will often use to illustrate various concepts. In the following definitions,

$$a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

always denotes a sequence of complex numbers.

$$\ell_{\infty} = \left\{ a \mid \|a\|_{\infty} \equiv \sup_n |a_n| < \infty \right\}$$

$$c_0 = \left\{ a \mid \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \right\}$$

$$\ell_p = \left\{ a \mid \|a\|_p \equiv \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

$$s = \left\{ a \mid \lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n = 0 \text{ for all positive integers } p \right\}$$

$$f = \left\{ a \mid a_n = 0 \text{ for all but a finite number of } n \right\}$$

It is clear that as sets $f \subset s \subset \ell_p \subset c_0 \subset \ell_{\infty}$.

The spaces ℓ_{∞} and c_0 are Banach spaces with the $\|\cdot\|_{\infty}$ norm; ℓ_p is a Banach space with the $\|\cdot\|_p$ norm (note that this follows from Example 2 since $\ell_p = L^p(\mathbb{R}, d\mu)$ where μ is the measure with mass one at each positive integer and zero everywhere else). It will turn out that s is a Fréchet space (Section V.2). One of the reasons that these spaces are easy to handle is that f is dense in ℓ_p (in $\|\cdot\|_p$; $p < \infty$) and is dense in c_0 (in the $\|\cdot\|_{\infty}$ norm). Actually, the set of elements of f with only rational entries is also dense in ℓ_p and c_0 . Since this set is countable, ℓ_p and c_0 are separable. ℓ_{∞} is not separable (Problem 2).

Example 9. Next consider the set of all *bounded* infinite sequences of real numbers $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots)$, and let³

$$\rho(x, y) = \sup_k |x_k - y_k|. \quad (12)$$

This gives a metric space which we denote by m . The fact that (12) has the three properties of a metric is almost obvious.

Example 10. As in Example 3, consider the set of all ordered n -tuples $x = (x_1, \dots, x_n)$ of real numbers, but this time define the distance by the more general formula

$$\rho_p(x, y) = \left(\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^p \right)^{1/p}, \quad (13)$$

where p is a fixed number ≥ 1 (Examples 3 and 4 correspond to the cases $p = 2$ and $p = 1$, respectively). This gives a metric space, which we denote by R_p^n . It is obvious that $\rho_p(x, y) = 0$ if and only if $x = y$ and that $\rho_p(x, y) = \rho_p(y, x)$, but verification of the triangle inequality for the metric (13) requires a little work. Let

$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad y = (y_1, \dots, y_n), \quad z = (z_1, \dots, z_n)$$

be three points in R_p^n , and let

$$a_k = x_k - y_k, \quad b_k = y_k - z_k \quad (k = 1, \dots, n),$$

just as in Example 3. Then the triangle inequality

$$\rho_p(x, z) \leq \rho_p(x, y) + \rho_p(y, z)$$

takes the form of *Minkowski's inequality*

$$\left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p \right)^{1/p}. \quad (14)$$

The inequality is obvious for $p = 1$, and hence we can confine ourselves to the case $p > 1$.

The proof of (14) for $p > 1$ is in turn based on *Hölder's inequality*

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{1/q}, \quad (15)$$

where the numbers $p > 1$ and $q > 1$ satisfy the condition

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad (16)$$

³ The least upper bound or supremum of a sequence of real numbers $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ is denoted by $\sup_k a_k$.

We begin by observing that the inequality (15) is *homogeneous*, i.e., if it holds for two points (a_1, \dots, a_n) and (b_1, \dots, b_n) , then it holds for any two points $(\lambda a_1, \dots, \lambda a_n)$ and $(\mu b_1, \dots, \mu b_n)$ where λ and μ are arbitrary real numbers. Therefore we need only prove (15) for the case

$$\sum_{k=1}^n |a_k|^p = \sum_{k=1}^n |b_k|^p = 1. \quad (17)$$

Thus, assuming that (17) holds, we now prove that

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| < 1. \quad (18)$$

Consider the two areas S_1 and S_2 shown in Figure 8, associated with the curve in the $\xi\eta$ -plane defined by the equation

$$\eta = \xi^{p-1},$$

or equivalently by the equation

$$\xi = \eta^{q-1}.$$

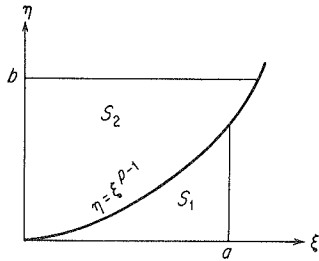


FIGURE 8

Then clearly

$$S_1 = \int_0^a \xi^{p-1} d\xi = \frac{a^p}{p}, \quad S_2 = \int_0^b \eta^{q-1} d\eta = \frac{b^q}{q}.$$

Moreover, it is apparent from the figure that

$$S_1 + S_2 \geq ab$$

for arbitrary positive a and b . It follows that

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \quad (19)$$

Setting $a = |a_k|$, $b = |b_k|$, summing over k from 1 to n , and taking account of (16) and (17), we get the desired inequality (18). This proves Hölder's inequality (15). Note that (15) reduces to Schwarz's inequality if $p = 2$.

It is now an easy matter to prove Minkowski's inequality (14), starting from the identity

$$(|a| + |b|)^p = (|a| + |b|)^{p-1} |a| + (|a| + |b|)^{p-1} |b|.$$

In fact, setting $a = a_k$, $b = b_k$ and summing over k from 1 to n , we obtain

$$\sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^p = \sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^{p-1} |a_k| + \sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^{p-1} |b_k|.$$

Next we apply Hölder's inequality (15) to both sums on the right, bearing

in mind that $(p-1)q = p$:

$$\sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^p \leq \left(\sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^p \right)^{1/q} \left(\left[\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right]^{1/p} + \left[\sum_{k=1}^n |b_k|^p \right]^{1/p} \right)$$

Dividing both sides of this inequality by

$$\left(\sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^p \right)^{1/q},$$

we get

$$\left(\sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p \right)^{1/p},$$

which immediately implies (14), thereby proving the triangle inequality in R_p^n .

Example 11. Finally let l_p be the set of all infinite sequences

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots)$$

of real numbers satisfying the convergence condition

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^p < \infty$$

for some fixed number $p \geq 1$, where distance between points is defined by

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p \right)^{1/p} \quad (20)$$

(the case $p = 2$ has already been considered in Example 7). It follows from Minkowski's inequality (14) that

$$\left(\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p \right)^{1/p} \quad (21)$$

for any n . Since the series

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p$$

converge, by hypothesis, we can take the limit as $n \rightarrow \infty$ in (21), obtaining

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

This shows that (20) actually makes sense for arbitrary $x, y \in l_p$. At the same time, we have verified that the triangle inequality holds in l_p (the other two properties of a metric are obviously satisfied). Therefore l_p is a metric space.

Remark. If $R = (X, \rho)$ is a metric space and M is any subset of X , then obviously $R^* = (M, \rho)$ is again a metric space, called a *subspace* of the

2.3 Ulteriori Proprietà degli Spazi Normati

Per definizione un **sottospazio** Y di uno spazio normato X è un sottospazio di X considerato come uno spazio vettoriale con una norma ottenuta restringendo la norma su X ad Y . Questa norma su Y è detta *indotta* dalla norma su X . Se Y è chiuso in X allora Y è chiamato un **sottospazio chiuso** di X .

Per definizione un **sottospazio** Y di uno spazio di Banach X è un sottospazio di X considerato come uno spazio normato. Quindi *non* richiediamo che Y sia completo.

A questo riguardo è utile il Teorema 1.13 perché fornisce immediatamente il seguente teorema.

2.8 Teorema (Sottospazio di uno Spazio di Banach)

Un sottospazio Y di uno spazio di Banach X è completo se e solo se l'insieme Y è chiuso in X . ■

Consideriamo ora il problema di completare uno spazio normato.

2.9 Teorema (Completamento)

Sia $X = (X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato. Allora esiste uno spazio di Banach \widehat{X} ed una isometria A da X su un sottospazio W di \widehat{X} che è denso in \widehat{X} . Lo spazio \widehat{X} è unico a meno di isometrie. ■

Dimostrazione. Il teorema 1.17 implica l'esistenza di uno spazio metrico completo $\widehat{X} = (\widehat{X}, \widehat{d})$ e di una isometria $A : X \rightarrow W = A(X)$ dove W è denso in \widehat{X} ed \widehat{X} è unico a meno di isometrie. Conseguentemente per provare il teorema dobbiamo fare di \widehat{X} uno spazio vettoriale ed introdurre in esso una norma conveniente.

Per definire su \widehat{X} le due operazioni algebriche di uno spazio vettoriale consideriamo due qualunque $\widehat{x}, \widehat{y} \in \widehat{X}$ e due loro rappresentanti qualunque $(x_n) \in \widehat{x}$ e $(y_n) \in \widehat{y}$. Si ricordi che \widehat{x} e \widehat{y} sono classi di equivalenza di successioni di Cauchy in X . Poniamo $z_n = x_n + y_n$. Allora (z_n) è di Cauchy in X perché

$$\|z_n - z_m\| = \|x_n + y_n - (x_m + y_m)\| \leq \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\|.$$

Definiamo la somma $\widehat{z} = \widehat{x} + \widehat{y}$ di \widehat{x} e \widehat{y} come la classe di equivalenza di cui (z_n) è il rappresentante; così $(z_n) \in \widehat{z}$. Questa definizione è indipendente dalla particolare scelta delle successioni di Cauchy appartenenti a \widehat{x} e a \widehat{y} . Infatti la definizione di equivalenza fra successioni di Cauchy introdotta nella sezione 1.3 mostra che se $(x_n) \sim (x'_n)$ e $(y_n) \sim (y'_n)$ allora $(x_n + y_n) \sim (x'_n + y'_n)$ perché

$$\|x_n + y_n - (x'_n + y'_n)\| \leq \|x_n - x'_n\| + \|y_n - y'_n\|.$$

Analogamente definiamo il prodotto $\alpha\widehat{x} \in \widehat{X}$ di uno scalare α e di un elemento \widehat{x} come la classe di equivalenza di cui (αx_n) è un rappresentante. Nuovamente la definizione è indipendente dalla particolare scelta del rappresentante di \widehat{x} . L'elemento zero di \widehat{X} è la classe di equivalenza di tutte le successioni di Cauchy che convergono a zero. Non è difficile verificare che queste due operazioni algebriche hanno tutte le proprietà richieste dalla definizione, così che \widehat{X} è uno spazio vettoriale. Dalla definizione segue che su W le operazioni di spazio vettoriale indotte da \widehat{X} coincidono con quelle indotte da X a mezzo di A .

Definiamo su \widehat{X} la norma ponendo $\|\widehat{x}\|_1 = \widehat{d}(0, \widehat{x})$ per ogni $\widehat{x} \in \widehat{X}$. È ovvio che $\|\cdot\|_1$ soddisfa (N1) e (N2). Gli altri due assiomi (N3) e (N4) seguono da quelli per $\|\cdot\|$ con un processo di limite. Infatti per verificare (N3) è sufficiente notare che, se (x_n) è un rappresentante della classe d'equivalenza che definisce \widehat{x} e se \widehat{x}_n è il corrispondente di x_n nell'isometria A di X su W , abbiamo

$$\widehat{x}_n \rightarrow \widehat{x}, \quad \alpha\widehat{x}_n \rightarrow \alpha\widehat{x}$$

e quindi per la continuità della distanza

$$\|\widehat{x}\|_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{d}(0, \widehat{x}_n), \quad \|\alpha\widehat{x}\|_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{d}(0, \alpha\widehat{x}_n).$$

Grazie all'isometria A di X su W ed al fatto che (N3) è soddisfatto in X si ottiene

$$\|\alpha\widehat{x}\|_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{d}(0, \alpha\widehat{x}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(0, \alpha x_n) = |\alpha| \lim_{n \rightarrow \infty} d(0, x_n) = |\alpha| \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{d}(0, \widehat{x}_n)$$

cioè $\|\alpha\widehat{x}\|_1 = |\alpha|\|\widehat{x}\|_1$. Analoga dimostrazione si può fare per verificare (N4). ■

2.4 Spazi Normati Finito Dimensionali e Sottospazi

Rozzamente parlando il seguente lemma stabilisce che nel caso di vettori linearmente indipendenti non è possibile trovare una combinazione lineare che coinvolge grandi scalari ed al medesimo tempo rappresenta un piccolo vettore.

2.10 Lemma (Combinazione Lineare)

Sia $\{x_1, \dots, x_n\}$ un insieme di vettori linearmente indipendenti in uno spazio normato X (di dimensioni qualunque). Allora esiste un numero $c > 0$ tale che per ogni scelta degli scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ abbiamo che

$$\|\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|) \quad (c > 0). \quad (2.2)$$

Dimostrazione. Scriviamo $s = |\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|$. Se $s = 0$ tutti gli $|\alpha_i|$ sono zero e allora la (2.2) è soddisfatta per ogni c . Sia $s > 0$. Allora la (2.2) è equivalente alla disuguaglianza che

si ottiene dalla (2.2) dividendo per s e scrivendo $\beta_j = \alpha_j/s$, cioè

$$\|\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n\| \geq c \quad \left(\sum_{j=1}^n |\beta_j| = 1 \right). \quad (2.3)$$

È quindi sufficiente provare l'esistenza di un $c > 0$ tale che la (2.3) vale per ogni n -pla di scalari β_1, \dots, β_n con $\sum_{j=1}^n |\beta_j| = 1$.

Supponiamo che ciò sia falso. Ossia supponiamo che per ogni $c > 0$ esista una n -pla di scalari β_1, \dots, β_n con $\sum_{j=1}^n |\beta_j| = 1$ tali che $\|\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n\| < c$. In corrispondenza della successione $c = 1/m$ esiste allora una successione (y_m) di vettori

$$y_m = \beta_1^{(m)} x_1 + \cdots + \beta_n^{(m)} x_n \quad \left(\sum_{j=1}^n |\beta_j^{(m)}| = 1 \right)$$

tali che

$$\|y_m\| < \frac{1}{m}$$

e quindi tali che

$$y_m \rightarrow 0 \quad \text{come } m \rightarrow \infty.$$

Ora ragioniamo come segue. Poiché $\sum_{j=1}^n |\beta_j^{(m)}| = 1$ abbiamo che $|\beta_j^{(m)}| \leq 1$. Quindi per ogni fisso j la successione

$$\left(\beta_j^{(m)} \right) = \left(\beta_j^{(1)}, \beta_j^{(2)}, \dots \right)$$

è limitata. Di conseguenza per il teorema di Bolzano–Weierstrass $(\beta_1^{(m)})$ ammette una successione estratta $(\beta_1^{(1,m)})$ convergente. Sia γ_1 il limite di questa successione estratta e sia

$$y_{1,m} = \sum_{j=1}^n \beta_j^{(1,m)} x_j$$

la corrispondente successione estratta di (y_m) . Per il medesimo argomento $(y_{1,m})$ ammette una successione estratta

$$y_{2,m} = \sum_{j=1}^n \beta_j^{(2,m)} x_j$$

per cui la corrispondente successione estratta di scalari $(\beta_2^{(2,m)})$ converge; sia γ_2 il limite. Si noti che la successione $(\beta_1^{(2,m)})$ essendo estratta di una successione convergente converge ancora a γ_1 . Continuando in questo modo dopo n passi si ottiene una successione estratta $(y_{n,m}) = (y_{n,1}, y_{n,2}, \dots)$ di (y_m) i cui termini sono della forma

$$y_{n,m} = \sum_{j=1}^n \beta_j^{(n,m)} x_j \quad \left(\sum_{j=1}^n |\beta_j^{(n,m)}| = 1 \right)$$

con scalari $\beta_j^{(n,m)}$ che soddisfano il limite $\beta_j^{(n,m)} \rightarrow \gamma_j$ per $m \rightarrow \infty$. Usando allora gli n limiti $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ definiamo

$$y = \gamma_1 x_1 + \cdots + \gamma_n x_n.$$

e poiché

$$\|y_{n,m} - y\| = \left\| \sum_{j=1}^n (\beta_j^{(n,m)} - \gamma_j) x_j \right\| \leq \sum_{j=1}^n |\beta_j^{(n,m)} - \gamma_j| \|x_j\|$$

per $m \rightarrow \infty$

$$y_{n,m} \rightarrow y = \sum_{j=1}^n \beta_j x_j.$$

Essendo $\sum |\beta_j| = 1$ non tutti i β_j possono essere zero ed essendo $\{x_1, \dots, x_n\}$ un insieme linearmente indipendente abbiamo che $y \neq 0$. D'altro lato poiché $(y_{n,m})$ è una successione estratta di (y_m) che converge a zero dobbiamo avere $y_{n,m} \rightarrow 0$ così che $y = 0$. Ciò contraddice $y \neq 0$ ed il lemma è provato. ■

Come prima applicazione del lemma proviamo il seguente teorema basilare.

2.11 Teorema (Completezza)

Ogni sottospazio finito dimensionale Y di uno spazio normato X è completo. In particolare ogni spazio normato finito dimensionale è completo. ■

Dimostrazione. Consideriamo un'arbitraria successione di Cauchy (y_m) in Y e vogliamo dimostrare che ammette limite y con $y \in Y$. Sia $\dim Y = n$ e $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base qualunque di Y . Allora ciascun y_m ha un'unica rappresentazione della forma

$$y_m = \alpha_1^{(m)} e_1 + \dots + \alpha_n^{(m)} e_n.$$

Poiché (y_m) è una successione di Cauchy, per ogni $\varepsilon > 0$ v'è un N tale che $\|y_m - y_r\| < \varepsilon$ quando $m, r > N$. Da ciò e dal Lemma 2.10 abbiamo che per qualche $c > 0$

$$\varepsilon > \|y_m - y_r\| = \left\| \sum_{j=1}^n (\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}) e_j \right\| \geq c \sum_{j=1}^n |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}|,$$

dove $m, r > N$. Dividendo per c si ottiene

$$|\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}| \leq \sum_{j=1}^n |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}| < \frac{\varepsilon}{c} \quad (m, r > N).$$

Ciò mostra che ciascuna delle n successioni

$$(\alpha_j^{(m)}) = (\alpha_j^{(1)}, \alpha_j^{(2)}, \dots) \quad j = 1, \dots, n$$

è di Cauchy in \mathbb{R} o in \mathbb{C} . Quindi converge; sia α_j il limite. Usando allora gli n limiti $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ definiamo

$$y = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n.$$

Chiaramente $y \in Y$. Inoltre

$$\|y_m - y\| = \left\| \sum_{j=1}^n (\alpha_j^{(m)} - \alpha_j) e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^n |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j| \|e_j\|.$$

A destra $\alpha_j^{(m)} \rightarrow \alpha_j$. Quindi $\|y_m - y\| \rightarrow 0$, cioè $y_m \rightarrow y$. Ciò mostra che (y_m) è convergente in Y . Poiché (y_m) era una successione di Cauchy in Y , ciò prova che Y è completo. ■

Da questo teorema e dal Teorema 1.12 si deriva il seguente teorema.

2.12 Teorema (Chiusura)

Ogni sottospazio finito dimensionale Y di uno spazio normato X è chiuso in X . ■

Avremo bisogno di questo teorema in numerose occasioni nel seguito.

Un'altra proprietà interessante di uno spazio vettoriale finito dimensionale X è che tutte le norme su X portano alla medesima topologia per X , cioè gli insiemi aperti sono gli stessi, a prescindere dalla particolare scelta della norma in X . I dettagli sono i seguenti.

2.13 DEFINIZIONE (NORME EQUIVALENTI)

Una norma $\|\cdot\|_1$ su uno spazio vettoriale X è detta *equivalente* alla norma $\|\cdot\|_2$ su X se esistono dei numeri positivi a e b tali che per ogni $x \in X$ si ha

$$a\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq b\|x\|_2. \quad (2.4)$$

Questo concetto è motivato dal seguente fatto.

Norme equivalenti su X definiscono la medesima topologia per X .

Infatti ciò segue dalla (2.4) e dal fatto che ogni intorno di un punto x secondo la norma $\|\cdot\|_1$ è intorno anche secondo la norma $\|\cdot\|_2$ e viceversa. Lasciamo i dettagli di una prova formale al lettore, che può anche mostrare che le successioni di Cauchy in $(X, \|\cdot\|_1)$ e $(X, \|\cdot\|_2)$ sono le stesse.

Usando il Lemma 2.10 possiamo ora provare il seguente teorema (che *non* vale per gli spazi infinito dimensionali).

2.14 Teorema (Norme Equivalenti)

Su uno spazio vettoriale finito dimensionale X ogni norma $\|\cdot\|_1$ è equivalente a qualsiasi altra norma $\|\cdot\|_2$. ■

Dimostrazione. Sia $\dim X = n$ e $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base qualunque di X . Allora ogni $x \in X$ ha un'unica rappresentazione

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n.$$

Per il Lemma 2.10 esiste una costante positiva c tale che

$$\|x\|_1 \geq c(|\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|).$$

D'altra parte la disuguaglianza triangolare dà

$$\|x\|_2 \leq \sum_{j=1}^n |\alpha_j| \|e_j\|_2 \leq k \sum_{j=1}^n |\alpha_j| \quad k = \max_j \|e_j\|_2.$$

Assieme danno $a\|x\|_2 \leq \|x\|_1$ dove $a = c/k > 0$. L'altra disuguaglianza in (2.4) si ottiene scambiando il ruolo di $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ nelle considerazioni precedenti. ■

Questo teorema ha una notevole importanza pratica. Ad esempio implica che la convergenza o la divergenza di una successione in uno spazio vettoriale finito dimensionale non dipende dalla particolare scelta della norma su questo spazio.

2.5 Compattezza e Dimensioni Finite

Alcune altre proprietà basilari degli spazi normati finito dimensionali e dei loro sottospazi sono legate al concetto di compattezza. Quest'ultima si definisce come segue.

2.15 DEFINIZIONE (COMPATTEZZA)

Uno spazio metrico X è detto *compatto*¹ se ogni successione in X ha una successione estratta convergente. Un sottoinsieme M di X è detto *compatto* se M è compatto considerato come sottospazio di X , cioè se ogni successione in M ha una successione estratta convergente ad un limite che è un elemento di M . ■

Una proprietà generale degli insiemi compatti è espressa nel seguente Lemma.

2.16 Lemma (Compattezza)

Un sottoinsieme compatto M di uno spazio metrico X è chiuso e limitato. ■

Dimostrazione. Per ogni $x \in \overline{M}$ v'è una successione (x_n) in M tale che $x_n \rightarrow x$; cf. 1.12(a). Poiché M è compatto $x \in M$. Quindi M è chiuso perché $x \in \overline{M}$ era arbitrario. Proviamo che M è limitato. Si noti che se $\sup_{x,y \in M} d(x,y) = \infty$ è anche $\sup_{x \in M} d(x,b) = \infty$ per un qualunque b fisso appartenente a X . Infatti se così non fosse avremmo $\sup d(x,y) \leq \sup d(x,b) + \sup d(b,y) < \infty$ che non è possibile. Quindi se M fosse non limitato conterrebbe una successione (y_n) tale che $d(y_n,b) > n$ e quindi tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} d(y_n,b) = \infty$. Questa successione non potrebbe avere una successione estratta convergente perché allora $d(y_n,b)$ ammetterebbe una successione estratta convergente, ciò che è impossibile perché è divergente. ■

L'inverso di questo lemma è in generale falso.

Dimostrazione. Per provare questo importante fatto consideriamo la successione (e_n) in l^2 , dove $e_n = (\delta_{nj})$ ha l' n -mo termine 1 e tutti gli altri termini 0. Questa successione è limitata perché $\|e_n\| = 1$. Poiché è $\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$ per ogni n e m ($n \neq m$), la successione non ha punti di accumulazione. Quindi i suoi termini costituiscono un insieme di punti che è chiuso perché non ha punti di accumulazione. Per la medesima ragione questo insieme non è compatto. ■

Tuttavia per uno spazio normato finito dimensionale abbiamo il seguente Teorema.

2.17 Teorema (Compattezza)

In uno spazio normato finito dimensionale X un qualsiasi sottoinsieme $M \subset X$ è compatto se e solo se M è chiuso e limitato. ■

Dimostrazione. La compattezza implica la chiusura e la limitatezza per il Lemma 2.16. Proviamo l'inverso. Sia M chiuso e limitato. Sia $\dim X = n$ e $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base per X . Consideriamo una qualunque successione (x_m) in M . Ciascun x_m ha una rappresentazione

$$x_m = \xi_1^{(m)} e_1 + \dots + \xi_n^{(m)} e_n.$$

Poiché M è limitato lo è anche (x_m) , cioè $\|x_m\| \leq k$ per tutti gli m . Per il Lemma 2.10

$$k \geq \|x_m\| = \left\| \sum_{j=1}^n \xi_j^{(m)} e_j \right\| \geq c \sum_{j=1}^n |\xi_j^{(m)}|$$

dove $c > 0$. Quindi la successione di numeri $(\xi_j^{(m)})$ (j fisso) è limitata e, per il teorema di Bolzano–Weierstrass, ha un punto di accumulazione ξ_j ; qui $1 \leq j \leq n$. Come nella prova del Lemma 2.10 concludiamo che (x_m) ha una successione estratta (z_m) che converge a $z = \sum \xi_j e_j$. Poiché M è chiuso $z \in M$. Ciò mostra che la successione arbitraria (x_m) in M ha una successione estratta che converge in M . Quindi M è compatto. ■

¹Più precisamente sequenzialmente compatto; questo è il tipo più importante di compattezza in analisi. Menzioniamo che ci sono due altri tipi di compattezza, ma per gli spazi metrici i tre concetti divengono identici.

La nostra discussione mostra il seguente. In \mathbb{R}^n (o in ogni altro spazio normato finito dimensionale) i sottoinsiemi compatti sono precisamente i sottoinsiemi chiusi e limitati, così che questa proprietà (chiusura e limitatezza) può essere usata per *definire* la compattezza. Tuttavia questo non può più essere fatto nel caso degli spazi normati infinito dimensionali.

Una sorgente di altri risultati interessanti è il seguente lemma di F. Riesz.

2.18 Lemma (F. Riesz)

Siano Y e Z sottospazi di uno spazio normato X (di una dimensione qualunque) e supponiamo che Y sia chiuso e sia un sottospazio proprio di Z . Allora per ogni numero reale θ nell'intervallo $(0, 1)$ v'è un $z \in Z$ tale che

$$\|z\| = 1, \quad \|z - y\| \geq \theta \text{ per ogni } y \in Y. \quad \blacksquare$$

Dimostrazione. Consideriamo un qualsiasi $v \in Z - Y$ ed indichiamo la sua distanza da Y con a , cioè

$$a = \inf_{y \in Y} \|v - y\|. \quad (2.5)$$

Chiaramente $a > 0$ perché Y è chiuso. Prendiamo ora un qualunque $\theta \in (0, 1)$. Per la definizione di estremo inferiore v'è un $y_0 \in Y$ tale che

$$a \leq \|v - y_0\| \leq \frac{a}{\theta} \quad (2.6)$$

(si noti che $a/\theta > a$ perché $0 < \theta < 1$). Sia

$$z = c(v - y_0) \quad \text{dove} \quad c = \frac{1}{\|v - y_0\|}.$$

Allora $\|z\| = 1$ e mostriamo che $\|z - y\| \geq \theta$ per ogni $y \in Y$. Abbiamo che

$$\begin{aligned} \|z - y\| &= \|c(v - y_0) - y\| \\ &= c\|v - y_0 - c^{-1}y\| \\ &= c\|v - y_1\| \end{aligned}$$

dove

$$y_1 = y_0 + c^{-1}y.$$

La forma di y_1 mostra che $y_1 \in Y$. Quindi $\|v - y_1\| \geq a$ per definizione di a . Usando (2.5) e (2.6) otteniamo

$$\|z - y\| = c\|v - y_1\| \geq ca = \frac{a}{\|v - y_0\|} \geq \frac{a}{a/\theta} = \theta.$$

Poiché $y \in Y$ era arbitrario ciò completa la prova. \blacksquare

2.19 Teorema (Dimensioni Finite)

Se uno spazio normato X ha la proprietà che la palla chiusa unitaria $M = \{x : \|x\| \leq 1\}$ è compatta allora X è finito dimensionale. \blacksquare

Dimostrazione. Assumiamo che M sia compatto ma che $\dim X = \infty$ e mostriamo che ciò porta ad una contraddizione. Scegliamo un qualunque x_1 di norma 1. Questo x_1 genera uno sottospazio unidimensionale X_1 di X , che è chiuso (cf. 2.12) ed è un sottospazio proprio di X perché $\dim X = \infty$. Per il lemma di Riesz v'è un $x_2 \in X$ di norma 1 tale che

$$\|x_2 - x_1\| \geq \theta = \frac{1}{2}.$$

Gli elementi x_1, x_2 generano un sottospazio X_2 bidimensionale proprio e chiuso di X . Per il lemma di Riesz v'è un x_3 di norma 1 tale che per tutti gli $x \in X_2$ abbiamo che

$$\|x_3 - x\| \geq \frac{1}{2}.$$

In particolare

$$\|x_3 - x_1\| \geq \frac{1}{2},$$

$$\|x_3 - x_2\| \geq \frac{1}{2}.$$

Procedendo per induzione otteniamo una successione (x_n) di elementi $x_n \in M$ tali che

$$\|x_m - x_n\| \geq \frac{1}{2} \quad (m \neq n).$$

Ovviamente (x_n) non può avere una successione estratta convergente. Ciò contraddice la compattezza di M . Quindi la nostra assunzione $\dim X = \infty$ è falsa e $\dim X < \infty$. ■

Questo teorema ha varie applicazioni. Lo utilizzeremo come uno strumento basilare in connessione con i cosiddetti operatori compatti.

Gli insiemi compatti sono importanti perché hanno un “buon comportamento”; essi ammettono numerose proprietà basilari simili a quelle degli insiemi finiti e che non sono soddisfatte dagli insiemi non compatti. In connessione con le applicazioni continue una proprietà fondamentale è che gli insiemi compatti hanno immagini compatte.

2.20 Teorema (Applicazioni Continue)

Siano X e Y spazi metrici e $T : X \rightarrow Y$ un'applicazione continua. Allora l'immagine di un sottoinsieme compatto M di X sotto T è compatto. ■

Dimostrazione. Per la definizione di compattezza è sufficiente mostrare che ogni successione (y_n) nell'immagine $T(M) \subset Y$ contiene una successione estratta che converge in $T(M)$. Poiché $y_n \in T(M)$ abbiamo che $y_n = Tx_n$ per qualche $x_n \in M$. Poiché M è compatto (x_n) contiene una successione estratta (x_{n_k}) che converge in M . L'immagine di (x_{n_k}) è una successione estratta di (y_n) che converge in $T(M)$ per l'1.14 perché T è continua. Quindi $T(M)$ è compatto. ■

Da questo teorema concludiamo che la seguente proprietà, ben nota dall'analisi per le funzioni continue, si estende agli spazi metrici.

2.21 Corollario (Massimo e Minimo)

Un'applicazione continua T di un sottoinsieme M compatto di uno spazio metrico X in \mathbb{R} assume un massimo ed un minimo in qualche punto di M . ■

Dimostrazione. $T(M) \subset \mathbb{R}$ è compatto per il Teorema 2.20 ed è chiuso e limitato per il Lemma 2.16 [applicato a $T(M)$], così che $\inf T(M) \in T(M)$, $\sup T(M) \in T(M)$ e le immagini inverse di questi due punti consistono dei punti di M in cui Tx è, rispettivamente, minimo e massimo. ■

2.6 Operatori Lineari

Nel caso degli spazi vettoriali ed in particolare degli spazi normati un'applicazione è chiamata un **operatore**.

Di speciale interesse sono gli operatori che “conservano” le due operazioni algebriche degli spazi vettoriali, nel senso della seguente definizione.

2.22 DEFINIZIONE (OPERATORI LINEARI)

Se X e Y sono due spazi vettoriali sul medesimo campo K , si dice *operatore lineare* T un'applicazione $T : X \rightarrow Y$ tale che per tutti gli $x, y \in X$ e scalari α

$$\begin{aligned} T(x + y) &= Tx + Ty \\ T(\alpha x) &= \alpha Tx. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Si osservi la notazione Tx invece di $T(x)$; questa semplificazione è standard in analisi funzionale.

Nel caso in cui lo spazio vettoriale X sia un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale più ampio lo si indica con $\mathcal{D}(T)$ e si chiama **dominio** di T . L'**immagine** di T , ossia $T(X)$, si indica con $\mathcal{R}(T)$. Lo **spazio nullo** di T è l'insieme di tutti gli $x \in X$ tali che $Tx = 0$ e si indica con $\mathcal{N}(T)$. Un'altra denominazione per lo spazio nullo è "kernel". Non adoteremo questo termine perché dobbiamo riservarlo ad un altro scopo nella teoria delle equazioni integrali.

Chiaramente (2.7) è equivalente a

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty. \tag{2.8}$$

Prendendo $\alpha = 0$ in (2.7) otteniamo la seguente formula di cui avremo bisogno molte volte nel seguito

$$T0 = 0. \tag{2.9}$$

2.23 DEFINIZIONE (OPERATORE IDENTITÀ)

L'*operatore identità* $I_X : X \rightarrow X$ è definito da $I_X x = x$ per tutti gli $x \in X$. Scriviamo anche semplicemente I per I_X ; così $Ix = x$. ■

2.24 DEFINIZIONE (OPERATORE ZERO)

L'*operatore zero* $0 : X \rightarrow Y$ è definito da $0x = 0$ per tutti gli $x \in X$. ■

2.25 Teorema (Immagine e Spazio Nullo)

Sia T un operatore lineare. Allora

- (a) *L'immagine $\mathcal{R}(T)$ è uno spazio vettoriale.*
- (b) *Se $\dim X = n < \infty$, allora $\dim \mathcal{R}(T) \leq n$.*
- (c) *Lo spazio nullo $\mathcal{N}(T)$ è uno spazio vettoriale.* ■

Dimostrazione. (a) Prendiamo due qualunque $y_1, y_2 \in \mathcal{R}(T)$ e mostriamo che $\alpha y_1 + \beta y_2 \in \mathcal{R}(T)$ per due scalari qualunque α e β . Poiché $y_1, y_2 \in \mathcal{R}(T)$ abbiamo che $y_1 = Tx_1$ e $y_2 = Tx_2$ per qualche $x_1, x_2 \in X$. Anche $\alpha x_1 + \beta x_2 \in X$ perché X è uno spazio vettoriale. La linearità di T dà

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Tx_1 + \beta Tx_2 = \alpha y_1 + \beta y_2.$$

Quindi $\alpha y_1 + \beta y_2 \in \mathcal{R}(T)$. Poiché $y_1, y_2 \in \mathcal{R}(T)$ erano arbitrari e così lo erano gli scalari ciò prova che $\mathcal{R}(T)$ è uno spazio vettoriale.

(b) Scegliamo $n + 1$ elementi y_1, \dots, y_{n+1} di $\mathcal{R}(T)$ in una maniera arbitraria. Allora abbiamo $y_1 = Tx_1, \dots, y_{n+1} = Tx_{n+1}$ per qualche x_1, \dots, x_{n+1} in X . Poiché $\dim X = n$ questo insieme $\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ deve essere linearmente dipendente. Quindi

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n+1} x_{n+1} = 0$$

per degli scalari non tutti nulli. Poiché T è lineare e $T0 = 0$ applicando T ad entrambi i membri si ottiene

$$T(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1}) = \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_{n+1} y_{n+1} = 0.$$

Ciò mostra che l'insieme $\{y_1, \dots, y_{n+1}\}$ è linearmente dipendente perché gli α_j non sono tutti nulli. Ricordando che questo sottoinsieme di $\mathcal{R}(T)$ era stato scelto in una maniera arbitraria ne concludiamo che $\mathcal{R}(T)$ non ammette sottoinsiemi linearmente indipendenti di $n + 1$ o più elementi. Per definizione ciò significa che $\dim \mathcal{R}(T) \leq n$.

(c) Prendiamo due qualunque $x_1, x_2 \in \mathcal{N}(T)$. Allora $Tx_1 = Tx_2 = 0$. Poiché T è lineare per scalari qualunque α, β abbiamo che

$$T(\alpha_1 x_1 + \beta_2 x_2) = 0.$$

Ciò mostra che $\alpha_1 x_1 + \beta_2 x_2 \in \mathcal{N}(T)$. Quindi $\mathcal{N}(T)$ è uno spazio vettoriale. ■

La seguente conseguenza immediata della parte (b) della dimostrazione è degna di nota. *Gli operatori lineari conservano la dipendenza lineare.*

Occupiamoci ora dell'inverso di un operatore lineare. Ricordiamo dapprima che un'applicazione $T : X \rightarrow Y$ è detta **iniettiva** o **biunivoca** se punti differenti nel dominio hanno immagini differenti, cioè se per ogni $x_1, x_2 \in X$

$$x_1 \neq x_2 \implies Tx_1 \neq Tx_2 \tag{2.10}$$

o in maniera equivalente se

$$Tx_1 = Tx_2 \implies x_1 = x_2. \tag{2.11}$$

In questo caso esiste l'applicazione

$$\begin{array}{l} T^{-1} : \mathcal{R}(T) \rightarrow X \\ y_0 \mapsto x_0 \end{array} \quad (y_0 = Tx_0) \tag{2.12}$$

che applica ogni $y_0 \in \mathcal{R}(T)$ su quel $x_0 \in X$ per cui $Tx_0 = y_0$. L'applicazione T^{-1} è chiamata **l'inversa** di T .

Dalla (2.12) abbiamo chiaramente che

$$\begin{array}{ll} T^{-1}Tx = x & \text{per tutti gli } x \in X \\ TT^{-1}x = x & \text{per tutti gli } x \in \mathcal{R}(T). \end{array}$$

In connessione con gli operatori lineari sugli spazi vettoriali la situazione è la seguente. L'inverso di un operatore lineare esiste se e solo se lo spazio nullo dell'operatore consiste solamente del vettore nullo. Più precisamente abbiamo il seguente utile criterio che utilizzeremo molto frequentemente.

2.26 Teorema (Operatore Inverso)

Siano X e Y spazi vettoriali entrambi reali o complessi. Sia $T : X \rightarrow Y$ un operatore lineare con immagine $\mathcal{R}(T) \subset Y$. Allora

(a) *L'inverso $T^{-1} : \mathcal{R}(T) \rightarrow X$ esiste se e solo se*

$$Tx = 0 \implies x = 0.$$

(b) *Se T^{-1} esiste, è un operatore lineare.*

(c) Se $\dim X = n < \infty$ e T^{-1} esiste allora $\dim \mathcal{R}(T) = \dim X$. ■

Dimostrazione. (a) Supponiamo che $Tx = 0$ implichi $x = 0$. Sia $Tx_1 = Tx_2$. Poiché T è lineare

$$T(x_1 - x_2) = Tx_1 - Tx_2 = 0$$

così che $x_1 - x_2 = 0$ per ipotesi. Quindi $Tx_1 = Tx_2$ implica $x_1 = x_2$ e T^{-1} esiste per la (2.11). Viceversa se T^{-1} esiste allora la (2.11) vale. Dalla (2.11) con $x_2 = 0$ e dalla (2.9) otteniamo

$$Tx_1 = T0 = 0 \implies x_1 = 0.$$

Ciò completa la dimostrazione di (a).

(b) Assumiamo che T^{-1} esiste e mostriamo che T^{-1} è lineare. Il dominio di T^{-1} è $\mathcal{R}(T)$ ed è uno spazio vettoriale per il Teorema 2.25(a). Consideriamo degli $x_1, x_2 \in X$ qualunque e le loro immagini

$$y_1 = Tx_1 \quad \text{e} \quad y_2 = Tx_2.$$

Allora

$$x_1 = T^{-1}y_1 \quad \text{e} \quad x_2 = T^{-1}y_2.$$

T è lineare e così per degli scalari qualunque α e β abbiamo

$$\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha Tx_1 + \beta Tx_2 = T(\alpha x_1 + \beta x_2).$$

Poiché $x_j = T^{-1}y_j$ ciò implica che

$$T^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha T^{-1}y_1 + \beta T^{-1}y_2$$

e prova che T^{-1} è lineare.

(c) Abbiamo che $\dim \mathcal{R}(T) \leq \dim X$ per il Teorema 2.25(b) e $\dim X \leq \dim \mathcal{R}(T)$ per il medesimo teorema applicato a T^{-1} . ■

Menzioniamo infine una formula utile per l'inverso della composizione di operatori lineari.

2.27 Lemma (Inverso del Prodotto)

Siano $T : X \rightarrow Y$ e $S : Y \rightarrow Z$ operatori lineari biettivi, dove X, Y, Z sono spazi vettoriali. Allora l'inverso $(ST)^{-1} : Z \rightarrow X$ del prodotto (composizione) ST esiste e

$$(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}. \quad (2.13)$$

Dimostrazione. La dimostrazione è lasciata al lettore. ■

2.7 Spazi Lineari di Operatori

Consideriamo due spazi vettoriali qualunque X e Y (entrambi reali o complessi) e l'insieme

$$L(X, Y)$$

costituito da tutti gli operatori lineari da X in Y , cioè ciascuno di tali operatori è definito su tutto X e la sua immagine giace in Y . Vogliamo mostrare che $L(X, Y)$ stesso può essere dotato della struttura di spazio vettoriale.

Il tutto è molto semplice. $L(X, Y)$ diviene uno spazio vettoriale se, in maniera del tutto naturale, definiamo la somma $T_1 + T_2$ di due operatori $T_1, T_2 \in L(X, Y)$ come

$$(T_1 + T_2)x = T_1x + T_2x$$

e il prodotto αT di $T \in L(X, Y)$ per uno scalare α come

$$(\alpha T)x = \alpha Tx.$$

2.8 Operatori Lineari Limitati e Continui

Siamo ora interessati a definire una classe particolare di operatori lineari che ammettono norma e che costituiscono quindi essi stessi uno spazio normato.

2.28 DEFINIZIONE (OPERATORI LINEARI LIMITATI)

Siano X e Y spazi normati e $T : X \rightarrow Y$. L'operatore T è detto *limitato* se esiste un numero reale c tale che per tutti gli $x \in X$

$$\|Tx\| \leq c\|x\|. \quad (2.14)$$

In (2.14) la norma a sinistra è quella di Y e la norma a destra quella di X . Per semplicità abbiamo indicato col medesimo simbolo $\|\cdot\|$ entrambe le norme, senza pericolo di confusione. La formula (2.14) mostra che un operatore limitato applica insiemi limitati in X in insiemi limitati in Y . Ciò motiva il termine "operatore limitato".

Attenzione. Si noti che il presente uso della parola "limitato" è differente da quello in analisi, dove una funzione limitata è una funzione la cui immagine è un insieme limitato.

Qual è il più piccolo c tale che la (2.14) è ancora valida per tutti gli $x \in X$ che non siano nulli? [Possiamo escludere $x = 0$ perché $Tx = 0$ per $x = 0$.] Dividendo si ottiene

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq c \quad (x \neq 0)$$

e ciò mostra che c deve essere almeno altrettanto grande che l'estremo superiore dell'espressione a sinistra considerata su $X - \{0\}$. Quindi il minimo possibile c nella (2.14) è questo estremo superiore. Questa quantità è indicata con $\|T\|$; così

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}. \quad (2.15)$$

$\|T\|$ è chiamato la **norma** dell'operatore T . Se $X = \{0\}$ definiamo $\|T\| = 0$; in questo caso (relativamente ininteressante) $T = 0$ perché $T0 = 0$.

Si noti che la (2.14) con $c = \|T\|$ diventa

$$\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|. \quad (2.16)$$

Applicheremo questa formula piuttosto frequentemente.

Naturalmente dovremmo giustificare l'uso del termine "norma" nel presente contesto. Questo viene fatto nel seguente lemma.

2.29 Lemma (Norma)

Sia T un operatore lineare limitato. Allora

(a) Una formula alternativa per la norma di T è

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \|Tx\|. \quad (2.17)$$

(b) La norma definita dalla (2.15) soddisfa (N1) sino a (N4). ■

Dimostrazione. (a) Utilizzando la proprietà (N3) della norma in Y e la linearità di T otteniamo dalla (2.15)

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{1}{\|x\|} \|Tx\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \left\| T \left(\frac{1}{\|x\|} x \right) \right\| = \sup_{\substack{y \in X \\ \|y\|=1}} \|Ty\|.$$

Scrivendo x invece di y a destra abbiamo la (2.17).

(b) (N1) è ovvio e così $\|0\| = 0$. Da $\|T\| = 0$ abbiamo che $Tx = 0$ per tutti gli $x \in X$, così che $T = 0$. Quindi (N2) vale. Inoltre (N3) è ottenuto da

$$\sup_{\|x\|=1} \|\alpha Tx\| = \sup_{\|x\|=1} |\alpha| \|Tx\| = |\alpha| \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$$

dove $x \in X$. Infine (N4) segue da

$$\sup_{\|x\|=1} \|(T_1 + T_2)x\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_1x + T_2x\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|T_1x\| + \sup_{\|x\|=1} \|T_2x\|;$$

qui $x \in X$. ■

Si noti che l'operatore identità $I : X \rightarrow X$ e l'operatore zero $0 : X \rightarrow X$ su uno spazio normato X sono operatori limitati ed hanno rispettivamente norma $\|I\| = 1$ e $\|0\| = 0$.

Osservazione. Nel caso in cui T sia una matrice $n \times n$ di elementi (τ_{jk}) e la norma nello spazio vettoriale di definizione sia quella euclidea la sua norma risulta essere $\|T\|^2 = \max_k \sum_{j=1}^n |\tau_{jk}|^2$. Se ne lascia per esercizio la dimostrazione al lettore.

Dal punto (b) del Lemma 2.29 otteniamo immediatamente il risultato cercato.

2.30 Teorema (Spazio $B(X, Y)$)

Lo spazio vettoriale $B(X, Y)$ di tutti gli operatori limitati lineari da uno spazio normato X in uno spazio normato Y è esso stesso uno spazio normato con norma definita da

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \|Tx\|. \quad (2.18)$$

Esaminiamo ora alcune proprietà specifiche importanti degli operatori lineari limitati.

2.31 Teorema (Dimensioni Finite)

Se uno spazio normato X è finito dimensionale allora ogni operatore lineare su X è limitato. ■

Dimostrazione. Sia $\dim X = n$ e $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base per X . Prendiamo un qualunque $x = \sum \xi_j e_j$ e consideriamo un qualunque operatore lineare T su X . Poiché T è lineare

$$\|Tx\| = \left\| \sum \xi_j T e_j \right\| \leq \sum |\xi_j| \|T e_j\| \leq \max_k \|T e_k\| \sum |\xi_j|$$

(somme da 1 a n). All'ultima somma applichiamo il Lemma 2.10 con $\alpha_j = \xi_j$ e $x_j = e_j$. Allora otteniamo

$$\sum |\xi_j| \leq \frac{1}{c} \left\| \sum \xi_j e_j \right\| = \frac{1}{c} \|x\|.$$

Assieme danno

$$\|Tx\| \leq \gamma \|x\| \quad \text{dove} \quad \gamma = \frac{1}{c} \max_k \|Te_k\|.$$

Da ciò e dalla (2.14) vediamo che T è limitato. ■

Example 1.1.11. For $1 \leq p < \infty$, $l^p(\mathbb{N})$ denotes the Banach space of sequences $\xi = (\xi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ so that $\|\xi\|_p = \left(\sum_j |\xi_j|^p\right)^{1/p} < \infty$. For $p = \infty$ the space $l^\infty(\mathbb{N})$ carries the norm $\|\xi\|_\infty = \sup_j |\xi_j|$. Similarly one defines $l^p(\mathbb{Z})$, $1 \leq p \leq \infty$.

Let $T : \{(\xi_n) \in l^p(\mathbb{N}) : \sum_n |n^2 \xi_n|^p < \infty\} \rightarrow l^p(\mathbb{N})$, with $1 \leq p < \infty$, $T(\xi_n) = (n^2 \xi_n)$; this operator is linear, but is not continuous, since if $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ denotes the canonical basis of $l^p(\mathbb{N})$, i.e., $e_n = (\delta_{j,n})_j$, then $e_n/n \rightarrow 0$, while $T e_n$ does not converge to zero. Another argument: T is not bounded since $\|e_n\|_p = 1$ and $\|T e_n\|_p = n^2, \forall n$.

Consideriamo ora alcune importanti proprietà degli operatori lineari limitati.

Gli operatori sono applicazioni, così che ad essi si applica la definizione di continuità. È un fatto fondamentale che per gli operatori *lineari* continuità e limitatezza divengono concetti equivalenti. I dettagli sono i seguenti.

Sia $T : X \rightarrow Y$ un operatore qualunque non necessariamente lineare, dove X e Y sono spazi normati. Per la definizione 1.4 l'operatore T è *continuo in un* $x_0 \in X$ se per ogni $\varepsilon > 0$ v'è un $\delta > 0$ tale che

$$\|Tx - Tx_0\| < \varepsilon \quad \text{per tutti gli } x \in X \text{ per cui} \quad \|x - x_0\| < \delta.$$

T è *continuo* se T è continuo in ogni $x \in X$.

Ora se T è lineare abbiamo il rimarchevole teorema seguente.

2.32 Teorema (Continuità e limitatezza)

Sia $T : X \rightarrow Y$ un operatore lineare e siano X e Y spazi normati. Allora

(a) T è continuo se e solamente se T è limitato.

(b) Se T è continuo in un singolo punto allora è continuo. ■

Dimostrazione. (a) Assumiamo che T sia limitato e dimostriamo che è continuo. Per $T = 0$ l'affermazione è banale. Sia $T \neq 0$. Allora $\|T\| \neq 0$. Consideriamo un qualunque $x_0 \in X$. Sia dato un $\varepsilon > 0$ arbitrario. Allora poiché T è lineare per ogni $x \in X$ otteniamo

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| \leq \|T\| \|x - x_0\|.$$

Quindi per x tale che

$$\|x - x_0\| \leq \frac{\varepsilon}{\|T\|}$$

otteniamo

$$\|Tx - Tx_0\| \leq \varepsilon.$$

Poiché $x_0 \in X$ era arbitrario ciò mostra che T è continuo.

Viceversa assumiamo che T sia continuo in un arbitrario $x_0 \in X$. Allora dato un $\varepsilon > 0$ arbitrario v'è un $\delta > 0$ tale che

$$\|Tx - Tx_0\| < \varepsilon \quad \text{per tutti gli } x \in X \text{ per cui} \quad \|x - x_0\| < \delta. \quad (2.19)$$

Prendiamo ora un qualunque $y \neq 0$ in X e poniamo

$$x = x_0 + \frac{\delta}{2\|y\|}y. \quad \text{Allora} \quad x - x_0 = \frac{\delta}{2\|y\|}y.$$

Quindi $\|x - x_0\| = \delta/2$ così che possiamo usare la (2.19). Poiché T è lineare abbiamo

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| = \left\| T \left(\frac{\delta}{2\|y\|} y \right) \right\| = \frac{\delta}{2\|y\|} \|Ty\|$$

e (2.19) implica

$$\frac{\delta}{2\|y\|} \|Ty\| < \varepsilon. \quad \text{Così} \quad \|Ty\| < \frac{2\varepsilon}{\delta} \|y\|.$$

Ciò può essere scritto $\|Ty\| \leq c\|y\|$, dove $c = 2\varepsilon/\delta$. Quindi poiché c dipende da x_0 e non da y ne segue che T è limitato.

(b) La continuità di T in un punto implica la limitatezza di T per la seconda parte della dimostrazione di (a), che a sua volta implica la continuità di T per l'(a). ■

2.33 Corollario (Continuità, Spazio Nullo)

Sia T un operatore lineare limitato. Allora

(a) $x_n \rightarrow x$, dove $x_n, x \in X$, implica $Tx_n \rightarrow Tx$.

(b) Lo spazio nullo $\mathcal{N}(T)$ è chiuso. ■

Dimostrazione. (a) segue dal Teorema 2.32(a) e 1.14 o direttamente dalla (2.16) perché per $n \rightarrow \infty$

$$\|Tx_n - Tx\| = \|T(x_n - x)\| \leq \|T\| \|x_n - x\| \rightarrow 0.$$

(b) Per ogni $x \in \overline{\mathcal{N}(T)}$ v'è una successione (x_n) in $\mathcal{N}(T)$ tale che $x_n \rightarrow x$; cf. 1.12(a). Quindi $Tx_n \rightarrow Tx$ per la parte (a) di questo corollario. Anche $Tx = 0$ poiché $Tx_n = 0$ così che $x \in \mathcal{N}(T)$. Poiché $x \in \mathcal{N}(T)$ era arbitrario, $\mathcal{N}(T)$ è chiuso. ■

È lasciata al lettore la semplice prova di un'altra utile formula

$$\|T_1 T_2\| \leq \|T_1\| \|T_2\|, \quad \|T^n\| \leq \|T\|^n \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (2.20)$$

valida per operatori lineari limitati $T_2 : X \rightarrow Y$, $T_1 : Y \rightarrow Z$ e $T : X \rightarrow X$, dove X, Y, Z sono spazi normati.

Due operatori T_1 e T_2 sono definiti **uguali**, scrivendo

$$T_1 = T_2,$$

se hanno medesimo dominio $\mathcal{D}(T_1) = \mathcal{D}(T_2)$ e se $T_1 x = T_2 x$ per tutti gli $x \in \mathcal{D}(T_1) = \mathcal{D}(T_2)$.

La **restrizione** di un operatore $T : X \rightarrow Y$ ad un sottoinsieme $B \subset X$ è indicato con

$$T|_B$$

ed è l'operatore definito da

$$T|_B : B \rightarrow Y, \quad T|_B x = Tx \text{ per tutti gli } x \in B.$$

Un'**estensione** di T definito in un sottospazio $\mathcal{D}(T) \subset X$ ad un insieme $M \supset \mathcal{D}(T)$ è un operatore

$$\tilde{T} : M \rightarrow Y \quad \text{tale che} \quad \tilde{T}|_{\mathcal{D}(T)} = T.$$

Se $\mathcal{D}(T)$ è un sottoinsieme proprio di M , allora un dato T ha molte estensioni. Di interesse pratico sono quelle estensioni che conservano alcune proprietà basilari, per esempio

la linearità (se T è lineare) o la limitatezza (se $\mathcal{D}(T)$ giace in uno spazio normato e T è limitato). Il seguente importante teorema è tipico a questo riguardo. Concerne l'estensione di un operatore lineare limitato T alla chiusura $\overline{\mathcal{D}(T)}$ del dominio tale che l'operatore esteso sia nuovamente limitato e lineare e abbia anche la stessa norma. Ciò include il caso dell'estensione da un insieme denso in uno spazio normato X a tutto X . Include anche il caso dell'estensione da uno spazio normato X al suo completamento.

2.34 Teorema (Estensione Limitata Lineare)

Sia

$$T : \mathcal{D}(T) \rightarrow Y$$

un operatore limitato lineare, dove $\mathcal{D}(T)$ giace in uno spazio normato X ed Y è uno spazio di Banach. Allora T ha un'unica estensione continua alla chiusura di $\mathcal{D}(T)$

$$\tilde{T} : \overline{\mathcal{D}(T)} \rightarrow Y.$$

Inoltre l'estensione \tilde{T} è un operatore limitato lineare di norma

$$\|\tilde{T}\| = \|T\|. \quad \blacksquare$$

Dimostrazione. Consideriamo un qualunque $x \in \overline{\mathcal{D}(T)}$. Per il Teorema 1.12(a) v'è una successione (x_n) in $\mathcal{D}(T)$ tale che $x_n \rightarrow x$. Poiché T è lineare e limitato abbiamo che

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|T(x_n - x_m)\| \leq \|T\| \|x_n - x_m\|.$$

Ciò mostra che (Tx_n) è di Cauchy perché (x_n) converge. Per ipotesi Y è completo così che (Tx_n) converge, ossia

$$Tx_n \rightarrow y \in Y.$$

Quindi se l'estensione \tilde{T} esiste deve essere

$$\tilde{T}x = y.$$

Mostriamo che questa definizione non è ambigua, è cioè indipendente dalla particolare successione scelta in $\mathcal{D}(T)$ convergente a x . Supponiamo che $x_n \rightarrow x$ e $z_n \rightarrow x$. Allora $x_n - z_n \rightarrow 0$. Poiché T è lineare e limitato abbiamo che

$$\|Tx_n - Tz_n\| = \|T(x_n - z_n)\| \leq \|T\| \|x_n - z_n\|$$

e le due successioni (Tx_n) e (Tz_n) hanno il medesimo limite. Ciò prova che \tilde{T} è univocamente definito per ogni $x \in \overline{\mathcal{D}(T)}$.

Chiaramente \tilde{T} è lineare e $\tilde{T}x = Tx$ per ogni $x \in \mathcal{D}(T)$, così che \tilde{T} è un'estensione di T . Ora usiamo

$$\|Tx_n\| \leq \|T\| \|x_n\|$$

e lasciamo $n \rightarrow \infty$. Allora $Tx_n \rightarrow y = \tilde{T}x$. Poiché $x \mapsto \|x\|$ definisce un'applicazione continua otteniamo che

$$\|\tilde{T}x\| \leq \|T\| \|x\|.$$

Quindi \tilde{T} è limitato e $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$. Naturalmente $\|\tilde{T}\| \geq \|T\|$ perché la norma essendo definita mediante un estremo superiore non può decrescere in un'estensione. Assieme danno $\|\tilde{T}\| = \|T\|$. \blacksquare

2.9 Funzionali Lineari

Un **funzionale** è un operatore la cui immagine giace sulla linea reale \mathbb{R} o nel piano complesso \mathbb{C} . Inizialmente l'*analisi funzionale* era l'analisi dei funzionali. Questi ultimi appaiono così frequentemente che viene usata una notazione specifica. Indichiamo i funzionali con le lettere minuscole f, g, h, \dots , il dominio di f con $\mathcal{D}(f)$, l'immagine con $\mathcal{R}(f)$ ed il valore di f in x con $f(x)$, con le parentesi.

I funzionali sono operatori cosicché si applicano le definizioni precedenti. Avremo in particolare bisogno delle seguenti due definizioni perché la maggioranza dei funzionali che considereremo saranno lineari e limitati.

2.35 DEFINIZIONE (FUNZIONALE LINEARE)

Un *funzionale lineare* f è un operatore lineare definito in uno spazio vettoriale X con immagine nel campo scalare K di X ; così

$$f : X \rightarrow K,$$

dove $K = \mathbb{R}$ se X è reale e $K = \mathbb{C}$ se X è complesso. ■

Se X è un sottospazio lineare di uno spazio vettoriale più ampio, si indica con $\mathcal{D}(f)$ e si chiama dominio di definizione di f .

2.36 DEFINIZIONE (FUNZIONALI LIMITATI LINEARI)

Un *funzionale limitato lineare* f è un operatore limitato lineare (cf. Def. 2.28) con immagine nel campo scalare dello spazio normato X . Perciò esiste un numero reale c tale che per tutti gli $x \in X$

$$|f(x)| \leq c\|x\|. \quad (2.21)$$

Inoltre la *norma* di f è (cf. (2.15) nella Sez. 2.8)

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \quad (2.22)$$

o

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |f(x)|. \quad (2.23)$$

La formula (2.16) nella Sez. 2.8 ora implica che

$$|f(x)| \leq \|f\| \|x\|, \quad (2.24)$$

ed il Teorema 2.32 viene riformulato nel modo seguente.

2.37 Teorema (Continuità e Limitatezza)

Un *funzionale lineare* f con dominio $\mathcal{D}(f)$ in uno spazio normato è continuo se e solo se f è limitato. ■

Il lemma seguente valido sia nel caso finito che infinito dimensionale trova utile applicazione nel seguito. Un lemma simile per spazi normati arbitrari sarà dato più in là, nella sezione 4.12.

2.38 Lemma (Vettore Nullo)

Sia X uno spazio vettoriale. Se $x_0 \in X$ ha la proprietà che $f(x_0) = 0$ per tutti i funzionali lineari f su X allora $x_0 = 0$. ■

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $x_0 \neq 0$. Allora se X è finito dimensionale x_0 si può esprimere come combinazione lineare dei vettori di base, ossia $x_0 = \sum_{j=1}^n \xi_j e_j$, dove gli scalari ξ_j non sono tutti nulli. Sia ad esempio $\xi_1 \neq 0$. Se X è infinito dimensionale è necessario ammettere che esso sia dotato di una base di Hamel B , ciò che dimostreremo solamente nel seguito utilizzando il Lemma di Zorn. Debbono esistere quindi vettori indipendenti in numero finito, che chiameremo ancora e_j , appartenenti a B che generano x_0 e possiamo ripetere l'argomentazione precedente. Consideriamo ora il funzionale lineare f_1 che sui vettori della base B assume i valori

$$\begin{aligned} f_1(e_1) &= 1 \\ f_1(b) &= 0 \quad \text{per ogni } b \in B, b \neq e_1 \end{aligned}$$

Esso viene esteso a tutti i vettori $x \in X$ utilizzando la linearità ed il fatto che ogni x può essere espresso come combinazione lineare di un numero finito di vettori della base B . È ora

$$f_1(x_0) = \xi_1 \neq 0,$$

ma ciò contraddice l'ipotesi e quindi dall'assurdo segue che $x_0 = 0$. ■

È di basilare importanza che l'insieme di tutti i funzionali lineari definiti su uno spazio vettoriale X possa esso stesso essere fatto spazio vettoriale. Questo spazio è denotato con X^* ed è chiamato **spazio duale algebrico**¹ di X . Le operazioni algebriche di spazio vettoriale sono definite in maniera naturale nel modo seguente. La *somma* $f_1 + f_2$ di due funzionali f_1 e f_2 è il funzionale s il cui valore ad ogni $x \in X$ è

$$s(x) = (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x);$$

il *prodotto* αf di uno scalare α e di un funzionale f è il funzionale p il cui valore in $x \in X$ è

$$p(x) = (\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

Si noti che ciò concorda con il modo usuale di sommare funzioni e di moltiplicarle per costanti.

Possiamo fare ancora un passo innanzi e considerare il duale algebrico $(X^*)^*$ di X^* , i cui elementi sono i funzionali lineari definiti su X^* . Indichiamo $(X^*)^*$ con X^{**} e lo chiamiamo lo **spazio biduale algebrico** di X .

Perché consideriamo X^{**} ? Il punto è che possiamo ottenere una relazione interessante ed importante fra X e X^{**} . Scegliamo la notazione

Spazio	Generico elemento	Valore in un punto
X	x	—
X^*	f	$f(x)$
X^{**}	g	$g(f)$

Possiamo ottenere un $g \in X^{**}$, che è un funzionale lineare definito su X^* , scegliendo un $x \in X$ *fisso* e ponendo

$$g(f) = g_x(f) = f(x) \quad (x \in X \text{ fisso, } f \in X^* \text{ variabile}). \quad (2.25)$$

L'indice x serve a ricordare che abbiamo ottenuto g coll'uso di un certo $x \in X$. Il lettore deve tenere ben presente che qui f è la variabile mentre x è fisso. Tenendo ciò in mente non dovrebbe avere difficoltà a capire la nostra presente considerazione.

¹Si noti che questa definizione non involve una norma. Il cosiddetto *spazio duale* X' consistente di tutti i funzionali *limitati* lineari su X sarà considerato nella Sez. 2.11.

g_x come definito dalla (2.25) è lineare. Ciò può essere visto dalla

$$g_x(\alpha f_1 + \beta f_2) = (\alpha f_1 + \beta f_2)(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x) = \alpha g_x(f_1) + \beta g_x(f_2).$$

Quindi g_x è un elemento di X^{**} , per definizione di X^{**} .

A ciascun $x \in X$ corrisponde un $g_x \in X^{**}$. Ciò definisce un'applicazione

$$\begin{aligned} C : X &\rightarrow X^{**} \\ x &\longmapsto g_x. \end{aligned}$$

C è chiamata l'**applicazione canonica** di X in X^{**} .

C è lineare perché il suo dominio è uno spazio vettoriale ed abbiamo

$$\begin{aligned} (C(\alpha x + \beta y))(f) &= g_{\alpha x + \beta y}(f) \\ &= f(\alpha x + \beta y) \\ &= \alpha f(x) + \beta f(y) \\ &= \alpha g_x(f) + \beta g_y(f) \\ &= \alpha(Cx)(f) + \beta(Cy)(f). \end{aligned}$$

C è anche iniettiva. Infatti se $Cx_0 = 0$ abbiamo che per tutti gli $f \in X^*$

$$(Cx_0)(f) = g_{x_0}(f) = f(x_0) = 0.$$

Ciò implica $x_0 = 0$ per il Lemma precedente e quindi dal Teorema 2.26 segue la iniettività della C .

C è chiamato l'*immersione (embedding) canonica* di X in X^{**} . Per comprendere e motivare questo termine spieghiamo dapprima il concetto di "isomorfismo", che è di interesse generale.

Nel nostro lavoro ci occupiamo di diversi spazi. Comune a tutti loro è il fatto che essi consistono di un insieme, chiamiamolo X , e di una "struttura" definita su X . Per uno spazio metrico questa è una metrica. Per uno spazio vettoriale le due operazioni algebriche formano la struttura. Per uno spazio normato la struttura consiste di queste due operazioni algebriche e della norma.

Dati due spazi X e \tilde{X} dello stesso tipo (ad esempio appunto due spazi metrici o vettoriali o normati) è di interesse sapere quando essi possano essere considerati "essenzialmente identici", cioè quando essi si possano considerare coincidenti per quanto riguarda la loro struttura e differenti al più per la natura dei loro punti, ossia quando essi possano essere considerati due realizzazioni del medesimo oggetto "astratto".

Una risposta matematicamente precisa è data dall'introduzione del concetto di **isomorfismo**. Per definizione si tratta di un'applicazione biettiva di X su \tilde{X} che conserva la struttura.

Corrispondentemente un *isomorfismo* T di uno spazio metrico $X = (X, d)$ su uno spazio metrico $\tilde{X} = (\tilde{X}, \tilde{d})$ è un'applicazione biettiva che conserva la distanza, cioè per tutti gli $x, y \in X$

$$\tilde{d}(Tx, Ty) = d(x, y).$$

\tilde{X} è allora detto *isomorfo* ad X . Ciò non ci è nuovo ma si tratta semplicemente di un altro nome per l'isometria introdotta nella Def. 1.16. Nuovo è il seguito.

Un *isomorfismo* T di uno spazio vettoriale X su uno spazio vettoriale \tilde{X} sul medesimo campo è un'applicazione biettiva che conserva le due operazioni algebriche dello spazio

vettoriale; così per tutti gli $x, y \in X$ e scalari α

$$T(x + y) = Tx + Ty, \quad T(\alpha x) = \alpha Tx,$$

cioè $T : X \rightarrow \tilde{X}$ è un operatore biiettivo lineare. \tilde{X} è allora detto *isomorfo* ad X ed X e \tilde{X} sono detti *spazi vettoriali isomorfi*.

Isomorfismi fra spazi normati sono isomorfismi fra spazi vettoriali che conservano anche le norme.

Al momento possiamo utilizzare il concetto di isomorfismo fra spazi vettoriali come segue.

Poiché C è lineare e iniettiva è un isomorfismo di X sull'immagine $\mathcal{R}(C) \subset X^{**}$.

Se X è isomorfo ad un sottospazio di uno spazio vettoriale Y diciamo che X è **immergibile** (**embeddable**) in Y . Quindi X è immergibile in X^{**} e C è anche chiamato l'*immersione* (*embedding canonica*) di X in X^{**} .

Se C è surgettiva così che $\mathcal{R}(C) = X^{**}$ allora X è detto **algebricamente riflessivo**. Proveremo nella prossima sezione che se X è finito dimensionale allora X è algebricamente riflessivo.

Una discussione simile che involve le norme e che conduce al concetto di *riflessività* di uno spazio *normato* sarà presentato nella Sez. 4.7 dopo avere sviluppato gli strumenti necessari (in particolare il famoso teorema di Hahn–Banach).

4.10 Teorema (Hahn–Banach. Spazi Normati)

Sia f un funzionale lineare limitato su un sottospazio Z di uno spazio normato X . Allora esiste un funzionale lineare limitato \tilde{f} su X che è un'estensione di f a X e che ha la stessa norma

$$\|\tilde{f}\|_X = \|f\|_Z \quad (4.21)$$

dove

$$\|\tilde{f}\|_X = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |\tilde{f}(x)|, \quad \|f\|_Z = \sup_{\substack{x \in Z \\ \|x\|=1}} |f(x)|$$

(e $\|f\|_Z = 0$ nel caso banale $Z = \{0\}$). ■

Dimostrazione. Se $Z = \{0\}$ allora $f = 0$ e l'estensione è $\tilde{f} = 0$. Sia $Z \neq \{0\}$. Vogliamo usare il Teorema 4.9. Quindi dobbiamo prima scoprire una p conveniente. Per tutti gli $x \in Z$ abbiamo

$$|f(x)| \leq \|f\|_Z \|x\|.$$

Dal Teorema 4.10 deriveremo ora un altro utile risultato che, in parole povere, mostra che lo spazio duale X' di uno spazio normato X consiste di un numero sufficiente di funzionali lineari limitati da poter distinguere fra punti di X . Ciò diventerà essenziale in connessione con gli operatori duali e la cosiddetta convergenza debole.

4.11 Teorema (Funzionali Lineari Limitati)

Sia X uno spazio normato e sia $x_0 \neq 0$ un elemento qualunque di X . Allora esiste un funzionale lineare limitato \tilde{f} su X tale che

$$\|\tilde{f}\| = 1, \quad \tilde{f}(x_0) = \|x_0\|. \quad \blacksquare$$

Dimostrazione. Consideriamo il sottospazio Z di X consistente di tutti gli elementi $x = \alpha x_0$ dove α è uno scalare. Su Z definiamo un funzionale lineare con

$$f(x) = f(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\|. \quad (4.23)$$

f è limitato ed ha norma $\|f\| = 1$ perché

$$|f(x)| = |f(\alpha x_0)| = |\alpha| \|x_0\| = \|x\|.$$

Il Teorema 4.10 implica che f ha una estensione lineare \tilde{f} da Z a X di norma $\|\tilde{f}\| = \|f\| = 1$. Dalla (4.23) vediamo che $\tilde{f}(x_0) = f(x_0) = \|x_0\|$. \blacksquare

Da questo Teorema segue il seguente Corollario, che evidenzia come i funzionali lineari limitati siano in grado di discriminare fra due punti diversi.

4.12 Corollario (Norma, Vettore Nullo)

Per ogni x in uno spazio normato X abbiamo

$$\|x\| = \sup_{\substack{f \in X' \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|}. \quad (4.24)$$

Quindi se x_0 è tale che $f(x_0) = 0$ per tutti gli $f \in X'$ allora $x_0 = 0$. ■

Dimostrazione. Dal Teorema 4.11 abbiamo, scrivendo x per x_0 ,

$$\sup_{\substack{f \in X' \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \geq \frac{|\tilde{f}(x)|}{\|\tilde{f}\|} = \frac{\|x\|}{1} = \|x\|$$

e da $|f(x)| \leq \|f\| \|x\|$ otteniamo

$$\sup_{\substack{f \in X' \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \leq \|x\|.$$

Dal confronto segue la (4.24). ■

4.7 Spazi Riflessivi

La riflessività *algebraica* di spazi *vettoriali* è stata discussa nella Sez. 2.9. La *riflessività* di spazi *normati* è l'argomento della presente sezione.

Consideriamo uno spazio normato X , il suo spazio duale X' così come definito in 2.42 ed inoltre lo spazio duale $(X')'$ di X' . Questo spazio è indicato con X'' ed è chiamato lo **spazio biduale** di X .

Esattamente come s'è fatto quando si sono discussi gli spazi duali e biduali algebrici possiamo definire un funzionale g_x su X' scegliendo un $x \in X$ fisso e ponendo

$$g_x(f) = f(x) \quad (f \in X' \text{ variabile}). \quad (4.52)$$

Ciò definisce un'applicazione

$$\begin{aligned} C : X &\rightarrow X'' \\ x &\mapsto g_x. \end{aligned} \quad (4.53)$$

C è chiamata l'**applicazione canonica** di X in X'' . Questa applicazione, così come per gli spazi duali e biduali algebrici, è lineare e biettiva di X su $\mathcal{R}(C) \subset X''$. In questo caso possiamo aggiungere che g_x è limitata e che l'applicazione C è un'isometria, poiché abbiamo il seguente lemma basilare.

4.15 Lemma (Norma di g_x)

Per ogni x fisso in uno spazio normato X il funzionale g_x definito dalla (4.52) è un funzionale lineare limitato su X' , così che $g_x \in X''$ ed ha norma

$$\|g_x\| = \|x\|. \quad (4.54)$$

■

Dimostrazione. La linearità di g_x è nota dalla Sez. 2.9 e la (4.54) segue dalla (4.52) e dal Corollario 4.12

$$\|g_x\| = \sup_{\substack{f \in X' \\ f \neq 0}} \frac{|g_x(f)|}{\|f\|} = \sup_{\substack{f \in X' \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} = \|x\|. \quad (4.55)$$

■

Possiamo quindi esprimerci in termini di un isomorfismo di spazi normati come definito nella Sez. 2.11

4.16 Lemma (Applicazione Canonica)

L'applicazione canonica C data dalla (4.53) è un isomorfismo dello spazio normato X sullo spazio normato $\mathcal{R}(C)$, l'immagine di C . ■

X è detto **immergibile** (**embeddable**) in uno spazio normato Z se X è isomorfo ad un sottospazio di Z . Ciò è simile alla Sez. 2.9, ma si noti che qui abbiamo a che fare con un isomorfismo di spazi normati, cioè con un isomorfismo di spazi vettoriali che conserva la norma (cf. Sez. 2.11). Il Lemma 4.16 mostra che X è immergibile in X'' e C è chiamato *l'immersione canonica* (*embedding canonico*) di X in X'' .

In generale C non sarà biiettivo, così che l'immagine $\mathcal{R}(C)$ sarà un sottospazio *proprio* di X'' . Il caso surgettivo quando $\mathcal{R}(C)$ è tutto X'' è sufficientemente importante da dargli un nome.

4.17 DEFINIZIONE (RIFLESSIVITÀ)

Uno spazio normato X è detto *riflessivo* se

$$\mathcal{R}(C) = X''$$

dove $C : X \rightarrow X''$ è l'applicazione canonica data dalla (4.53) e dalla (4.52). ■

Se X è riflessivo è isomorfo (quindi isometrico) a X'' per il Lemma 4.16. È interessante il fatto che l'inverso in generale non valga.

Inoltre la completezza non implica la riflessività ma viceversa abbiamo il seguente teorema.

4.18 Teorema (Completezza)

Se uno spazio normato X è riflessivo allora è completo (quindi uno spazio di Banach). ■

Dimostrazione. Poiché X'' è lo spazio duale di X' esso è completo per il Teorema 2.43. La riflessività di X significa che $\mathcal{R}(C) = X''$. La completezza di X ora segue da quella di X'' per il Lemma 4.16. ■

Ogni spazio normato X finito dimensionale è riflessivo. Infatti se $\dim X < \infty$ allora ogni funzionale lineare su X è limitato (cf. 2.31), così che $X' = X^*$ e la riflessività algebrica di X implica allora il seguente teorema.

4.19 Teorema (Dimensioni Finite)

Ogni spazio normato finito dimensionale è riflessivo. ■

Anche gli spazi di Hilbert risultano essere sempre riflessivi.

III.2 Duals and double duals

In the last section we proved that the set of bounded linear transformations from one Banach space X to another Y was itself a Banach space. In the case where Y is the complex numbers, this space $\mathcal{L}(X, \mathbb{C})$ is denoted by X^* and called the **dual space** of X . The elements of X^* are called bounded linear functionals on X . In this chapter when we talk about convergence in X^* we always mean convergence in the norm given in Theorem III.2. If $\lambda \in X^*$, then

$$\|\lambda\| = \sup_{x \in X, \|x\| \leq 1} |\lambda(x)|$$

In Section IV.5, we discuss another notion of convergence for X^* .

Dual spaces play an important role in mathematical physics. In many models of physical systems, whether in quantum mechanics, statistical mechanics, or quantum field theory, the possible states of the system in question can be associated with linear functionals on appropriate Banach spaces. Furthermore, linear functionals are important in the modern theory of partial differential equations. For these reasons, and because they are interesting in their own right, dual spaces have been studied extensively. There are two directions in which such study can proceed: either determining the dual spaces of particular Banach spaces or proving general theorems relating properties of Banach spaces to properties of their duals. In this section we study several examples of special interest and prove one general theorem. For an example of another general theorem see Theorem III.7.

Example 1 (L^p spaces) Suppose that $1 < p < \infty$ and $p^{-1} + q^{-1} = 1$. If $f \in L^p(\mathbb{R})$ and $g \in L^q(\mathbb{R})$ then, according to the Hölder inequality (Theorem III.1), fg is in $L^1(\mathbb{R})$. Thus,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(x)} f(x) dx$$

makes sense. Let $g \in L^q(\mathbb{R})$ be fixed and define

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g} f dx$$

for each $f \in L^p(\mathbb{R})$. The Hölder inequality shows that $G(\cdot)$ is a bounded linear functional on $L^p(\mathbb{R})$ with norm less than or equal to $\|g\|_q$; actually the norm is equal to $\|g\|_q$. The converse of this statement is also true. That is, every bounded linear functional on L^p is of the form $G(\cdot)$ for some $g \in L^q$. Furthermore, different functions in L^q give rise to different functionals on L^p . Thus,

the mapping that assigns to each $g \in L^q$ the corresponding linear functional, $G(\cdot)$, on $L^p(\mathbb{R})$ is a (conjugate linear) isometric isomorphism of L^q onto $(L^p)^*$. In this sense, L^q is the dual of L^p . Since the roles of p and q in the expression $p^{-1} + q^{-1} = 1$ are symmetric, it is clear that $L^p = (L^q)^* = ((L^p)^*)^*$. That is, the dual of the dual of L^p is again L^p .

The case where $p = 1$ is different. The dual of $L^1(\mathbb{R})$ is $L^\infty(\mathbb{R})$ with the elements of $L^\infty(\mathbb{R})$ acting on functions in $L^1(\mathbb{R})$ in the natural way given by the above integral. However, the dual of $L^\infty(\mathbb{R})$ is not $L^1(\mathbb{R})$ but a much larger space (see Problems 7 and 8). As a matter of fact, we will prove later (Chapter XVI) that $L^1(\mathbb{R})$ is not the dual of any Banach space. The duality statements in this example hold for $L^p(X, d\mu)$ where $\langle X, \mu \rangle$ is a general measure space except that $L^1(X)$ may be the dual of $L^\infty(X)$ if $\langle X, \mu \rangle$ is trivially small.

Example 2 (Hilbert spaces) If we let $p = 2$ in Example 1, then $q = 2$ and we obtain the result that $L^2(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R})^*$, that is, $L^2(\mathbb{R})$ is its own dual space. In fact, we have already shown (the Riesz lemma) in Section II.2 that this is true for all Hilbert spaces. The reader is cautioned again that the map which identifies \mathcal{H} with its dual \mathcal{H}^* is conjugate linear. If $g \in \mathcal{H}$, then the linear functional G corresponding to g is $G(f) = (g, f)$.

Example 3 ($\ell_\infty = \ell_1^*, \ell_1 = c_0^*$) Suppose that $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty \in \ell_1$. Then for each $\{a_k\}_{k=1}^\infty \in c_0$

$$\Lambda(\{a_k\}_{k=1}^\infty) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k$$

converges and $\Lambda(\cdot)$ is a continuous linear functional on c_0 with norm equal to $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|$. To see that all continuous linear functionals on c_0 arise in this way, we proceed as follows. Suppose $\lambda \in c_0^*$ and let e^k be the sequence in c_0 which has all its terms equal to zero except for a one in the k th place. Define $\lambda_k = \lambda(e^k)$ and let $f^\ell = \sum_{k=1}^{\ell} (|\lambda_k|/\lambda_k) e^k$. If some λ_k is zero, we simply omit that term from the sum. Then for each ℓ , $f^\ell \in c_0$ and $\|f^\ell\|_{c_0} = 1$. Since,

$$\lambda(f^\ell) = \sum_{k=1}^{\ell} |\lambda_k| \quad \text{and} \quad |\lambda(f^\ell)| \leq \|f^\ell\|_{c_0} \|\lambda\|_{c_0^*}$$

we have

$$\sum_{k=1}^{\ell} |\lambda_k| \leq \|\lambda\|_{c_0^*}$$

Since this is true for all ℓ , $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| < \infty$ and

$$\Lambda(\{a_k\}_{k=1}^\infty) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k$$

is a well-defined linear functional on c_0 . However, $\lambda(\cdot)$ and $\Lambda(\cdot)$ agree on finite linear combinations of the e_k . Because such finite linear combinations are dense in c_0 , we conclude that $\lambda = \Lambda$. Thus every functional in c_0^* arises from a sequence in ℓ_1 , and the reader can check for himself that the norms in ℓ_1 and c_0^* coincide. Thus $\ell_1 = c_0^*$. A similar proof shows that $\ell_\infty = \ell_1^*$.

Since the dual X^* of a Banach space is itself a Banach space (Theorem III.2), it also has a dual space, denoted by X^{**} . X^{**} is called the **second dual**, the **bidual**, or the **double dual** of the space X . In Example 3, ℓ_1 is the first dual of c_0 and ℓ_∞ is the second dual. It is not a priori evident that X^* is always nonzero and if $X^* = \{0\}$ then $X^{**} = \{0\}$ too. However, this situation does not occur; dual spaces always have plenty of linear functionals in them. We prove this fact in the next section. Using a corollary also proven there we will prove that X can be regarded in a natural way as a subset of X^{**} .

2.10 Operatori Lineari e Funzionali su Spazi Finito Dimensionali

Siano X e Y spazi vettoriali finito dimensionali sul medesimo campo e $T : X \rightarrow Y$ un operatore lineare. Scegliamo una base $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ per X ed una base $B = \{b_1, \dots, b_r\}$ per Y . Allora ogni $x \in X$ ha un'unica rappresentazione

$$x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n. \quad (2.26)$$

Poiché T è lineare x ha l'immagine

$$y = Tx = T \left(\sum_{k=1}^n \xi_k e_k \right) = \sum_{k=1}^n \xi_k T e_k. \quad (2.27)$$

Poiché la rappresentazione (2.26) è unica otteniamo il nostro primo risultato.

T è unicamente determinato se le immagini $y_k = T e_k$ degli n vettori di base sono assegnate.

Poiché y e $y_k = T e_k$ sono in Y essi hanno un'unica rappresentazione della forma

$$y = \sum_{j=1}^r \eta_j b_j \quad (2.28)$$

$$T e_k = \sum_{j=1}^r \tau_{jk} b_j. \quad (2.29)$$

Sostituendo in (2.27) si ottiene

$$y = \sum_{j=1}^r \eta_j b_j = \sum_{k=1}^n \xi_k T e_k = \sum_{k=1}^n \xi_k \sum_{j=1}^r \tau_{jk} b_j = \sum_{j=1}^r \left(\sum_{k=1}^n \tau_{jk} \xi_k \right) b_j.$$

Poiché le b_j formano un insieme linearmente indipendente, i coefficienti di ciascun b_j a destra e a sinistra devono essere gli stessi, cioè

$$\eta_j = \sum_{k=1}^n \tau_{jk} \xi_k \quad j = 1, \dots, r. \quad (2.30)$$

Ciò fornisce il nostro risultato successivo.

L'immagine $y = Tx = \sum \eta_j b_j$ di $x = \sum \xi_k e_k$ può essere ottenuto dalla (2.30).

Si noti la posizione inusuale dell'indice di somma j di τ_{jk} in (2.29), che è necessaria per arrivare alla posizione usuale dell'indice di somma nella (2.30).

I coefficienti nella (2.30) formano una matrice

$$T_{EB} = (\tau_{jk})$$

con r righe ed n colonne. Se sono assegnate una base E di X ed una base B di Y , allora la matrice T_{EB} è univocamente determinata dall'operatore lineare T . Diciamo che la matrice T_{EB} **rappresenta** l'operatore T rispetto a queste basi.

Introducendo i vettori colonna $\tilde{x} = (\xi_k)$ e $\tilde{y} = (\eta_j)$ possiamo scrivere la (2.30) in notazione matriciale

$$\tilde{y} = T_{EB} \tilde{x}. \quad (2.31)$$

Analogamente anche (2.29) può essere scritta in forma matriciale

$$Te = T_{EB}^T b \quad (2.32)$$

dove Te è il vettore colonna con componenti Te_1, \dots, Te_n (che sono essi stessi vettori) e b è il vettore colonna di componenti b_1, \dots, b_r e dove dobbiamo usare il trasposto T_{EB}^T di T_{EB} perché nella (2.29) sommiamo su j che è il primo indice.

Le nostre considerazioni mostrano che un operatore lineare T determina un'unica matrice rappresentante T rispetto ad una data base per X ed ad una data base per Y . Viceversa ogni matrice con r righe ed n colonne determina un operatore lineare che essa rappresenta rispetto a basi date per X e Y .

Ritorniamo ora ai **funzionali lineari** su X , dove $\dim X = n$ e $\{e_1, \dots, e_n\}$ è una base per X come prima. Questi funzionali costituiscono lo spazio algebrico duale X^* di X come sappiamo dalla sezione precedente. Per ogni tale funzionale e per ogni $x = \sum \xi_j e_j \in X$ abbiamo

$$f(x) = f\left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n \xi_j f(e_j) = \sum_{j=1}^n \xi_j \alpha_j \quad (2.33)$$

dove

$$\alpha_j = f(e_j) \quad j = 1, \dots, n \quad (2.34)$$

ed f è unicamente determinata dai suoi valori α_j sugli n vettori di base di X .

Viceversa ogni n -pla di scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ determina un funzionale lineare su X per le (2.33), (2.34). In particolare prendiamo le n -ple

$$\begin{aligned} &(1, 0, 0, \dots, 0, 0) \\ &(0, 1, 0, \dots, 0, 0) \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &(0, 0, 0, \dots, 0, 1). \end{aligned}$$

Per le (2.33), (2.34) ciò fornisce n funzionali che denotiamo f_1, \dots, f_n e che hanno valori

$$f_k(e_j) = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq k \\ 1 & \text{se } j = k; \end{cases} \quad (2.35)$$

cioè f_k ha il valore 1 al k -mo vettore di base e il valore 0 agli altri $n - 1$ vettori di base. δ_{jk} è chiamato la *delta di Kroneker*. $\{f_1, \dots, f_n\}$ è chiamato la **base duale** della base $\{e_1, \dots, e_n\}$ per X . Ciò è giustificato dal seguente teorema.

2.39 Teorema (Dimensioni di X^*)

Sia X uno spazio vettoriale n -dimensionale ed $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base per X . Allora $F = \{f_1, \dots, f_n\}$ data dalla (2.35) è una base per l'algebrico duale X^* di X e $\dim X^* = \dim X = n$. ■

Dimostrazione. F è un insieme linearmente indipendente perché

$$\sum_{k=1}^n \beta_k f_k(x) = 0 \quad (x \in X) \quad (2.36)$$

per $x = e_j$ dà

$$\sum_{k=1}^n \beta_k f_k(e_j) = \sum_{k=1}^n \beta_k \delta_{jk} = \beta_j = 0,$$

così che tutte le β_k in (2.36) sono zero. Mostriamo che ogni $f \in X^*$ può essere rappresentata come una combinazione lineare degli elementi di F in una maniera unica. Scriviamo come in (2.34) $f(e_j) = \alpha_j$. Per la (2.33)

$$f(x) = \sum_{j=1}^n \xi_j \alpha_j$$

per ogni $x \in X$. D'altra parte per la (2.35) otteniamo che

$$f_j(x) = f_j(\xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n) = \xi_j.$$

Dal confronto

$$f(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j(x).$$

Quindi la rappresentazione unica di un arbitrario funzionale lineare f su X in termini dei funzionali f_1, \dots, f_n è

$$f = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n. \quad \blacksquare$$

Usando questo teorema ed il lemma 2.38 possiamo ottenere il seguente teorema.

2.40 Teorema (Riflessività Algebrica)

Ogni spazio vettoriale finito dimensionale è algebricamente riflessivo. ■

Dimostrazione. L'applicazione canonica $C : X \rightarrow X^{**}$ considerata nella sezione precedente è lineare e iniettiva. Quindi dal Teorema 2.26 segue che l'applicazione C ha un inverso lineare $C^{-1} : \mathcal{R}(C) \rightarrow X$, dove $\mathcal{R}(C)$ è l'immagine di C . Abbiamo anche per il medesimo teorema che $\dim \mathcal{R}(C) = \dim X$. Ora per il Teorema 2.39

$$\dim X^{**} = \dim X^* = \dim X.$$

Confrontando, $\dim \mathcal{R}(C) = \dim X^{**}$. Quindi $\mathcal{R}(C) = X^{**}$ perché, se $\mathcal{R}(C)$ fosse un sottospazio proprio di X^{**} , per il Teorema 2.4 avrebbe dimensioni minori di X^{**} , che è impossibile. Ciò prova la riflessività algebrica. ■

2.11 Spazi Normati di Operatori. Spazio Duale

In che caso lo spazio normato $B(X, Y)$ delle applicazioni lineari limitate di X in Y è uno spazio di Banach? Questa è una domanda centrale a cui si risponde nel seguente teorema. È rimarchevole che le ipotesi del teorema non coinvolgono X ; ossia X può essere o non essere completo.

2.41 Teorema (Completezza)

Se Y è uno spazio di Banach allora $B(X, Y)$ è uno spazio di Banach. ■

Dimostrazione. Consideriamo una successione arbitraria di Cauchy (T_n) in $B(X, Y)$ e mostriamo che (T_n) converge ad un operatore $T \in B(X, Y)$. Poiché (T_n) è di Cauchy, per ogni $\varepsilon > 0$ v'è un N tale che

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon \quad (n, m > N).$$

Per tutti gli $x \in X$ ed $n, m > N$ otteniamo così [cf. (2.16) nella Sez. 2.8]

$$\|T_n x - T_m x\| = \|(T_n - T_m)x\| \leq \|T_n - T_m\| \|x\| < \varepsilon \|x\|. \quad (2.37)$$

Ora per ogni x fisso e per un dato $\tilde{\varepsilon}$ possiamo scegliere un $\varepsilon = \varepsilon_x$ tale che $\varepsilon_x \|x\| < \tilde{\varepsilon}$. Allora dalla (2.37) abbiamo $\|T_n x - T_m x\| < \tilde{\varepsilon}$ e vediamo che $(T_n x)$ è di Cauchy in Y . Poiché Y è completo $(T_n x)$ converge, ossia $T_n x \rightarrow y$. Chiaramente il limite $y \in Y$ dipende dalla scelta di $x \in X$. Ciò definisce un operatore $T : X \rightarrow Y$, dove $y = Tx$. L'operatore T è lineare perché

$$\lim T_n(\alpha x + \beta z) = \lim(\alpha T_n x + \beta T_n z) = \alpha \lim T_n x + \beta \lim T_n z.$$

Proviamo che T è limitato e che $T_n \rightarrow T$, ossia che $\|T_n - T\| \rightarrow 0$.

Poiché la (2.37) vale per ogni $m > N$ e $T_m x \rightarrow Tx$ possiamo fare $m \rightarrow \infty$. Usando la continuità della norma allora otteniamo dalla (2.37) per ogni $n > N$ e per tutti gli $x \in X$

$$\|T_n x - Tx\| = \|T_n x - \lim_{m \rightarrow \infty} T_m x\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|T_n x - T_m x\| \leq \varepsilon \|x\|. \quad (2.38)$$

Ciò mostra che $(T_n - T)$ con $n > N$ è un operatore limitato. Poiché T_n è limitato $T = T_n - (T_n - T)$ è limitato, ossia $T \in B(X, Y)$. Inoltre se in (2.38) prendiamo l'estremo superiore per tutti gli x di norma 1 otteniamo

$$\|T_n - T\| \leq \varepsilon \quad (n > N).$$

Quindi $\|T_n - T\| \rightarrow 0$. ■

Questo teorema ha importanti conseguenze rispetto allo spazio duale X' di X , che è definito come segue.

2.42 DEFINIZIONE (SPAZIO DUALE X')

Sia X uno spazio normato. Allora l'insieme di tutti i funzionali lineari limitati su X costituisce uno spazio normato con norma definita da

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |f(x)| \quad (2.39)$$

[cf. (2.22) e (2.23) nella Sez. 2.9] che è chiamato la *spazio duale*² di X ed è indicato con X' . ■

²Altri termini sono *duale*, *spazio aggiunto* e *spazio coniugato*. Si ricordi dalla Sez. 2.9 che lo spazio duale *algebrico* X^* è lo spazio vettoriale di *tutti* i funzionali lineari su X .

Poiché un funzionale lineare su X applica X in \mathbb{R} o \mathbb{C} (i campi scalari di X) e poiché \mathbb{R} e \mathbb{C} presi colla metrica usuale sono completi vediamo che X' è $B(X, Y)$ con lo spazio completo $Y = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} . Quindi il Teorema 2.41 è applicabile ed implica il basilare teorema seguente.

2.43 Teorema (Spazio Duale)

Lo spazio duale X' di uno spazio normato X è uno spazio di Banach (lo sia o no X). ■

Costituisce un principio fondamentale dell'analisi funzionale che lo studio degli spazi sia spesso combinato con quello dei loro duali.

In particolare, ricordando la discussione sullo spazio algebrico biduale X^{**} nella Sez. 2.9, ci possiamo chiedere se sia utile considerare $X'' = (X')'$ lo spazio biduale di X . La risposta è positiva ma dobbiamo posporre questa discussione alla Sez. 4.7 dove sviluppiamo gli strumenti necessari per ottenere dei risultati sostanziosi in questa direzione.