# Istituzioni di Fisica Teorica II

14 gennaio 2022

1. Si consideri un sistema con momento angolare $j = 1$. Facendo uso dell'azione degli operatori a scala $J_\pm$ sugli autoket $|j, m\rangle$ di $\boldsymbol{J}^2$ e $J_z$,
$$J_\pm |j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\, |j, m \pm 1\rangle \,,$$
   (a) scrivere la rappresentazione matriciale di $J_x$;
   (b) calcolare $(J_x/\hbar)^3$;
   (c) scrivere l'espressione della matrice di rotazione
$$\mathcal{D}_x(\alpha) = \exp\left(-i\frac{\alpha}{\hbar}J_x\right);$$
   (d) scrivere l'espressione del ket che si ottiene ruotando il sistema nello stato $|1, 1\rangle$ di $\pi/2$ radianti attorno all'asse $x$.

2. Si consideri una particella di massa $m$ confinata all'interno di una sfera di raggio $a$.
   (a) Scrivere l'espressione delle autofunzioni con momento angolare orbitale $l = 0$ (onda $S$);
   (b) Calcolare il rapporto fra l'energia del primo stato eccitato in onda $S$ e quella dello stato fondamentale.

   Si ricordino le espressioni delle funzioni di Bessel e di Neumann sferiche:
$$j_\ell(z) = (-z)^\ell \left(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^\ell \left(\frac{\sin z}{z}\right), \quad n_\ell(z) = -(-z)^\ell \left(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^\ell \left(\frac{\cos z}{z}\right).$$

3. Si consideri una particella di carica $e$ e massa $m$ confinata sul segmento $[0, a]$ con condizioni di Dirichlet ai bordi e soggetta ad un debole campo elettrico costante $\mathcal{E}$.
   (a) Calcolare gli autovalori e le autofunzioni $u_n(x)$ dell'operatore energia cinetica $H_0 = p^2/(2m)$;
   (b) calcolare, al prim'ordine in $\mathcal{E}$, la correzione all'$n$-esimo livello energetico di $H_0$;
   (c) calcolare gli elementi di matrice dell'energia potenziale elettrostatica $V = -e\mathcal{E}x$ negli autostati $|u_n\rangle$;
   (d) scrivere l'espressione della correzione al livello energetico fondamentale al secondo ordine in $\mathcal{E}$.

**Istituzioni di Fisica Teorica II**

25 gennaio 2022

1. Si consideri un sistema a due stati con il seguente Hamiltoniano:

$$H = E_0(a\mathbf{1} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}),$$

dove $a = 2$, $\boldsymbol{b} = (0, \sqrt{3}, 1)$ e $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ è il vettore delle matrici di Pauli.

   (a) Scrivere la risoluzione spettrale di $H$;

   (b) determinare l'operatore di evoluzione temporale $U(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t}{\hbar}H}$;

   (c) calcolare le probabilità di transizione $|\uparrow\rangle \to |\downarrow\rangle$ in funzione del tempo $t$.

2. Si consideri una particella di massa $m$ in una buca sferica di potenziale:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{per } 0 \leq r \leq a \\ 0 & \text{per } r > a, \end{cases}$$

con $V_0 > 0$.

   (a) Scrivere l'espressione delle autofunzioni con momento angolare orbitale $l = 0$ (onda $S$);

   (b) determinare l'equazione per gli autovalori in onda $S$;

   (c) trovare il valore minimo della massa per cui si ha uno stato legato.

3. Si consideri un oscillatore armonico unidimensionale con frequenza angolare $\omega$ nello stato fondamentale. Al tempo $t = 0$ si accenda una perturbazione lineare $V = \lambda x$.

   (a) Calcolare gli elementi di matrice di $V$ negli autostati $|n\rangle$, $n \in \mathbb{N}$, dell'oscillatore;

   (b) calcolare le probabilità di transizione agli stati eccitati $|n\rangle$ in funzione del tempo $t$ al secondo ordine in $\lambda$.

   (c) calcolare la probabilità di ritorno nello stato fondamentale in funzione del tempo $t$ al secondo ordine in $\lambda$.

**Istituzioni di Fisica Teorica II**

9 febbraio 2022

1. Si consideri un sistema a due stati con il seguente Hamiltoniano:

$$H = \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}}(\sigma_x + \sigma_z),$$

dove $\sigma_x$ e $\sigma_z$ sono matrici di Pauli.

   (a) Calcolare $\left(\frac{H}{\hbar\omega}\right)^2$;

   (b) determinare l'operatore di evoluzione temporale $U(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t}{\hbar}H}$;

   (c) determinare l'evoluzione di $\sigma_z$ in funzione del tempo $t$ nella formulazione di Heisenberg;

   (d) calcolarne il periodo.

2. Si consideri una particella di massa $m$ confinata all'interno di un guscio sferico, $a \leq r \leq b$, con condizioni di Dirichlet al bordo.

   (a) Determinare le autofunzioni con momento angolare orbitale $l = 0$ (onda $S$) e i corrispondenti livelli energetici;

   (b) calcolare il gap energetico relativo $(E_{n+1} - E_n)/E_n$ fra due livelli consecutivi in onda $S$.

3. Si consideri una particella di carica $e$ e massa $m$ confinata sul segmento $[0, a]$ con condizioni di Neumann ai bordi e soggetta ad un debole campo elettrico costante $\mathcal{E}$ lungo il segmento.

   (a) Determinare gli autovalori e le autofunzioni dell'operatore energia cinetica $H_0 = p^2/(2m)$;

   (b) calcolare, al prim'ordine in $\mathcal{E}$, la correzione all'$n$-esimo livello energetico di $H_0$;

   (c) supponendo che al tempo $t = 0$ la particella si trovi nello stato fondamentale di $H_0$, determinare l'ampiezza di transizione al primo stato eccitato in funzione di $t$, al primo ordine in $\mathcal{E}$.

**Istituzioni di Fisica Teorica II**

23 febbraio 2022

1. Si consideri un sistema con momento angolare $j = 1$. Facendo uso dell'azione degli operatori a scala $J_\pm$ sugli autoket $|j, m\rangle$ di $\boldsymbol{J}^2$ e $J_z$,

$$J_\pm |j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\, |j, m \pm 1\rangle \,,$$

   (a) scrivere la rappresentazione matriciale di $J_y$;

   (b) calcolare $(J_y/\hbar)^2$ e $(J_y/\hbar)^3$;

   (c) determinare l'espressione della matrice di rotazione

$$\mathcal{D}_y(\phi) = \exp\left(-i\frac{\phi}{\hbar}J_y\right);$$

   (d) scrivere l'espressione del ket che si ottiene ruotando il sistema nello stato $|1, -1\rangle$ di $\pi/2$ radianti attorno all'asse $y$.

2. Si consideri una particella di massa $m$ in una buca sferica di potenziale:

$$V(r) = \begin{cases} +\infty & \text{per } 0 \le r \le a \\ -V_0 & \text{per } a \le r \le b \\ 0 & \text{per } r > b, \end{cases}$$

   con $V_0 > 0$ (condizioni di Dirichlet in $r = a$).

   (a) Scrivere l'espressione delle autofunzioni con momento angolare orbitale $l = 0$ (onda $S$);

   (b) determinare l'equazione per gli autovalori in onda $S$ e individuarne le soluzioni in maniera grafica;

   (c) trovare il valore minimo della profondità $V_0$ per cui si ha uno stato legato.

3. Si consideri un oscillatore armonico unidimensionale con frequenza angolare $\omega$ nel primo stato eccitato. Al tempo $t = 0$ si accenda una perturbazione lineare $V = \lambda x$.

   (a) Determinare gli elementi di matrice di $V$ fra gli autostati $|n\rangle$, $n \in \mathbb{N}$, dell'oscillatore;

   (b) calcolare le probabilità di transizione allo stato fondamentale e al secondo stato eccitato in funzione del tempo $t$ al secondo ordine in $\lambda$.

**Istituzioni di Fisica Teorica II**

20 aprile 2022

1. Si consideri un sistema con momento angolare $j = 1$. Facendo uso dell'azione degli operatori a scala $J_\pm$ sugli autoket $|j, m\rangle$ di $\boldsymbol{J}^2$ e $J_z$,
$$J_\pm |j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\, |j, m \pm 1\rangle\,,$$
   (a) scrivere la rappresentazione matriciale di $J_x + J_z$;
   (b) calcolare $(J_x + J_z)^2$ e $(J_x + J_z)^3$;
   (c) determinare l'espressione della matrice di rotazione
$$\mathcal{D}_{\hat{\boldsymbol{n}}}(\phi) = \exp\left(-i\frac{\phi}{\hbar}\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{J}\right),$$
   con $\hat{\boldsymbol{n}} = \big(\sin(\pi/4), 0, \cos(\pi/4)\big)$.
   (d) scrivere l'espressione del ket che si ottiene ruotando il sistema nello stato $|1, 0\rangle$ di $\pi$ radianti attorno alla direzione $\hat{\boldsymbol{n}}$.

2. Si consideri una particella di massa $m$ confinata all'interno di una sfera di raggio $a$, con condizioni di Robin al bordo:
$$\frac{\partial\psi}{\partial r}\Big|_{r=a} = -\frac{1}{a}\psi\Big|_{r=a}$$
   (a) Determinare le autofunzioni con momento angolare orbitale $l = 0$ (onda $S$) e i corrispondenti livelli energetici;
   (b) calcolare il rapporto $r_n = (E_{n+1} - E_n)/(E_n - E_{n-1})$ fra due gap energetici consecutivi in onda $S$.

3. Si consideri il problema unidimensionale di una particella di carica $e$ e massa $m$ in un potenziale armonico con frequenza angolare $\omega$ e soggetta ad un debole campo elettrico costante $\mathcal{E}$.
   (a) Calcolare, al prim'ordine in $\mathcal{E}$, la correzione all'$n$-esimo livello energetico dell'oscillatore;
   (b) Determinare gli elementi di matrice dell'energia potenziale elettrostatica $V = -e\mathcal{E}x$ tra gli autostati imperturbati $|n\rangle$ dell'oscillatore;
   (c) determinare la correzione al primo livello energetico eccitato al secondo ordine in $\mathcal{E}$.

   Si ricordi la relazione $x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger)$.

**Istituzioni di Fisica Teorica II**

14 giugno 2022

1. Si consideri un sistema a due stati con il seguente Hamiltoniano:

$$H = E_0(a\mathbf{1} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}),$$

dove $a = 3$, $\boldsymbol{b} = (2, 0, 1)$ e $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ è il vettore delle matrici di Pauli.

   (a) Scrivere la risoluzione spettrale di $H$;

   (b) determinare l'operatore di evoluzione temporale $U(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t}{\hbar}H}$;

   (c) calcolare le probabilità di ritorno $|\uparrow\rangle \to |\uparrow\rangle$ in funzione del tempo $t$.

2. Si consideri una particella di massa $m$ in una buca sferica di potenziale:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{per } 0 \leq r \leq a \\ 0 & \text{per } r > a, \end{cases}$$

con $V_0 > 0$.

   (a) Scrivere l'espressione delle autofunzioni con momento angolare orbitale $l = 0$ (onda $S$);

   (b) determinare l'equazione per gli autovalori in onda $S$ e discuterla graficamente;

   (c) trovare il valore massimo della profondità della buca $V_0$ per cui si ha un solo stato legato.

3. Si consideri una particella di carica $e$ e massa $m$ confinata sul segmento $[0, a]$ con condizioni di Neumann ai bordi e soggetta ad un debole campo elettrico costante $\mathcal{E}$ lungo il segmento.

   (a) Determinare gli autovalori e le autofunzioni dell'operatore energia cinetica $H_0 = p^2/(2m)$;

   (b) calcolare, al prim'ordine in $\mathcal{E}$, la correzione all'$n$-esimo livello energetico di $H_0$;

   (c) supponendo che al tempo $t = 0$ la particella si trovi nello stato fondamentale di $H_0$, determinare l'ampiezza di transizione al primo stato eccitato in funzione di $t$, al primo ordine in $\mathcal{E}$.

**Istituzioni di Fisica Teorica II**

28 giugno 2022

1. Si consideri un sistema con momento angolare $j = 1$. Facendo uso dell'azione degli operatori a scala $J_\pm$ sugli autoket $|j, m\rangle$ di $\boldsymbol{J}^2$ e $J_z$,

$$J_\pm |j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\, |j, m \pm 1\rangle \,,$$

   (a) scrivere la rappresentazione matriciale di $J_x$;

   (b) calcolare $(J_x/\hbar)^3$;

   (c) scrivere l'espressione della matrice di rotazione

$$\mathcal{D}_x(\alpha) = \exp\left(-i\frac{\alpha}{\hbar}J_x\right) ;$$

   (d) scrivere l'espressione del ket che si ottiene ruotando il sistema nello stato $|1, 1\rangle$ di $\pi/2$ radianti attorno all'asse $x$.

2. Si consideri una particella di massa $m$ in una buca sferica di potenziale:

$$V(r) = \begin{cases} +\infty & \text{per } 0 \leq r \leq a \\ -V_0 & \text{per } a \leq r \leq b \\ 0 & \text{per } r > b, \end{cases}$$

   con $V_0 > 0$ (condizioni di Dirichlet in $r = a$).

   (a) Scrivere l'espressione delle autofunzioni con momento angolare orbitale $l = 0$ (onda $S$);

   (b) determinare l'equazione per gli autovalori in onda $S$ e individuarne le soluzioni in maniera grafica;

   (c) trovare il valore minimo della profondità $V_0$ per cui si ha uno stato legato.

3. Si consideri un oscillatore armonico unidimensionale con frequenza angolare $\omega$ nel primo stato eccitato. Al tempo $t = 0$ si accenda una perturbazione lineare $V = \lambda x$.

   (a) Determinare gli elementi di matrice di $V$ fra gli autostati $|n\rangle$, $n \in \mathbb{N}$, dell'oscillatore;

   (b) calcolare le probabilità di transizione allo stato fondamentale e al secondo stato eccitato in funzione del tempo $t$ al secondo ordine in $\lambda$.

**Istituzioni di Fisica Teorica II**

15 luglio 2022

1. Si consideri un sistema a due stati con il seguente Hamiltoniano:

$$H = \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}}(\sigma_x + \sigma_z),$$

dove $\sigma_x$ e $\sigma_z$ sono matrici di Pauli.

   (a) Calcolare $\left(\frac{H}{\hbar\omega}\right)^2$;

   (b) determinare l'operatore di evoluzione temporale $U(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t}{\hbar}H}$;

   (c) determinare l'evoluzione di $\sigma_z$ in funzione del tempo $t$ nella formulazione di Heisenberg;

   (d) calcolarne il periodo.

2. Si consideri una particella di massa $m$ confinata all'interno di un guscio sferico, $a \leq r \leq b$, con condizioni di Dirichlet al bordo.

   (a) Determinare le autofunzioni con momento angolare orbitale $l = 0$ (onda $S$) e i corrispondenti livelli energetici;

   (b) calcolare il gap energetico relativo $(E_{n+1} - E_n)/E_n$ fra due livelli consecutivi in onda $S$.

3. Si consideri una particella di carica $e$ e massa $m$ confinata sul segmento $[0, a]$ con condizioni di Neumann ai bordi e soggetta ad un debole campo elettrico costante $\mathcal{E}$ lungo il segmento.

   (a) Determinare gli autovalori e le autofunzioni dell'operatore energia cinetica $H_0 = p^2/(2m)$;

   (b) calcolare, al prim'ordine in $\mathcal{E}$, la correzione all'$n$-esimo livello energetico di $H_0$;

   (c) supponendo che al tempo $t = 0$ la particella si trovi nello stato fondamentale di $H_0$, determinare l'ampiezza di transizione al primo stato eccitato in funzione di $t$, al primo ordine in $\mathcal{E}$.

**Istituzioni di Fisica Teorica II**

2 settembre 2022

1. Si consideri un sistema con momento angolare $j = 1$. Facendo uso dell'azione degli operatori a scala $J_\pm$ sugli autoket $|j, m\rangle$ di $\boldsymbol{J}^2$ e $J_z$,
$$J_\pm |j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\, |j, m \pm 1\rangle \,,$$
   (a) scrivere la rappresentazione matriciale di $J_x + J_z$;
   (b) calcolare $(J_x + J_z)^2$ e $(J_x + J_z)^3$;
   (c) determinare l'espressione della matrice di rotazione
$$\mathcal{D}_{\hat{\boldsymbol{n}}}(\phi) = \exp\left(-i\frac{\phi}{\hbar}\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{J}\right),$$
   con $\hat{\boldsymbol{n}} = \big(\cos(\pi/4), 0, \sin(\pi/4)\big)$.
   (d) scrivere l'espressione del ket che si ottiene ruotando il sistema nello stato $|1, -1\rangle$ di $\pi/2$ radianti attorno alla direzione $\hat{\boldsymbol{n}}$.

2. Si consideri una particella di massa $m$ in una buca sferica di potenziale:
$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{per } 0 \le r \le a \\ 0 & \text{per } r > a, \end{cases}$$
   con $V_0 > 0$.
   (a) Scrivere l'espressione delle autofunzioni con momento angolare orbitale $l = 0$ (onda $S$);
   (b) determinare l'equazione per gli autovalori in onda $S$ e discuterla graficamente;
   (c) trovare il valore minimo della profondità della buca $V_0$ per cui si hanno almeno due stati legati.

3. Si consideri il problema unidimensionale di una particella di carica $e$ e massa $m$ in un potenziale armonico con frequenza angolare $\omega$ e soggetta ad un debole campo elettrico costante $\mathcal{E}$.
   (a) Calcolare, al prim'ordine in $\mathcal{E}$, la correzione all'$n$-esimo livello energetico dell'oscillatore;
   (b) Determinare gli elementi di matrice dell'energia potenziale elettrostatica $V = -e\mathcal{E}x$ tra gli autostati imperturbati $|n\rangle$ dell'oscillatore;
   (c) determinare la correzione al primo livello energetico eccitato al secondo ordine in $\mathcal{E}$.

   Si ricordi la relazione $x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger)$.