VERSIONE SINTETIZZATA PER GLI STUDENTI DEL I° ANNO

I.10. – DIELETTRICI

I.10.1. – Corpi isolanti nel campo elettrico

Tutto

I.10.2. – Campo e potenziale prodotti dalla polarizzazione

Tutto

I.10.3. – Polarizzazione indotta dal campo elettrico

Se si fa eccezione per i dielettrici a polarizzazione rigida (elettreti), cui faremo cenno più avanti, in tutti i materiali isolanti la densità di polarizzazione **P** dipende dal valore del campo $\mathbf{E}_{INT}$ medio che agisce all'interno del materiale. Tale campo è dato dalla somma vettoriale del campo $\mathbf{E}_A$ generato dai corpi carichi presenti e del campo $\mathbf{E}_P$ prodotto dalla stessa polarizzazione del mezzo.
Per calcolare la polarizzazione **P** dovuta ad un campo applicato $\mathbf{E}_A$ è necessario partire dallo studio degli effetti prodotti su ciascuna molecola presente nel materiale. Dobbiamo però notare che il campo $\mathbf{E}_0$, che sente ogni molecola del dielettrico, in generale si scosta un po' dal campo medio interno $\mathbf{E}_{INT,}$ in quanto quest'ultimo contiene anche il contributo della stessa molecola su cui stiamo considerando l'azione, contributo che deve essere ovviamente sottratto. Per tale motivo dobbiamo immaginare la singola molecola posta in una microscopica cavità ricavata nel dielettrico, in cui è presente un campo medio $\mathbf{E}_{INT}$, e valutare il campo $\mathbf{E}_0$ nello spazio vuoto di questa cavità. Nel creare idealmente questa cavità, supporremo che la polarizzazione **P** del mezzo che la circonda mantenga il valore presente localmente nel mezzo in assenza della cavità stessa.
Considereremo separatamente il caso di dielettrico con **molecole apolari** e quello di dielettrico con **molecole polari** e supporremo inizialmente noto il valore di $\mathbf{E}_0$.

I.10.3.1. – Molecole apolari: Polarizzabilità atomica

Consideriamo un materiale isolante le cui molecole abbiano un momento di dipolo nullo quando non sono sottoposte all'azione di un campo elettrostatico. Diremo tali molecole **apolari**.
Per valutare la densità di polarizzazione **P** indotta da un campo elettrico applicato in tale mezzo, cominciamo col considerare l'effetto prodotto su ogni singola molecola da un campo $\mathbf{E}_0$ che per ora supponiamo noto, -----

La parte che segue sul testo può considerarsi facoltativa.

Si trova

$$\mathbf{p}_0 = \varepsilon_0 \alpha \mathbf{E}_0$$

dove la costante $\alpha = 4\pi R^3$ è detta **polarizzabilità atomica** del mezzo ed ha le dimensioni fisiche di un volume, mentre $\mathbf{E}_0$ è il campo sentito da
Il momento di dipolo $\mathbf{p}_0$ indotto in ciascun atomo è proporzionale al campo agente $\mathbf{E}_0$ tramite il coefficiente $(\varepsilon_0 \alpha)$. A causa del valore estremamente piccolo di quest'ultimo, campi anche elevati inducono in una molecola apolare un momento di dipolo di piccola entità. Ciò nonostante quando un dielettrico subisce l'azione di campo elettrico esterno, ogni atomo o molecola del mezzo acquista un momento di dipolo $\mathbf{p}_0$ così che l'effetto collettivo[1] è macroscopicamente osservabile. Possiamo valutare infatti la densità di polarizzazione $\mathbf{P}$ acquistata dal mezzo sommando i momenti di dipolo dei singoli atomi contenuti nell'unità di volume

$$\mathbf{P} = N\mathbf{p}_0 = N\varepsilon_0 \alpha \mathbf{E}_0$$

Come il momento di dipolo indotto in un atomo $\mathbf{p}_0 = \varepsilon_0 \alpha \mathbf{E}_0$, anche la densità di polarizzazione $\mathbf{P} = N\mathbf{p}_0$ risulta parallela e proporzionale al campo E_0 sentito dalle singole molecole del mezzo.

I.10.3.2. – Polarizzazione con molecole polari

Nel paragrafo precedente abbiamo considerato mezzi dielettrici in cui atomi e molecole hanno una struttura elettrica simmetrica così che non presentano un momento di dipolo intrinseco ma si polarizzano sotto l'azione di un campo elettrico applicato. Sono però frequenti anche dielettrici con molecole **polari**, che presentano distribuzioni di cariche asimmetriche e che quindi possiedono un momento di dipolo intrinseco $\mathbf{p}_0$ anche in assenza di un campo applicato.
Esempio tipico è quello delle molecole di acqua nelle quali i due atomi di idrogeno non sono disposti simmetricamente rispetto a quello di ossigeno. L'angolo θ tra le congiungenti i centri è di 105°. Questa struttura dà origine ad un momento di dipolo permanente enormemente più grande di quello che si può ottenere applicando un campo elettrico anche molto intenso a molecole simmetriche[2]. In assenza di un campo elettrico applicato, il momento di dipolo medio dell'unità di volume $\mathbf{P}$ risulta nullo dato che i momenti di dipolo intrinseci di tali molecole sono distribuiti in modo del tutto casuale, a causa degli urti dovuti alla agitazione termica che

1. Vale la pena di ricordare che in una mole di sostanza è presente un numero di sistemi elementari pari al numero di Avogadro N_A=6.0225·10^{23}mol^{-1}.
2. Ad esempio il momento di dipolo della molecola H_2O vale 6.2·10^{-30}Cm, mentre quello indotto in un atomo di idrogeno da un campo di 10^7V/m vale circa 10^{-33}Cm. La ragione va ricercata nel fatto che i valori tipici del campo elettrico nell'interno degli atomi sono dell'ordine di $10^{10} \div 10^{11}$ V/m , ben più intensi di quelli realizzabili in laboratorio.

avvengono incessantemente tra le molecole.
Quando si sottopone all'azione di un campo elettrico un dielettrico polare si ha un'azione di orientamento dei dipoli intrinseci e si genera una polarizzazione **P** del mezzo. L'effetto dell'orientamento dei dipoli preesistenti è di gran lunga più importante dell'effetto della deformazione che abbiamo descritto nei mezzi apolari e che, in questi casi, possiamo trascurare[3]. L'azione del campo elettrico che tende ad orientare i dipoli elementari è sempre disturbata dalla agitazione termica che tende a ridistribuirli in tutte le direzioni ed impedisce in generale un allineamento completo. Ad ogni temperatura tuttavia, come facciamo vedere nel seguito, si stabilisce una situazione di equilibrio caratterizzata da una somma non nulla dei momenti di dipolo elementari, cioè da una densità di polarizzazione diversa da zero.

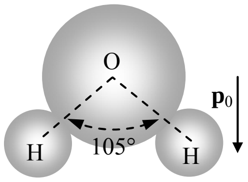


Fig. 21

Si trova

$$\mathbf{P} = \frac{N\,p_0^2\,\mathbf{E}_0}{3\,k\,T} = \varepsilon_0 \frac{N\,p_0^2}{3\,k\,T\,\varepsilon_0}\mathbf{E}_0 = N\varepsilon_0\alpha\mathbf{E}_0$$

anche nei mezzi polari **P** risulta proporzionale al campo $\mathbf{E}_0$ agente su ciascuna molecola, ma con una costante di proporzionalità α che però dipende dalla temperatura. L'espressione trovata per la densità di polarizzazione

$$\mathbf{P} = N\varepsilon_0\alpha\mathbf{E}_0$$

è analoga a quella trovata per i dielettrici apolari. È come se ogni molecola polare contribuisse mediamente alla densità di polarizzazione **P** con un momento di dipolo $\mathbf{p}_{equiv} = \varepsilon_0\alpha\mathbf{E}_0$.

I.10.3.3. – Relazione tra il campo E_0 che induce il momento di dipolo equivalente ed il campo medio interno al dielettrico (E_{INT})

Da misure dirette delle differenze di potenziale o del campo elettrostatico all'interno di opportune cavità scavate nello stesso dielettrico (cfr. § I.10.7) possiamo determinare il valore del campo medio $\mathbf{E}_{INT}$ all'interno del mezzo isolante. Questo non coincide esattamente con il campo $\mathbf{E}_0$ sentito da ciascuna molecola, in quanto al campo medio contribuisce anche la stessa molecola polarizzata.

Si trova che il campo sentito da ciascuna molecola vale:

3. Ovviamente, qualora il momento di dipolo indotto in ciascuna molecola dia luogo a fenomeni macroscopici di entità confrontabili a quelli dovuti all'orientamento dei dipoli intrinseci, i due fenomeni vanno considerati in sovrapposizione.

$$\boxed{\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_{\text{INT}} + \frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}} \qquad \text{(I.10.3)}$$

I.10.3.4. – Suscettività dielettrica. Dielettrici lineari

Siamo ora in grado di stabilire il legame che deve sussistere tra la polarizzazione $\mathbf{P}$ indotta in un mezzo ed il campo medio interno $\mathbf{E}_{\text{INT}}$, derivabile come gradiente del potenziale o misurabile direttamente in una opportuna cavità praticata nel dielettrico stesso.
Con buona approssimazione per tutti i materiali isolanti ed isotropi vale la relazione lineare tra $\mathbf{P}$ ed $\mathbf{E}_0$, che abbiamo ricavato precedentemente

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 N\alpha \mathbf{E}_0$$

Ricordando la relazione (I.10.3), otteniamo

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 N\alpha \left(\mathbf{E}_{\text{INT}} + \frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0} \right) = \varepsilon_0 N\,\alpha\,\mathbf{E}_{\text{INT}} + \frac{N\,\alpha\,\mathbf{P}}{3}$$

da cui

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \frac{N\,\alpha}{\left(1 - \frac{N\,\alpha}{3}\right)} \mathbf{E}_{\text{INT}} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}_{\text{INT}}$$

La quantità

$$\chi = \frac{N\,\alpha}{\left(1 - \frac{N\,\alpha}{3}\right)} \qquad \text{(I.10.4)}$$

prende il nome di **suscettività dielettrica** e rappresenta il coefficiente di proporzionalità tra il campo medio interno e la polarizzazione indotta. Il suo valore[4] fornisce una indicazione di come un dielettrico risponde all'azione di un campo elettrico e pertanto dipende dalle proprietà degli atomi o molecole del mezzo considerato.
Per mezzi non troppo densi, come i gas di densità normale, il termine $N\alpha$ risulta piccolo rispetto all'unità $(N\alpha << 1)$ e la suscettività è ben approssimata dalla relazione $\chi \cong N\alpha$. In tali casi quindi la suscettività dipende solo dalla densità del mezzo, come avremmo ottenuto direttamente trascurando l'effetto della mutua influenza tra i dipoli del mezzo.

Nel seguito prenderemo in esame soltanto il comportamento di dielettrici per i quali **la suscettività** in ogni punto del mezzo **è indipendente dal valore in esso assunto dal campo elettrico**, a parità delle altre variabili fisiche. Tali mezzi sono detti **lineari** in quanto in ogni loro punto la relazione tra campo applicato e polarizzazione è lineare

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0\, \chi(\mathbf{r}) \mathbf{E}_{\text{INT}}(\mathbf{r})$$

4. Dalla relazione (I.10.4) si deduce facilmente che la suscettività dielettrica di un mezzo è una grandezza adimensionale.

In altre parole nei **dielettrici lineari e isotropi**[5] **la suscettività è una quantità scalare e i vettori P ed $\mathbf{E}_{INT}$ sono paralleli e concordi**.
Inoltre un dielettrico lineare è detto omogeneo o non omogeneo a seconda che il valore di χ risulti costante o vari da punto a punto nel mezzo.

Per la risoluzione di problemi, in cui sono presenti dielettrici lineari, è conveniente introdurre una nuova costante caratteristica del mezzo, detta **costante dielettrica relativa al vuoto** e definita dalla relazione

$$K = 1 + \chi$$

così che la relazione tra **P** ed $\mathbf{E}_{INT}$ si può anche scrivere

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 (K - 1)\mathbf{E}_{INT}$$

I.10.4. – Campo elettrico in presenza di dielettrici

Vediamo se lo studio del comportamento dei dielettrici polarizzati fatto precedentemente ci permette di raggiungere lo scopo che ci eravamo prefissi: valutare il campo elettrico prodotto da distribuzioni di cariche note a priori, quando queste sono in presenza di un mezzo isolante. Come abbiamo più volte segnalato, il problema è complesso perché per determinare in ogni punto dello spazio il campo elettrico è necessario sommare al campo generato dalle distribuzioni reali di carica (**campo applicato $\mathbf{E}_A$**) quello prodotto dai dipoli indotti nel dielettrico stesso ($\mathbf{E}_P$). Quest'ultimo può essere determinato a sua volta sostituendo il mezzo polarizzato con le distribuzioni di cariche equivalenti, supposte nel vuoto e distribuite sulle superfici che delimitano i dielettrici con densità $\sigma_P = \mathbf{P} \bullet \mathbf{n}$ e nel volume di questi con densità $\rho_P = -\text{div}\,\mathbf{P}$. La vera difficoltà del problema risiede nel fatto che le distribuzioni equivalenti alla polarizzazione non sono in generale valutabili in quanto il valore della polarizzazione **P** acquistata dal mezzo isolante dipende oltre che dalla natura fisica del mezzo, anche dal valore del campo elettrostatico totale che agisce sulle singole molecole del dielettrico cioè dal campo che vogliamo determinare.
Per superare questo circolo vizioso, risulta conveniente introdurre il campo vettoriale ausiliario **D**, detto **vettore spostamento di Maxwell**, per la cui valutazione, come vedremo, in generale non è necessario conoscere a priori le cariche di polarizzazione.
Prima di passare alla trattazione generale, esaminiamo un caso dalla geometria molto semplice e simmetrica, in cui il problema può essere risolto direttamente quando sia assegnato il campo applicato $\mathbf{E}_A$.

ESEMPIO I.10.3. – LASTRA PIANA IN UN CAMPO UNIFORME

Una lastra piana di dielettrico omogeneo viene posta in un campo $\mathbf{E}_A$, *uniforme ed diretto perpendicolarmente alle superfici piane del dielettrico. Possiamo ottenere tale campo uniforme* $\mathbf{E}_A$ *con due distribuzioni pia-*

5. Esistono dielettrici anisotropi (solidi cristallini), le cui proprietà fisiche dipendono dalla direzione lungo cui vengono misurate. Per tali materiali la suscettività non è uno scalare ma un tensore così che la relazione di proporzionalità lineare tra **P** ed $\mathbf{E}_{INT}$ vale soltanto lungo le direzioni che coincidono con gli assi cristallografici.

ne di carica di densità $\pm\sigma_0$ *tali che* $\mathbf{E}_A = \dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\mathbf{n}$.

Per ragioni di simmetria è ragionevole ritenere che la lastra dielettrica omogenea si polarizzi uniformemente in direzione parallela al campo applicato. Le cariche equivalenti alla polarizzazione sono distribuite solo in superficie con densità $\sigma_P = \mathbf{P} \bullet \mathbf{n}$, *in quanto quelle di volume sono nulle* ($\rho_P = -\mathrm{div}\,\mathbf{P} = 0$). *La nuova situazione elettrica è quindi equivalente a quella che si avrebbe eliminando la lastra dielettrica e sostituendola con due distribuzioni piane di carica di densità* $\pm\sigma_P$, *come indicato in fig. 24.*

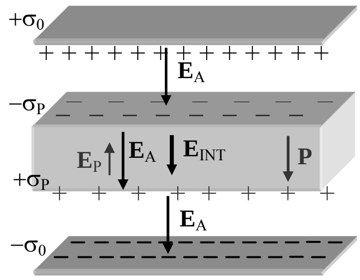


Fig. 24

Queste ultime generano a loro volta un campo elettrico, che indichiamo con $\mathbf{E}_P$, *solo nello spazio compreso tra le due superfici, quando siano trascurabili gli effetti di bordo. Quindi nelle due regioni di spazio vuoto, comprese tra le distribuzioni* $\pm\sigma_0$ *e le superfici del dielettrico, il campo rimane* $\mathbf{E}_A$, *mentre nella lastra il campo* $\mathbf{E}_{INT}$ *si ottiene dalla sovrapposizione del campo* $\mathbf{E}_A$ *e del campo* $\mathbf{E}_P$ *dovuto alla polarizzazione del mezzo dielettrico. Cioè*

$$\mathbf{E}_{INT} = \mathbf{E}_A + \mathbf{E}_P$$

Ricordando che $\mathbf{E}_P = -\dfrac{\sigma_P}{\varepsilon_0}\mathbf{n} = -\dfrac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0}$ *e che per i dielettrici lineari* $\mathbf{P} = \varepsilon_0(\mathrm{K}-1)\mathbf{E}_{INT}$, *si ha*

$$\mathbf{E}_{INT} = \frac{\mathbf{E}_A}{\mathrm{K}} \quad \text{e} \quad \mathbf{P} = \varepsilon_0 \frac{\mathrm{K}-1}{\mathrm{K}}\mathbf{E}_A$$

Notiamo subito che il campo elettrico all'interno della lastra dielettrica risulta ridotto di K *volte rispetto al valore che le stesse sorgenti* $\pm\sigma_0$ *producevano nella regione di spazio vuoto ora occupata dal dielettrico*[6], *come conseguenza del fatto che le cariche equivalenti di polarizzazione generano un campo di verso opposto al campo applicato* $\mathbf{E}_A$, *che ne compensa parzialmente gli effetti.*

I.10.5. – Equazioni fondamentali dell'elettrostatica in presenza di dielettrici. Vettore spostamento di Maxwell

Dalle considerazioni svolte finora possiamo trarre le seguenti conclusioni: se esponiamo un mezzo isolante esteso al campo $\mathbf{E}_A$ generato da eccessi di carica che noi poniamo sui corpi conduttori od isolanti, che chiameremo nel seguito cariche **libere**, questo assume una polarizzazione **P** che in gene-

---

6. *E' interessante notare che se al posto della lastra dielettrica fosse stata introdotta una lastra conduttrice, su questa sarebbero state indotte cariche superficiali dello stesso segno di quelle di polarizzazione ma di densità* $\sigma_0 = \varepsilon_0 E_A$ *in modo da rendere nullo il campo risultante nel conduttore (* $\mathbf{E}_{INT} = 0$ *). Una situazione identica si avrebbe con un dielettrico caratterizzato da una polarizzazione* $\mathbf{P} = \varepsilon_0\mathbf{E}_A$, *avente cioè costante dielettrica di valore infinito (* $\mathrm{K} = \infty$ *). Con questo significato talvolta si dice che un conduttore equivale ad un dielettrico di costante dielettrica infinita.*

rale varia da punto a punto e che dà a sua volta origine in tutti i punti dello spazio ad un campo additivo che può essere valutato sostituendo al dielettrico le distribuzioni di cariche equivalenti (che chiameremo semplicemente cariche di polarizzazione). Pertanto sia il campo medio interno ai materiali dielettrici che quello nello spazio ad essi esterno deve essere derivato dalle distribuzioni di carica complessiva, somma cioè di quella libera e di quella di polarizzazione. Avendo chiarito l'origine del **campo totale**, **del campo cioè che si può derivare come gradiente del potenziale e da cui dipendono le differenze di potenziale elettrostatico** (che possiamo misurare direttamente) conviene semplificare le nostre notazioni. Nel seguito indicheremo con il simbolo **E**, senza pedice, il campo elettrico nel generico punto dello spazio, sia esso interno o esterno ai dielettrici.
Dalle osservazioni precedenti segue che delle due equazioni fondamentali dell'elettrostatica nella loro forma integrale o differenziale

$$\oint\!\!\oint \mathbf{E} \bullet d\mathbf{S} = \frac{(Q_L)_{INT}}{\varepsilon_0} \qquad \mathrm{div}\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{\varepsilon_0}$$

$$\oint \mathbf{E} \bullet d\mathbf{s} = 0 \qquad \mathrm{rot}\mathbf{E} = 0 \quad \text{o} \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi$$

solo la prima deve essere modificata in presenza di dielettrici, in quanto bisogna tener conto anche della carica di polarizzazione, che come quella libera è sorgente di flusso del campo elettrostatico. Nelle regioni ove la carica è distribuita nel volume, il teorema di Gauss in forma differenziale diventa dunque

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = \frac{\rho_T}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_L + \rho_P}{\varepsilon_0}$$

Ricordando che $\rho_P = -\mathrm{div}\mathbf{P}$, si ha

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{\varepsilon_0} - \frac{\mathrm{div}\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{div}(\varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_L$$

Analogamente, alla superficie di separazione tra due mezzi diversi[7], il teorema di Gauss in forma integrale è dato dalla relazione

$$\oint\!\!\oint \mathbf{E} \bullet d\mathbf{S} = \frac{(Q_T)_{INT}}{\varepsilon_0} = \frac{(Q_L + Q_P)_{INT}}{\varepsilon_0}$$

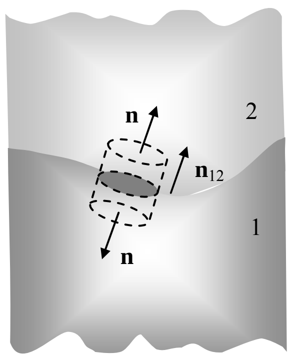


Fig. 26

Se scegliamo come superficie di integrazione un cilindretto di altezza infinitesima e basi di piccole dimensioni, poste da parti opposte rispetto alla superficie di separazione, parallelamente a questa (fig. 26), il flusso attraverso la superficie laterale è trascurabile, il campo elettrico su ciascuna base si può ritenere costante come le densità di carica sulla porzione di superficie di

7. Tali mezzi possono essere o due dielettrici diversi, o un dielettrico ed il vuoto, o un dielettrico ed un conduttore.

separazione così che vale la relazione

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \bullet \mathbf{n}_{12} = \frac{\sigma_T}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_L + \sigma_P}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_L + \mathbf{P}_1 \bullet \mathbf{n}_{12} - \mathbf{P}_2 \bullet \mathbf{n}_{12}}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow$$

$$[(\varepsilon_0 \mathbf{E}_2 + \mathbf{P}_2) - (\varepsilon_0 \mathbf{E}_1 + \mathbf{P}_1)] \bullet \mathbf{n}_{12} = \sigma_L$$

essendo $\mathbf{n}_{12}$ la normale orientata dal mezzo 1 al mezzo 2.
Dalle relazioni

$$\mathrm{div}(\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_L$$

$$[(\varepsilon_0 \mathbf{E}_2 + \mathbf{P}_2) - (\varepsilon_0 \mathbf{E}_1 + \mathbf{P}_1)] \bullet \mathbf{n}_{12} = \sigma_L$$

deduciamo che risulta conveniente introdurre il nuovo campo vettoriale $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, detto vettore **spostamento di Maxwell**, in quanto esso ha per sorgenti coulombiane le sole cariche libere. La sua divergenza, quindi, ed il suo flusso attraverso una superficie chiusa sono indipendenti dallo stato di polarizzazione dei dielettrici presenti

$$\mathrm{div}\mathbf{D} = \rho_L \qquad \text{e} \qquad \oint\!\!\!\oint \mathbf{D} \bullet d\mathbf{S} = (Q_L)_{INT} \tag{I.10.5}$$

così che la sua discontinuità alla superficie di separazione tra due mezzi dipende solo dalla presenza su questa di carica libera

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \bullet \mathbf{n}_{12} = \sigma_L \tag{I.10.6}$$

In assenza di cariche libere ($\rho_L = 0$ e $\sigma_L = 0$) si ha

$$\mathrm{div}\mathbf{D} = 0 \qquad \text{e} \qquad (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \bullet \mathbf{n}_{12} = 0$$

In questi casi il vettore **D** risulta **solenoidale** e non ha discontinuità normale passando da un mezzo all'altro.

Per quanto riguarda le dimensioni di questa nuova grandezza fisica, esse coincidono con quelle di **P** e quindi nel Sistema Internazionale la sua unità di misura è il C/m^2 .

Nei mezzi lineari inoltre, come vedremo in dettaglio nel seguito, è possibile stabilire una relazione di proporzionalità tra il campo elettrico ed il vettore **D** sfruttando quella esistente tra la densità di polarizzazione **P** ed il campo **E**. Seguendo gli stessi metodi che hanno portato alla determinazione del campo elettrostatico generato da distribuzioni di carica libera nel vuoto, è possibile valutare il vettore **D** anche senza conoscere lo stato di polarizzazione dei dielettrici presenti nel problema in esame e, quindi, risalire ad **E** e **P**.

I.10.5.1. – Campo D nei dielettrici lineari ed omogenei

Il campo vettoriale **D** che abbiamo definito in termini generali gode delle proprietà espresse dalle relazioni (I.10.5 e I.10.6) in presenza di qualsiasi dielettrico. In particolare nei dielettrici **lineari** il vettore spostamento di Maxwell risulta anche proporzionale ad **E** e a **P**. Infatti

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \varepsilon_0\chi\mathbf{E} = \varepsilon_0(1+\chi)\mathbf{E} = \varepsilon_0 \mathrm{K}\mathbf{E} = \varepsilon\mathbf{E}$$

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0\chi\mathbf{E} = \varepsilon_0(\mathrm{K}-1)\frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_0\mathrm{K}} = \frac{\mathrm{K}-1}{\mathrm{K}}\mathbf{D}$$

dove è stata introdotta la **costante dielettrica assoluta**

$$\varepsilon = \varepsilon_0\mathrm{K}$$

le cui dimensioni sono $\mathrm{C}(\mathrm{V\,m})^{-1}$, le stesse di ε_0.
Nei dielettrici lineari i vettori **P, D, E** sono **paralleli e concordi**.
Osserviamo ancora che nello spazio vuoto la densità di polarizzazione è nulla e quindi vale la relazione $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E}$, da cui segue che la suscettività del vuoto è nulla e la sua costante dielettrica vale $\mathrm{K} = 1$. Entro i corpi conduttori in equilibrio elettrostatico invece sono nulli sia **E** che **P** e quindi $\mathbf{D} = 0$.
Le linee di campo del vettore **D** sono pertanto parallele a quelle del vettore **E** sia nello spazio vuoto che entro i mezzi dielettrici lineari.
Limitiamoci ad esaminare il caso di dielettrici lineari ed omogenei ($\mathrm{K}(\mathbf{r}) = 1 + \chi(\mathbf{r}) = \mathrm{cost}$) per i quali è possibile stabilire interessanti analogie con alcune situazioni fisiche esaminate nello spazio vuoto.
Cominciamo con l'osservare che se non abbiamo introdotto cariche libere all'interno del volume ($\rho_\mathrm{L} = 0$), risulta nulla anche la densità volumetrica ρ_P della carica equivalente alla polarizzazione, anche quando **P** varia da punto a punto (cfr esempio I.10.6). Infatti dalle relazioni $\mathrm{K} = \mathrm{cost}$ e $\mathrm{div}\,\mathbf{D} = \rho_\mathrm{L} = 0$ si ottiene

$$\rho_\mathrm{P} = -\mathrm{div}\,\mathbf{P} = -\mathrm{div}\left(\frac{\mathrm{K}-1}{\mathrm{K}}\mathbf{D}\right) = -\frac{\mathrm{K}-1}{\mathrm{K}}\mathrm{div}\,\mathbf{D} = 0$$

Pertanto in un dielettrico lineare ed omogeneo che non abbia cariche libere nel volume, le cariche di polarizzazione si trovano tutte sulle superfici di discontinuità, anche quando la densità di polarizzazione varia da punto a punto.
Se invece $\rho_\mathrm{L} \neq 0$, è facile verificare che in ogni punto del dielettrico dove è presente carica libera, si sviluppa una polarizzazione che dà effetti elettrici pari a quelli che sarebbero prodotti da una carica di polarizzazione di densità ρ_P data da

$$\rho_\mathrm{P} = -\frac{\mathrm{K}-1}{\mathrm{K}}\mathrm{div}\,\mathbf{D} = -\frac{\mathrm{K}-1}{\mathrm{K}}\rho_\mathrm{L}$$

Notiamo che ρ_P risulta di segno opposto rispetto a ρ_L dato che la quantità $(\mathrm{K}-1)$ è sempre positiva. Gli effetti elettrici si possono perciò formalmente ricondurre ad una densità totale di carica che vale

$$\rho_\mathrm{T} = \rho_\mathrm{L} + \rho_\mathrm{P} = \rho_\mathrm{L} - \frac{\mathrm{K}-1}{\mathrm{K}}\rho_\mathrm{L} = \frac{\rho_\mathrm{L}}{\mathrm{K}} \qquad \text{(I.10.7.)}$$

Un risultato identico (cfr. esempio I.10.6) si ha nel caso in cui in un dielettrico omogeneo **molto esteso** (al limite infinito) vengono poste superfici cariche, come accade quando si introducono conduttori carichi. In questi casi gli effetti elettrici si possono derivare da una densità superficiale di carica totale, che risulta ridotta di un fattore K rispetto a quella vera (libera) posta sui conduttori

$$\sigma_T = \sigma_L + \sigma_P = \frac{\sigma_L}{K} \qquad \text{(I.10.8.)}$$

E' facile a questo punto confrontare le relazioni trovate per il campo elettrostatico generato da cariche libere nel vuoto con quelle che si ottengono se si sostituisce allo spazio vuoto un unico mezzo dielettrico lineare ed omogeneo di costante K.

Ne segue che se immergiamo dei conduttori in un **mezzo isolante omogeneo** di costante dielettrica K**, valgono ancora tutte le proprietà già viste per i conduttori carichi in equilibrio.** Le situazioni fisiche si possono sempre ricondurre a quelle che si avrebbero **nel vuoto, pur di sostituire le cariche** q_L **date ai conduttori con le cariche** $q' = q_L/K$ **, ridotte cioè del fattore** $1/K$ **rispetto a quelle vere.**

ESEMPIO I.10.6. – SFERA CONDUTTRICE IN UN DIELETTRICO OMOGENEO INDEFINITO

Consideriamo una sfera conduttrice di raggio R *immersa in un mezzo dielettrico omogeneo indefinito. Questa situazione ad esempio si realizza quando immergiamo in una vasca molto grande piena di olio una sfera di rame. Sia* σ_L *la densità di carica libera presente sulla sfera conduttrice. Data la simmetria del problema, nel mezzo dielettrico polarizzato tutti i campi devono essere radiali e la loro intensità nel generico punto dello spazio deve dipendere solo della distanza* r *del punto dal centro della distribuzione. Pertanto per la densità di polarizzazione risulta* $\mathbf{P} = \mathbf{P}(r)$. *Sappiamo inoltre che in questo caso all'interno del dielettrico non ci sono cariche di polarizzazione dato che* $\rho_L = 0$. *Essendo il dielettrico illimitato, si ha solo una distribuzione superficiale di carica sulla superficie di discontinuità del dielettrico con densità* $\sigma_P = \mathbf{P}(R) \bullet \mathbf{n} = -P(R)$ *a contatto con la superficie della sfera conduttrice. Su tale superficie la densità di polarizzazione vale*

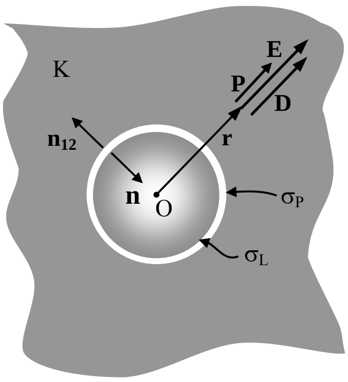


Fig. 27

$$\mathbf{P}(R) = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}(R) = \varepsilon_0 (K-1)\frac{\mathbf{D}(R)}{\varepsilon_0 K} = \frac{K-1}{K}\mathbf{D}(R)$$

Ricordando che alla superficie di separazione tra due mezzi deve essere soddisfatta la relazione $(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \bullet \mathbf{n}_{12} = \sigma_L$ *e che all'interno del conduttore (mezzo 1) il vettore* **D** *è nullo, si ha*

$$\left(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1\right) \bullet \mathbf{n}_{12} = \mathbf{D}_2(\mathrm{R}) \bullet \mathbf{n}_{12} = -\mathbf{D}_2(\mathrm{R}) \bullet \mathbf{n} = \sigma_L$$

essendo la normale $\mathbf{n}_{12}$ *orientata dal conduttore verso il dielettrico e quindi opposta ad* **n**. *Pertanto*

$$\sigma_P = \mathbf{P} \bullet \mathbf{n} = \frac{K-1}{K} \mathbf{D} \bullet \mathbf{n} = \frac{K-1}{K}\left(-\sigma_L\right) = -\frac{K-1}{K}\sigma_L$$

e

$$\sigma_T = \sigma_L + \sigma_P = \sigma_L\left(1 - \frac{K-1}{K}\right) = \frac{\sigma_L}{K}$$

In altre parole il campo fuori dalla sfera è quello che si avrebbe nel vuoto, se alla carica q_L *si sostituisse la carica* $q = \dfrac{q_L}{K}$

$$\mathbf{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_L}{K} \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

I.10.6. – Capacità dei condensatori con dielettrico

Esaminiamo come si comporta un sistema di conduttori quando sostituiamo lo spazio vuoto che li separa con un unico dielettrico lineare ed omogeneo di costante K. Tale processo può avvenire in due modi: mantenendo costanti le cariche sui conduttori (processo a carica costante) o mantenendo costanti i loro potenziali (processo a d.d.p. costante).
Abbiamo visto che nei dielettrici omogenei e lineari, in assenza di cariche libere ($\rho_L = 0$), risulta $\mathrm{div}\mathbf{P} = 0$ per cui si hanno cariche di polarizzazione solo sulle superfici di discontinuità ove $\sigma_P = \mathbf{P} \bullet \mathbf{n}$.
Se queste superfici di discontinuità coincidono con quelle di conduttori, immersi in un unico dielettrico omogeneo ed illimitato, il campo elettrico si può valutare immaginando che lo spazio tra i conduttori sia vuoto e che sulle superfici di questi sia distribuita la carica complessiva (somma di quella libera e di quella equivalente alla polarizzazione) con densità

$$\sigma_T = \sigma_L + \sigma_P = \sigma_L / K$$

Ciò equivale a considerare le sole cariche libere ridotte del fattore K, che è la costante dielettrica del mezzo. Data la linearità delle equazioni dell'elettrostatica, anche il campo elettrico e le differenze di potenziale risultano ridotte dello stesso fattore. Viene quindi realizzata una situazione in cui **a parità di carica libera** q_L **data ai conduttori del sistema (processo a carica costante), le d.d.p. sono ridotte rispetto alle corrispondenti che si avrebbero nel vuoto**.
Queste considerazioni valgono anche nel caso di un condensatore completamente riempito con un unico dielettrico omogeneo. Ricordando che la capacità esprime il rapporto costante tra la carica distribuita sulle armature (carica libera) e la d.d.p. tra queste, si ha

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{q_L}{\Delta\varphi_0/K} = K\frac{q_L}{\Delta\varphi_0} = KC_0$$

dove $\Delta\varphi_0$ e C_0 rappresentano rispettivamente la d.d.p. e la capacità quando tra le armature c'è spazio vuoto.
La capacità elettrostatica risulta aumentata di K volte.
Questo risultato vale anche nel caso di processo a d.d.p. costante. In questo caso si suppone che lo spazio tra le armature del condensatore viene riempito con il dielettrico mentre il condensatore resta collegato al generatore di f.e.m., così che la d.d.p. tra le armature non varia, $\Delta\varphi = \Delta\varphi_0$. Poiché questa corrisponde al lavoro per trasportare l'unità di carica dall'armatura negativa a quella positiva ($\Delta\varphi = -\int_-^+ \mathbf{E}\bullet d\mathbf{s}$) segue che, non essendo cambiata la geometria, il campo elettrico punto per punto nel dielettrico è lo stesso di quello che si aveva nello spazio vuoto.
Dal momento che il processo di polarizzazione del dielettrico è anche in questa situazione equivalente alla presenza di cariche superficiali di polarizzazione di segno opposto alle corrispondenti cariche libere distribuite sulle armature, il campo elettrico può mantenere costante il suo valore solo se il generatore ha fornito ulteriore carica al condensatore. In altre parole **nel processo a d.d.p. costante la carica libera sulle armature in presenza di dielettrico è maggiore di quella che si aveva quando c'era spazio vuoto.** Ricordando che $\mathbf{D} = \varepsilon_0 K\mathbf{E}$ e che nei punti del dielettrico prossimi ad una delle due armature vale la relazione $\mathbf{D}\bullet\mathbf{n} = \sigma_L$, possiamo dedurre che la carica libera è aumentata di K volte. Pertanto

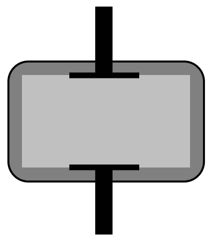
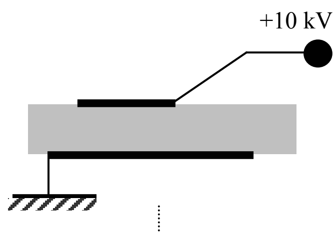


Fig. 34

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{Kq_0}{\Delta\varphi_0} = KC_0$$

Riassumendo i risultati precedenti possiamo affermare che: **se il processo di inserimento del dielettrico tra le armature del condensatore avviene a carica costante, la presenza del dielettrico riduce la d.d.p.**[8] **di** K **volte, mentre se avviene a d.d.p. costante il generatore fornisce ulteriore carica alle armature, così che questa diventa** K **volte maggiore. In entrambi i casi la capacità aumenta di** K **volte.**
Nei condensatori di uso tecnico le armature metalliche sono separate da uno strato di materiale isolante che ha anche la funzione meccanica di garantire una spaziatura costante tra queste oltre che la funzione di isolamento elettrico impedendo che le armature si tocchino. Fino a che le differenze di potenziale applicate non superano i limiti fissati dalla rigidità dielettrica del materiale isolante usato, il condensatore funziona come abbiamo visto per i conduttori nel vuoto ma la capacità del condensatore risulta aumentata di K volte.



Frequentemente i condensatori tecnici sono realizzati mediante lunghe strisce sottili di metallo, separate da strisce di isolante con costante dielettrica mag-

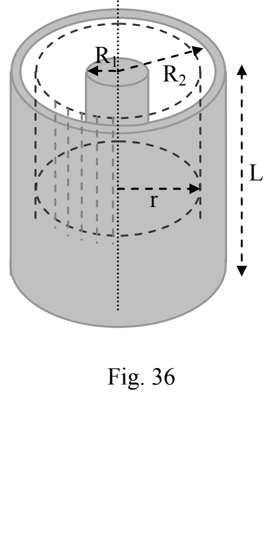


Fig. 36

8. La relazione $K=\Delta\varphi_0/\Delta\varphi$ definisce operativamente la costante dielettrica relativa K: infatti per determinare sperimentalmente il suo valore basta misura la d.d.p. tra le armature di un condensatore prima e dopo l'inserimento del dielettrico in un processo a carica costante e farne il rapporto.

giore dell'unità. Il tutto viene arrotolato in modo da assicurare una induzione quasi completa e da formare un cilindro con gli elettrodi di contatto alle estremità opposte. In altri condensatori detti di tipo ceramico si utilizza un cilindretto di materiale ceramico (p.e. titaniato di bario) con costante dielettrica particolarmente elevata (K $\cong$ 10000). Le due basi del cilindro sono metallizzate e costituiscono le armature ed il tutto è coperto di uno strato isolante per protezione (fig.34). Si realizzano così condensatori di elevata capacità ed in grado di sostenere d.d.p. particolarmente alte tra le armature.
Con materiali dielettrici di questo tipo si possono ottenere facilmente campi elettrici di intensità molto elevata. Supponiamo infatti di disporre un filo metallico sottile a contatto con una piastrina dielettrica di spessore tale da sostenere, senza rottura dell'isolamento, d.d.p. dell'ordine della decina di kV; l'altra superficie della piastrina sia messa a terra (fig. 35). Sappiamo che un materiale dielettrico con K $\rightarrow \infty$ si comporta come un conduttore pur impedendo il passaggio di cariche di conduzione. Ciò significa che il filo sottile vede la superficie del dielettrico sulla quale è appoggiato come una superficie a potenziale zero, e quindi si realizza una situazione in cui si ha una d. d. p. di circa 10 kV su uno spessore di pochi millesimi di millimetro. Se valutiamo il campo elettrico troviamo che l'intensità è data da: $E = \Delta\varphi/d = 10^4/10^{-5} = 10^9\,\mathrm{V/m}$. Naturalmente con campi così intensi si ottiene la ionizzazione dell'aria circostante il filo: l'aria diventa conduttrice e si ha anche l'emissione di elettroni dal metallo stesso. Dispositivi di questo tipo possono essere usati per produrre l'emissione pulsata di luce ultravioletta.

ESEMPIO I.10.8. – CONDENSATORE CILINDRICO CON DIELETTRICO OMOGENEO

Consideriamo un condensatore cilindrico di raggi R_1 *ed* R_2 *e lunghezza* L *completamente riempito di un dielettrico lineare ed omogeneo di costante* K. *Supponiamo inoltre che gli effetti di bordo siano completamente trascurabili. In tale ipotesi le distribuzioni di carica presenti sulle due armature si possono ritenere uniformi. Supponiamo che l'armatura interna sia quella positiva ed indichiamo con* λ *la carica libera per unità di lunghezza.*
Per valutare il campo elettrico tra le armature è conveniente far uso del vettore ausiliario **D** *che può essere determinato senza conoscere a priori le cariche di polarizzazione, in quanto le sue sorgenti colombiane sono solo le cariche libere. Per ragioni di simmetria i vettori* **E**, **P** *e* **D** *devono avere direzione radiale in piani ortogonali all'asse del sistema, per cui conviene valutare il flusso di* **D** *attraverso una superficie cilindrica coassiale di raggio* r *e di lunghezza* h. *Per il teorema di Gauss si ha*

$$\oint\!\!\oint \mathbf{D} \bullet d\mathbf{S} = D(r)2\pi r h = q_{L_{INT}} = \lambda h$$

da cui

$$\mathbf{D}(r) = \frac{\lambda}{2\pi r}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$$

La conoscenza di **D** *permette di valutare le altre grandezze elettriche*

$$\mathbf{E}(\mathrm{r}) = \frac{\mathbf{D}(\mathrm{r})}{K\varepsilon_0} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 K}\frac{1}{r}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 K r}dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 K}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Pertanto la capacità per unità di lunghezza vale

$$\frac{C}{L} = \frac{\lambda}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{2\pi\varepsilon_0 K}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} = K\frac{C_0}{L}$$

La capacità risulta aumentata di K *volte rispetto a quella che si ha quando tra le armature c'è spazio vuoto.*
Possiamo anche determinare le densità lineari di carica di polarizzazione. Sappiamo che $\mathbf{P} = \frac{K-1}{K}\mathbf{D}$ *e che* $\sigma_P = \mathbf{P} \bullet \mathbf{n}$ *. Segue che*

$$\mathbf{P}(R_1) = \mathbf{P}_1 = \frac{K-1}{K}\frac{\lambda}{2\pi}\frac{1}{R_1}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) \qquad e \qquad \sigma_1 = -P_1$$

$$\mathbf{P}(R_2) = \mathbf{P}_2 = \frac{K-1}{K}\frac{\lambda}{2\pi}\frac{1}{R_2}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) \qquad e \qquad \sigma_2 = +P_2$$

Le densità lineari di carica di polarizzazione si ottengono dalle relazioni

$$\lambda_1 = \sigma_1 2\pi R_1 = -\frac{K-1}{K}\lambda \qquad \text{e} \qquad \lambda_2 = \sigma_2 2\pi R_2 = +\frac{K-1}{K}\lambda$$

La densità totale di carica, da cui dipende E, *risulta*

$$\lambda_{1T} = \lambda + \lambda_1 = \lambda - \left(\frac{K-1}{K}\right)\lambda = \frac{\lambda}{K}$$

e analogamente

$$\lambda_{2T} = -\lambda + \lambda_2 = -\lambda + \left(\frac{K-1}{K}\right)\lambda = -\frac{\lambda}{K}$$

entrambe pari alla densità di carica libera ridotta di un fattore K.

ESEMPIO I.10.9. – CONDENSATORE CILINDRICO CON DUE STRATI DI DIELETTRICO

Consideriamo un condensatore cilindrico di lunghezza L *e raggi* R_1 *ed* R_2, *riempito completamente con due gusci dielettrici, cilindrici e coassiali, di spessore* h_1 *e* h_2. *Siano* K_1 *e* K_2 *le costanti dielettriche dei gusci ed* R_3 *il raggio della superficie di separazione tra essi. Ovviamente*

$$R_3 = R_1 + h_1 \quad e \quad R_2 = R_1 + h_1 + h_2 = R_3 + h_2$$

Supponendo che gli effetti di bordo siano completamente trascurabili e

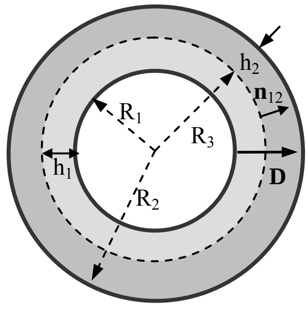


Fig. 37

procedendo in modo analogo al caso precedente, si ha

$$R_1 < r < R_2 \qquad \mathbf{D}(r) = \frac{\lambda}{2\pi r}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$$

$$R_1 < r < R_3 \qquad \mathbf{E}_1(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 K_1}\frac{1}{r}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$$

$$R_3 < r < R_2 \qquad \mathbf{E}_2(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 K_2}\frac{1}{r}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$$

La d.d.p. tra le armature vale

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{R_1}^{R_3} \mathbf{E}_1 \bullet d\mathbf{s} + \int_{R_3}^{R_2} \mathbf{E}_2 \bullet d\mathbf{s} =$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{K_1}\ln\frac{R_3}{R_1} + \frac{1}{K_2}\ln\frac{R_2}{R_3}\right] = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left[\left(\frac{R_3}{R_1}\right)^{\frac{1}{K_1}} \cdot \left(\frac{R_2}{R_3}\right)^{\frac{1}{K_2}}\right]$$

così che la capacità per unità di lunghezza risulta pari a

$$\frac{C}{L} = \frac{\lambda}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left[\left(\frac{R_3}{R_1}\right)^{\frac{1}{K_1}}\left(\frac{R_2}{R_3}\right)^{\frac{1}{K_2}}\right]}$$

Consideriamo ora il sistema che si ottiene da quello appena studiato inserendo tra i due dielettrici un sottile guscio cilindrico conduttore coassiale di raggio R_3. *Ancora nell'ipotesi che si possano trascurate gli effetti di bordo, sulla parte interna di tale guscio conduttore si affaccia una carica* $-q_1$, *uguale e contraria a quella dell'armatura interna di raggio* R_1, *mentre su quella esterna una carica pari a* q_1, *uguale e contraria a quella presente sull'armatura di raggio* R_2. *Questo nuovo sistema è quindi un sistema formato da due condensatori in serie di capacità*

$$\frac{C_1}{L} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left[\left(\frac{R_3}{R_1}\right)^{\frac{1}{K_1}}\right]} \qquad e \qquad \frac{C_2}{L} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left[\left(\frac{R_2}{R_3}\right)^{\frac{1}{K_2}}\right]}$$

Pertanto la capacità per unità di lunghezza ad essi equivalente vale

$$\frac{C}{L}=\frac{\frac{C_1}{L}\frac{C_2}{L}}{\frac{C_1}{L}+\frac{C_2}{L}}=\frac{\dfrac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left[\left(\frac{R_3}{R_1}\right)^{1/K_1}\right]}\;\dfrac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left[\left(\frac{R_2}{R_3}\right)^{1/K_2}\right]}}{\dfrac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left[\left(\frac{R_3}{R_1}\right)^{1/K_1}\right]}+\dfrac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left[\left(\frac{R_2}{R_3}\right)^{1/K_2}\right]}}=\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left[\left(\frac{R_3}{R_1}\right)^{1/K_1}\left(\frac{R_2}{R_3}\right)^{1/K_2}\right]}$$

formalmente identica a quella trovata per il condensatore cilindrico. In questo senso, anche se impropriamente, si dice che il condensatore è equivalente alla serie di due condensatori anche in assenza della guaina conduttrice di raggio R_3.
Valutiamo ora la densità di carica di polarizzazione σ_P *sulla superficie di discontinuità tra i due dielettrici.*

$$\sigma_1 = \mathbf{P}_1(R_3)\bullet\mathbf{n}_{12} = \frac{K_1-1}{K_1}D(R_3) = \frac{K_1-1}{K_1}\frac{\lambda}{2\pi R_3}$$

$$\sigma_2 = \mathbf{P}_2(R_3)\bullet\mathbf{n}_{21} = -\frac{K_2-1}{K_2}D(R_3) = -\frac{K_2-1}{K_2}\frac{\lambda}{2\pi R_3}$$

$$\sigma_T = \frac{\lambda}{2\pi R_3}\left(\frac{1}{K_2}-\frac{1}{K_1}\right)$$

E' facile verificare che la somma delle cariche di polarizzazione sulle tre superfici di raggio R_1, R_3 *ed* R_2 *dà per totale zero come ci si deve attendere per un dielettrico globalmente scarico.*

I.10.9. – Energia di un sistema di cariche in un dielettrico

Abbiamo già visto che l'energia elettrostatica di un sistema di cariche poste nello spazio vuoto, pari al lavoro esterno compiuto per realizzare la distribuzione stessa, può anche essere pensata localizzata nelle regioni dello stesso spazio ove è presente il campo elettrico. Si può seguire lo stesso procedimento logico per definire l'energia di un sistema di cariche o di conduttori carichi quando questi sono immersi in un mezzo dielettrico invece che nel vuoto. In questo caso dobbiamo aspettarci che la presenza del materiale dielettrico, a causa dei fenomeni di polarizzazione in esso presenti, modificherà i risultati ottenuti nel caso precedente.
Supponiamo infatti di costruire un sistema elettrostatico introducendo dei conduttori carichi in un mezzo dielettrico lineare ed omogeneo di costante dielettrica K. L'energia del sistema corrisponde al lavoro che dobbiamo spendere contro il campo elettrico per costruire il sistema portando elementi di carica infinitesimi dall'infinito. Anche in questo caso, come del resto si aveva per il sistema di cariche nello spazio vuoto, dobbiamo trasportare

solo le cariche **libere**, dato che le cariche di polarizzazione equivalgono all'insieme dei dipoli elementari che si sviluppano localmente nel mezzo dielettrico per effetto del campo elettrico risultante. Ciò nonostante, il lavoro per trasportare ulteriori cariche libere nel campo dei corpi carichi già posizionati risulta influenzato dai fenomeni di polarizzazione indotti nel mezzo. Infatti, durante il trasporto, le cariche sentono il campo elettrico risultante, che ha per sorgenti coulombiane non solo le cariche libere che abbiamo già trasportato, ma anche quelle di polarizzazione con cui, nel nostro modello, sostituiamo gli effetti della polarizzazione del dielettrico.

A parità di carica trasportata, **il lavoro fatto risulta minore rispetto a quello speso per costruire lo stesso sistema di cariche libere nel vuoto e, di conseguenza, risulta minore anche l'energia potenziale del sistema.** Infatti, come abbiamo già visto, ogni distribuzione di carica superficiale (tipicamente conduttore carico) o volumetrica introdotta nel dielettrico si circonda di cariche di polarizzazione caratterizzate da una densità che ha segno contrario a quello della corrispondente densità delle cariche. Abbiamo trovato infatti che nel caso di conduttori carichi $\sigma_P = -\frac{K-1}{K}\sigma_L$ e nel caso di distribuzioni volumetriche $\rho_P = -\frac{K-1}{K}\rho_L$.

Gli effetti elettrici delle cariche libere introdotte risultano perciò in parte compensati dalle cariche di polarizzazione, di segno opposto. Il campo risultante è pari a quello che le stesse distribuzioni genererebbero nello spazio vuoto se le loro cariche fossero ridotte di un fattore K. In ogni caso, anche se il mezzo isolante non è lineare ed omogeneo, la polarizzazione produce sempre effetti elettrici equivalenti a quelli dovuti a cariche di segno opposto a quello delle cariche reali introdotte ed **il campo elettrico che ne risulta ha intensità ridotta rispetto a quella che le stesse cariche libere produrrebbero nel vuoto**. La riduzione dell'intensità del campo comporta sempre una minore spesa di lavoro esterno per il trasporto delle cariche libere. In altre parole, **a parità** di cariche libere trasportate, si ha una minore energia potenziale elettrostatica immagazzinata nel sistema e conseguentemente una minore densità di energia elettrostatica nel mezzo dielettrico, rispetto a quella che si avrebbe nel vuoto.

I.10.9.1. – Densità di energia in un dielettrico

Si può dimostrare che:

$$U_E = \frac{1}{2}\iiint_{\substack{Vol\\E\neq 0}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \bullet \mathbf{D}(\mathbf{r})\,dV$$

Gli argomenti dei due paragrafi che seguono saranno trattati nell'esercitazione di mercoledì - giovedì

I.10.9.3 – Forze tra conduttori – Influenza del dielettrico

ESEMPIO I.10.12. – FORZE TRA LE ARMATURE DI UN CONDENSATORE PIANO

I.10.9.4. – Forza agente sul dielettrico

ESEMPIO I.10.13. – FORZA SU UNA LASTRA DIELETTRICA MENTRE VIENE INSERITA TRA LE ARMATURE DI UN CONDENSATORE PIANO

ESEMPIO I.10.14. – FORZA SU UNA LASTRA CONDUTTRICE MENTRE VIENE INSERITA TRA LE ARMATURE DI UN CONDENSATORE PIANO