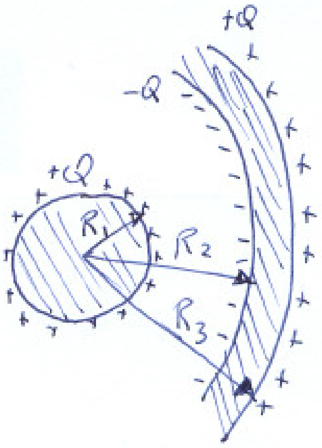
RISOLUZIONE PROVA DI ESONERO Fisica Generale II

per Ing. delle Telecomunicazioni – 7 maggio 2008

PROBLEMA 1.



$R_1 = 4$ cm $\qquad \varphi_0 = 100$ V

$R_2 = 10$ cm

$R_3 = 14$ cm

Sia Q la carica presente sulla sfera S di raggio R_1

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}\dfrac{\vec{r}}{r} & R_1 \le r \le R_2 \\ 0 & R_2 < r < R_3 \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}\dfrac{\vec{r}}{r} & r > R_3 \end{cases}$$

$$\varphi_0 = \int_{R_1}^{\infty} E\,dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,dr + \int_{R_3}^{\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,dr =$$

N.B. $\varphi_\infty = 0$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q \left(\frac{1}{R_3}\right) \Rightarrow$$

$$\varphi_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q = 4\pi\varepsilon_0\,\varphi_0 \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)} = 5 \cdot 10^{-10}\,C = 0.5\,nC$$

b) un punto P posto a distanza 12 cm dal centro del sistema si trova all'interno del guscio conduttore S_1. Poiché un conduttore all'equilibrio elettrostatico è equipotenziale posso affermare che

$\varphi(P) = \varphi(R_3)$ avendo indicato con $\varphi(R_3)$ il potenziale della superficie esterna del guscio

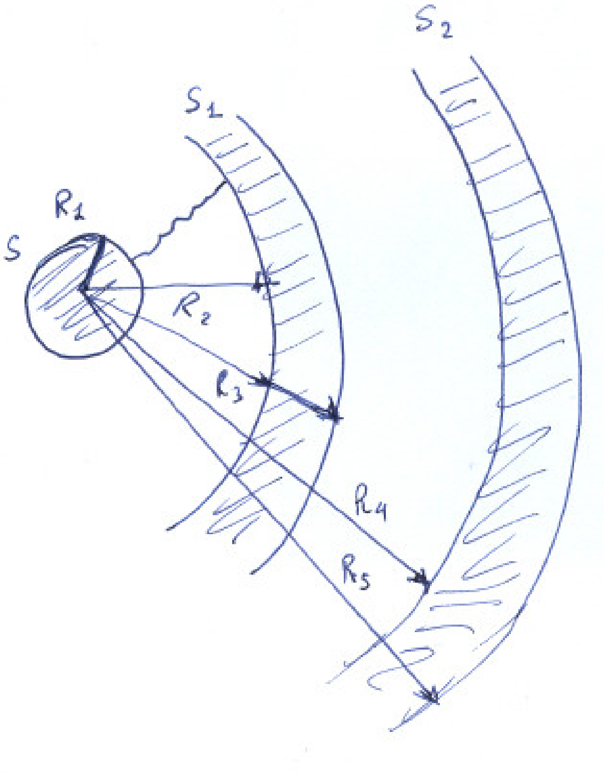
$$\varphi(R_3) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R_3} \Rightarrow \varphi(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R_3} = 32.1\ V$$

ovviamente anche $\varphi(R_2) = \varphi(R_3) = \varphi(P) = 32.1\ V$

verifico quindi che $\varphi_0 - \varphi(R_2) = 100\ V - 32.1\ V = 67.9\ V$

$\varphi_0 - \varphi(R_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \simeq 67.1\ V$ (N.B. ci sono le approx. sul valore di Q!)

c)



$R_4 = 16$ cm

$R_5 = 18$ cm

$\varphi_{S_2} = 90\ V$

• collegando con un filo conduttore la sfera S al guscio S_1 ottengo che

$q_{R_1} = 0$; $q_{R_2} = 0$ $q_{R_3} = +0.5\ \mu C$; $q_{R_4} = -0.5\ \mu C$

resta da determinare q_{R_5}

$$\varphi_{S_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_{R_5}}{R_5} \Rightarrow q_{R_5} = 4\pi\varepsilon_0 R_5 \varphi_{S_2} = 1.8\ \mu C$$

$q_{R_5} = 1.8\ \mu C$ (In pratica vuol dire che la carica in eccesso fornita al guscio S_2 è $(1.8-0.5)\mu C = 1.3\ \mu C$)

d) Il guscio S_2 sia ora costituito da materiale isolante con carica $Q' = 1\ pC$ uniformemente distribuita nel volume.

$q_{R_1} = 0$; $q_{R_2} = 0$; $q_{R_3} = +0.5\ \mu C$

$$\rho = \frac{Q'}{V} = \frac{Q'}{\frac{4}{3}\pi\left(R_5^3 - R_4^3\right)}$$

Per determinare il campo nel punto P' a distanza $R_{P'} = 17$ cm dal centro utilizzo il teorema di Gauss

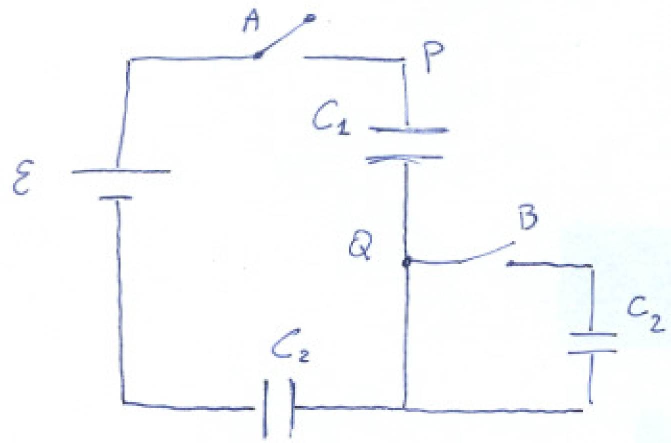
$$E(P') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_{P'}^2} Q_{INT} \quad \text{dove } Q_{INT} = q_{R_3} + \rho\cdot\frac{4}{3}\pi\left(R_{P'}^3 - R_4^3\right)$$

$$Q_{INT} = q_{R_3} + \frac{Q'}{\cancel{\frac{4}{3}\pi}\left(R_5^3-R_4^3\right)}\cdot\cancel{\frac{4}{3}\pi}\left(R_{P'}^3 - R_4^3\right) = q_{R_3} + Q'\frac{\left(R_{P'}^3 - R_4^3\right)}{\left(R_5^3 - R_4^3\right)}$$

$$= q_{R_3} + Q'\frac{\left(\frac{R_{P'}}{R_4}\right)^3 - 1}{\left(\frac{R_5}{R_4}\right)^3 - 1} = 0.5\ \mu C + Q'\frac{1.995\cdot10^{-1}}{4.238\cdot10^{-1}} = 0.5\ \mu C + 4.7\cdot10^{-13}\ C$$

$$\vec{E}(P') = E(P')\frac{\vec{r}}{r} = E(P')\hat{u}_r$$

PROBLEMA 2



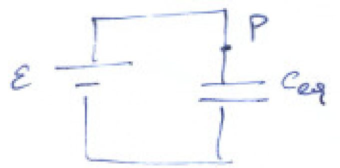
C_1 capacità di condensatore sferico di raggi $R_1 = 1$ cm
$R_2 = 2$ cm

$C_2 = 4$ pF

$\mathcal{E} = 100$ V

a) $C_1 = 4\pi\varepsilon_0 \dfrac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 2.23 \cdot 10^{-12}$ F $= 2.23$ pF

b) interruttore A chiuso. A regime



$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{4\,pF \cdot 2.23\,\cancel{pF}}{6.23\,\cancel{pF}} = 1.43\ pF$$

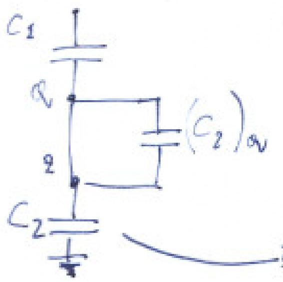
$$Q = C_{eq} \cdot \mathcal{E} = 143\ pC$$

$$\varphi_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{143\ pC}{2.23\ pF} = 62.8\ V$$

$$\varphi_2 = \mathcal{E} - \varphi_1 = 37.2\ V$$

$$\boxed{\begin{cases} \varphi_P = 100\ V \\ \varphi_Q = 37.2\ V \end{cases}}$$ Risposta alla b)

c) Apro "A" e chiudo "B"



N.B. i punti Q e 2 sono in corto $\Rightarrow (C_2)_Q$ è come se non ci fosse.

$$q_{C_1} = 143\ pC$$

$$\rightarrow q_{C_2} = 143\ pC$$

d) $$U = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C_{eq}} = \frac{1}{2}\frac{(143\ pC)^2}{(1.43\ pF)} = 7.15 \cdot \cancel{10^{-3}}\ 10^{-9}\ J =$$
$$= 7.15\ mJ$$