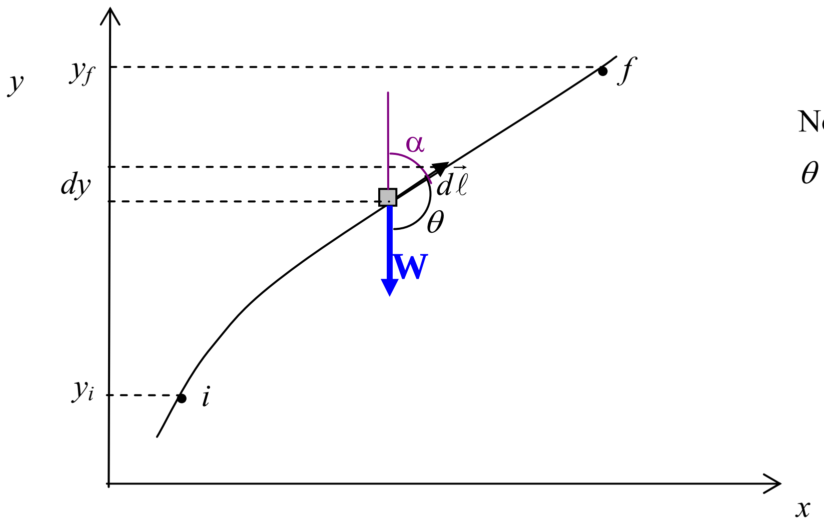
Le forze conservative e l'energia potenziale.

Le forze conservative

La definizione generale di lavoro di $\vec{F}(\vec{r})$ fra un punto iniziale i ed un punto finale f $W_{i\to f}=\int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{\ell}$ sembrerebbe implicare che in generale il lavoro debba dipendere dal percorso Γ lungo il quale avviene lo spostamento e che per poter essere calcolato sia necessario conoscere l'equazione analitica della curva Γ. Ciò non è sempre vero.

1) Lavoro della forza peso

Vogliamo calcolare il lavoro fatto dalla forza peso $\vec{W}_P = m\vec{g}$ mentre una m è spostata da un'altezza y_i ad un'altezza y_f seguendo una curva Γ.



Notare che:
$\theta = 180° - \alpha \Rightarrow \cos\,\theta = -\cos\,\alpha$

Il lavoro fatto dalla forza peso è:

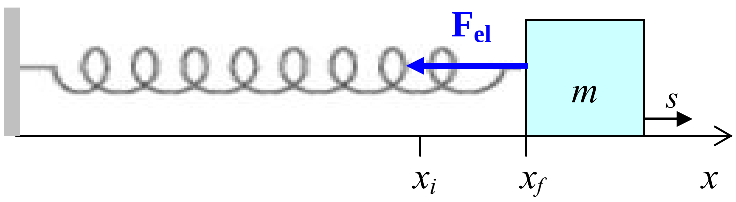
$$W_{P,i\to f}=\int_i^f \vec{F}_P\cdot d\vec{\ell}=\int_i^f mg\,d\ell\cos\theta=-mg\int_i^f d\ell\cdot\cos\alpha=-mg\int_i^f dy=-mg[y]_i^f=mgy_i-mgy_f\Rightarrow$$

(1) $$W_{P,i\to f}=mgy_i-mgy_f$$

Si trova che: il lavoro fatto dalla forza peso è indipendente dal percorso ma dipende solo da punto iniziale ed al punto finale.

2) Lavoro della forza elastica

Vogliamo calcolare il lavoro fatto dalla forza elastica $\vec{F}_{el} = -k\vec{x}$, durante uno spostamento lungo l'asse x, da un punto iniziale i (di coordinata x_i) ad uno finale f (di coordinata x_f) di una massa m collegata all' estremità della molla.



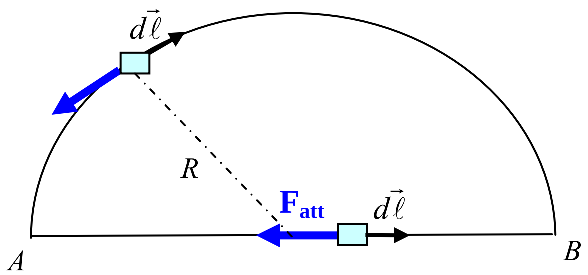
$$W_{el,i\rightarrow f} = \int_i^f \vec{F}_{el} \cdot d\vec{\ell} = \int_i^f -kxdx = -k\int_i^f xdx = -k\left[\frac{x^2}{2}\right]_i^f = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2 \Rightarrow$$

(2) $$W_{el,i\rightarrow f} = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$$

Si trova che il lavoro fatto dalla forza elastica è indipendente dal percorso ma dipende solo da punto iniziale ed al punto finale.

3) Lavoro della forza di attrito (dinamico)

Valutiamo il lavoro della forza di attrito $F_{attr} = \mu N$, durante lo spostamento di una massa m su un piano orizzontale ruvido da un punto iniziale i $=A$ ad un punto finale $f = B$ su due percorsi diversi.



a) lungo una semicirconferenza di raggio R

$$W_{attr,i\rightarrow f} = \int_A^B \vec{F}_{attr} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B \mu N \cdot d\ell \cdot \cos\pi = -\mu N\int_A^B d\ell = -\mu N \cdot \pi R$$

dove $\int_A^B d\ell = \pi R$ è la lunghezza della semicirconferenza AB di raggio R.

b) lungo il diametro della circonferenza di raggio R

$$W_{attr,i\to f}=\int_A^B \vec{F}_{attr}\cdot d\vec{\ell}=\int_A^B \mu N\cdot d\ell\cdot cos\,\pi=-\mu N\int_A^B d\ell=\mu N\cdot 2R$$

dove $\int_A^B d\ell=2R$ è la lunghezza del diametro $\overline{AB}$ della circonferenza di raggio *R*.

Si trova che il lavoro fatto dalla forza di attrito è:

- $W_{attr,i\to f}=-\mu N2R$ se il percorso è il diametro
- $W_{attr,i\to f}=-\mu N\pi R$ se il percorso è la semicirconferenza

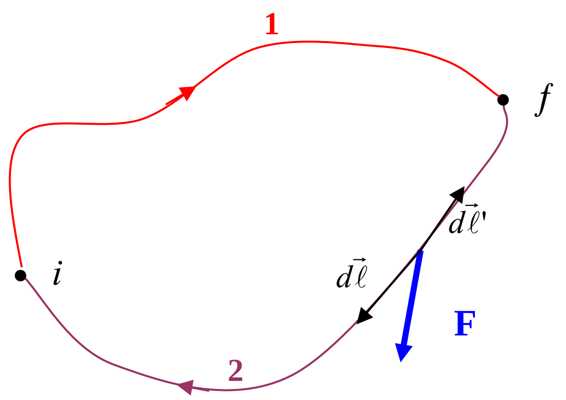
ovvero **dipende** dallo spostamento da punto iniziale al punto finale.

Conclusione: ci sono delle forze per le quali il lavoro compito per spostare un corpo da un punto ad un altro non dipende dal percorso: tali forze sono dette **FORZE CONSERVATIVE.**

Quindi la forza peso e la forza elastica sono forze conservative, l'attrito invece è una forza non conservativa.

Per le forze conservative, il lavoro svolto lungo un dato percorso fra due punti è uguale a quello svolto lungo un qualsiasi percorso fra gli stessi due punti: pertanto per valutare il lavoro svolto possiamo usare il cammino fra i due punti rispetto al quale il calcolo è più facile.

Definizione equivalente di forza conservativa: Il lavoro fatto da una forza conservativa lungo un qualsiasi percorso chiuso è nullo. $W_{i\to i}=\oint \vec{F}\cdot d\vec{\ell}=0$ infatti:



Il percorso chiuso $i\to i$ può essere visto come un percorso da $i\to f$ lungo la curva 1, più un percorso da $f\to i$ lungo la linea 2 $\Rightarrow W_{i\to i}=\oint \vec{F}\cdot d\vec{\ell}=W_{i\to f,1}+W_{f\to i,2}$

Osserviamo che:

a) la $\vec{F}$ è conservativa per cui il lavoro da $i\to f$ lungo la linea 1 è uguale a quello lungo la linea 2: $W_{i\to f,1}=W_{i\to f,2}$

b) il lavoro sulla linea 2 da $f\to i$ (spostamento $d\vec{\ell}$) è uguale ed opposto a quello $i\to f$ (spostamento $d\vec{\ell}'$) $\Rightarrow W_{i\to f,2}=\int_{i,2}^{f}\vec{F}\cdot d\vec{\ell}'=-\int_{f,2}^{i}\vec{F}\cdot d\vec{\ell}=-W_{f\to i,2}$

quindi $W_{i\to i}=\oint \vec{F}\cdot d\vec{\ell}=W_{i\to f,1}+W_{f\to i,2}=W_{i\to f,1}-W_{i\to f,2}=W_{i\to f,1}-W_{i\to f,1}=0$

L'Energia Potenziale

Per una forza conservativa, il lavoro $W_{i\to f}$ svolto per spostare un corpo da un punto iniziale *i* ad un punto finale *f* non dipende dal percorso ma è fissato solo dai due punti *i* ed *f* ovvero il lavoro non è più una grandezza che dipende dal percorso ma esso è determinato solo dai punti di partenza ed arrivo.
Possiamo pertanto pensare di costruire una funzione *U*, definita per ogni punto dello spazio, tale che $W_{i\to f}$ possa essere calcolato da valori di questa funzione nei punti *i* ed *f* a prescindere dal percorso seguito.

Infatti, se guardiamo

- la relazione (1) per la forza peso possiamo scrivere:

$$W_{P,i\to f} = mgy_i - mgy_f = U(y_i) - U(y_f) = -\Delta U(y) \qquad \text{con } U(y) = mgy + cost \quad \textbf{(3)}$$

- la relazione (2) per la forza elastica possiamo scrivere:

$$W_{el,i\to f} = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2 = U(x_i) - U(x_f) = -\Delta U(x) \qquad \text{con } U(x) = \frac{1}{2}kx^2 + cost \quad \textbf{(4)}$$

Generalizzando diciamo che nel caso del lavoro fatto da una forza conservativa $\vec{F}(\vec{r})$ possiamo costruire una funzione $U(\vec{r})$ tale che $W_{i\to f}$ può essere calcolato dai valori che la funzione $U(\vec{r})$ assume nei punti *i* ed *f* e precisamente poniamo:

(5)
$$\boxed{W_{i\to f} = U(\vec{r}_i) - U(\vec{r}_f) = -\Delta U}$$

La funzione $U(\vec{r})$ deve avere le dimensioni di un lavoro, ossia di una energia, ed è chiamata **ENERGIA POTENZIALE.**

L'aggettivo potenziale è dovuto al fatto che questa è, come vedremo in seguito, un'energia posseduta dal sistema che solo in certe condizioni (ossia potenzialmente) può trasformarsi in lavoro.

Unendo la definizione di Energia Potenziale (eq. 5) con la definizione generale di lavoro troviamo la formula (eq. 6) con cui calcolare la funzione $U(\vec{r})$ per ogni specifica forza conservativa $\vec{F}(\vec{r})$.

$$\begin{cases} W_{i\to f} = U(\vec{r}_i) - U(\vec{r}_f) = -\Delta U \\ W_{i\to f} = \int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{\ell} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \textbf{(6)} \quad \boxed{\Delta U = -\int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{\ell}}$$

E' evidente, dalla (6), che ogni forza conservativa avrà una specifica espressione per l'energia potenziale ad essa associabile.

Chiameremo **variazione infinitesima *dU*** dell'energia potenziale il lavoro infinitesimo fatto da una forza conservativa $\vec{F}$ su un percorso piccolissimo (infinitesimo) $d\vec{\ell}$:

$$dU = -\vec{F} \cdot d\vec{\ell} \qquad \text{e quindi} \quad \Rightarrow \Delta U = U_f - U_i = \int dU = -\int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

Osservazioni importanti:

1) La relazione (5) evidenzia che l'energia potenziale è posseduta da un corpo in quanto esso occupa una posizione nello spazio: energia associata alla configurazione del sistema.

2) Dalla definizione di $U(\vec{r})$ risulta chiaro che solo alle sue variazioni ΔU hanno un significato fisico, ossia sono collegabili al lavoro.

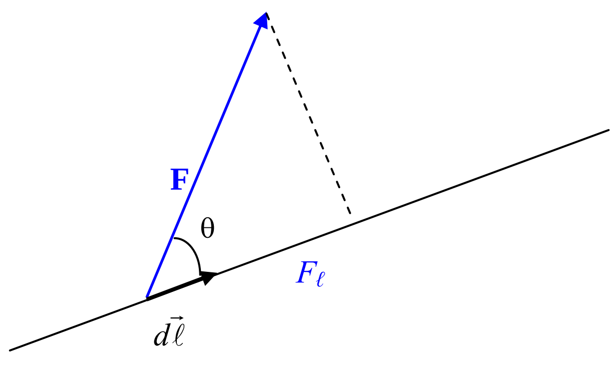
3) Spostiamo con una forza applicata $\vec{F}_{appl}$ un corpo *m*, sul quale agisce anche una forza conservativa $\vec{F}_{cons}$, da una posizione iniziale *i* ed una posizione finale *f* con velocità $\vec{v} = cost$.
Detto W_{appl} e W_{cons} rispettivamente il lavoro della forza applicata e della forza conservativa, segue dal teorema dell'energia cinetica che: $\Rightarrow \Delta K = 0 \Rightarrow W_{appl,i\to f} + W_{cons,i\to f} = 0$

$\Rightarrow W_{appl,i\to f} = -W_{cons,i\to f} = \Delta U$, ma $-W_{cons,i\to f} = W_{cons,f\to i} \Rightarrow$

$$\boxed{W_{appl,i\to f} = \Delta U = W_{cons,f\to i}}$$

ovvero: portando un corpo da una posizione iniziale *i* ad una finale *f*, la forza applicata svolge un lavoro che viene immagazzinato nel sistema come ΔU; questa energia può successivamente essere trasformata in lavoro della forza conservativa riportando il corpo da *f* ad *i*.

4) Se $\vec{F}$ è costante su un $d\vec{\ell}$ di una generica direzione ℓ, abbiamo:



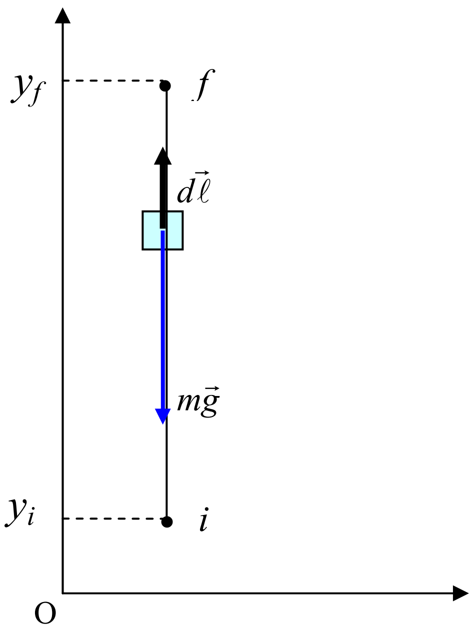
$$dU = -\vec{F} \cdot d\vec{\ell} \Rightarrow \Delta U = -F \cdot d\ell \cdot \cos\theta \Rightarrow dU = -(F\cos\theta) \cdot d\ell \Rightarrow dU = -F_\ell \cdot d\ell \Rightarrow$$

$$F_\ell = -\frac{dU}{d\ell}$$

quindi per la direzione $x \Rightarrow F_x = -\dfrac{dU}{dx}$

L'energia potenziale della forza peso.

La forza peso è conservativa ed abbiamo gia dedotto l'espressione della sua energia potenziale (vedi eq. 3). Qui la ridiscutiamo a partire dalla definizione generale di energia potenziale (eq. 6). Consideriamo uno spostamento di una massa *m* da un punto *i* ad altezza y_i ad un punto *f* ad altezza y_f. La forza peso è conservativa ed il percorso non è importante perciò scegliamo il percorso verticale che semplifica i calcoli.



Dalla definizione di $U(\vec{r}_i)$ e di forza peso $m\vec{g}$ scriviamo:

$$\Delta U = U_f - U_i = -\int_i^f m\vec{g}\cdot d\vec{\ell} =$$

$$= -\int_i^f mg\cdot dy\cdot \cos 180 = \int_i^f mgdy = mg(y_f - y_i)$$

$$\Rightarrow U_f - U_i = mg(y_f - y_i)$$

La variazione di energia potenziale dipende dalla posizione verticale del punto finale *f* rispetto alla posizione verticale del punto iniziale *i*.

Poiché solo le differenze di energia potenziale hanno senso fisico, per semplificare le relazioni, si conviene di porre $U = 0$ quando $y = 0$ e si assume il punto iniziale *i* coincidere con l'origine 0 ossia $y_i = 0 \Rightarrow \Delta U = U_f - U_i = U(y) = mgy$.

Il punto in cui l'energia potenziale è posta uguale a zero è detto punto di riferimento.

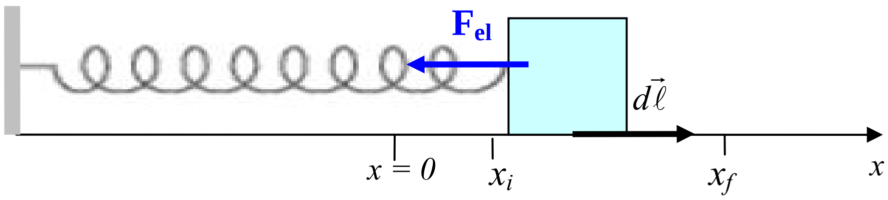
L'energia potenziale della forza peso può essere scritta come $\boldsymbol{U(y) = mgy}$ per un punto ad altezza y dal punto di origine *0* con $U(y=0)=0$, (ricordando che è sempre una differenza rispetto al punto di riferimento).

Significato: come detto nell'oss. 3, ma anche visto analiticamente (nell'esempio 1, lez. Lavoro) per portare, con velocità costante, una massa *m* ad altezza *y* da un piano serve una forza applicata che fa un lavoro *mgy* esattamente pari all'energia potenziale, quindi l'energia potenziale posseduta in una posizione da un massa per l'azione della forza peso è anche il lavoro fatto dalle forze applicate per portare la massa nella posizione occupata partendo dal punto di riferimento (a velocità costante).

Questa energia potrà trasformarsi in lavoro solo se la massa è lasciata libera di muoversi altrimenti resterà immagazzinata nel sistema.

L'energia potenziale della forza elastica.

Abbiamo già visto che la forza elastica è conservativa ed abbiamo già dedotto l'espressione della sua energia potenziale (vedi eq. 4). Qui vogliamo ritrovare la suddetta espressione partendo dalla definizione generale (eq. 6). Consideriamo uno spostamento di una massa m da un punto i di coordinata x_i ad un punto f di coordinata x_f.



Dalla definizione di $U(\vec{r}_i)$ e di forza elastica $-k\vec{x}$ scriviamo:

$$\Delta U = U_f - U_i = -\int_i^f -k\vec{x}\cdot d\vec{\ell} = \int_i^f kx\cdot dx = \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2$$

$$\Rightarrow U_f - U_i = \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2$$

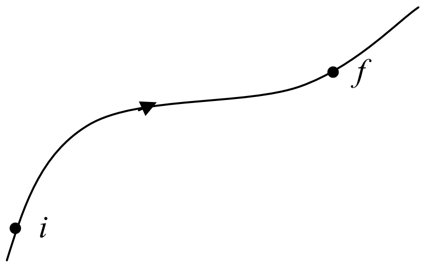
La variazione di energia potenziale dipende dalla posizione del punto finale f rispetto alla posizione del punto iniziale i.
Solo le differenze di energia potenziale hanno senso fisico, pertanto per semplificare le relazioni si sceglie il punto di riferimento dell'energia potenziale della forza elastica quello in cui la molla è a riposo ($x = 0$) e si conviene di porre $U(x=0)= 0$ Se si assume il punto iniziale i coincide con la posizione a riposo della molla ossia $x_i = 0 \Rightarrow \Delta U = U_f - U_i = U(x) = \frac{1}{2}kx^2$.

L'energia potenziale associata alla forza elastica può essere scritta come: $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$ per un spostamento x dell'estremo della molla dalla posizione di riposo assumendo che nella posizione di riposo sia $U(x=0)=0$ (ricordando che è sempre una differenza rispetto al punto di riferimento).

Significato: Per allungare (o comprimere) una molla con velocità costante di una quantità x (vedi oss. 3 e lez. Lavoro, esempio 2) serve una forza applicata che fa lavoro $\frac{1}{2}kx^2$, esattamente pari all'energia potenziale. Quindi l'energia potenziale posseduta da un molla allungata (compressa) è il lavoro fatto dalle forze applicate per allungarla (comprimerla). L'energia potenziale è posseduta dalla molla in quanto essa ha cambiato configurazione ed è stata acquistata quando le forze applicate hanno dato la nuova configurazione alla molla portandola nella posizione finale.
Questa energia potrà trasformarsi in lavoro solo se la molla è lasciata libera di muoversi altrimenti resterà immagazzinata nel sistema.

Energia meccanica e sua conservazione.

Supponiamo che una massa m sotto l'azione di una forza conservativa, si sposta da uno stato iniziale i, caratterizzato da una velocità $\vec{v}_i$ e da una posizione $\vec{r}_i$, ad uno stato finale f, caratterizzato da una velocità $\vec{v}_f$ e da una posizione $\vec{r}_f$.



In ogni caso $W_{i \to f} = \Delta K = K_f - K_i$

ma se la forza è conservativa vale anche $W_{i \to f} = -\Delta U = U_i - U_f$

quindi $K_f - K_i = U_i - U_f \Rightarrow K_f + U_f = K_i + U_i$

Definiamo **Energia Meccanica** la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale.

$E_M = K + U$, la precedente può essere scritta come $E_{M,i} = E_{M,f}$.

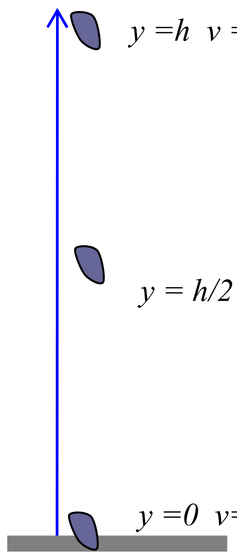
Poiché i ed f sono due punti generici la relazione precedente ci dice che:

a) $E_M = K + U = cost$, equivalentemente
b) $\Delta E_M = \Delta K + \Delta U = 0$,

Possiamo enunciare **il principio di conservazione dell'energia meccanica**: se in un sistema agisce solo una forza conservativa, l'energia meccanica si conserva ovvero non può cambiare nel tempo. L'energia cinetica e quella potenziale possono variare, istante per istante, ma in modo che la variazione dell'una sia compensata dalla variazione dell'altra.

1° Caso: Caduta libera

Massa *m* lasciata da ferma da un'altezza *h* da un piano.



$y = h \quad v = 0$ *solo energia potenziale* $E_{M,1} = mgh$

$y = h/2 \quad v \neq 0$ *sia energia potenziale che cinetica* $E_{M.2} = mg\frac{h}{2} + \frac{1}{2}mv^2$

$y = 0 \quad v = v_{Max}$ *solo energia cinetica* $E_{M,3} = \frac{1}{2}mv_{Max}^2$

con $E_{M,1} = E_{M,2} = E_{M,3}$

in particolare usando $E_{M,1} = E_{M,3}$ è possibile calcolare immediatamente la v_{Max}

$mgh = \frac{1}{2}mv_{Max}^2 \Rightarrow v_{Max} = \sqrt{2gh}$ (risultato già trovato per via cinematica)

Graficamente:

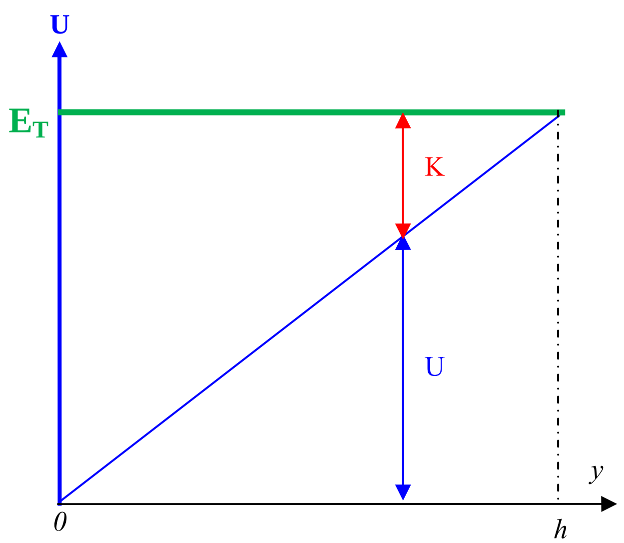


Grafico dell'Energia Potenziale

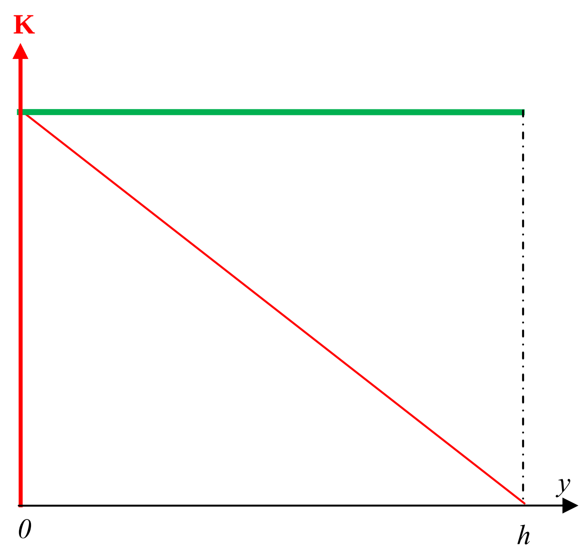


Grafico dell'Energia Cinetica

2 caso: Energia nel moto armonico

Consideriamo un sistema massa-molla orizzontale. Ad un generico istante t abbiamo:

$x(t)=A\cos(\omega t+\phi)$ $v(t)=-\omega A\, sen(\omega t+\phi)$ dove $x_{Max}=A$, $v_{Max}=\omega A$,

con una energia totale $E_T = U(t)+K(t) \Rightarrow$

$$E_T=\frac{1}{2}kx^2(t)+\frac{1}{2}mv^2(t)=\frac{1}{2}k(A\cos(\omega t+\phi))^2+\frac{1}{2}m(-\omega A sen(\omega t+\phi))^2=$$

$$=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\phi)+\frac{1}{2}m\omega^2A^2sen^2(\omega t+\phi)= \text{ (osservando che } \omega=\sqrt{\frac{k}{m}})$$

$$=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\phi)+\frac{1}{2}m\frac{k}{m}A^2sen^2(\omega t+\phi)=\frac{1}{2}kA^2(\cos^2(\omega t+\phi)+sen^2(\omega t+\phi))\Rightarrow$$

$$E_T=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}kx^2_{Max}=\text{costante}=\frac{1}{2}(m\omega^2)A^2=\frac{1}{2}m(\omega A)^2=\frac{1}{2}mv^2_{Max}$$

Conclusione: in un moto armonico U e K variano con la posizione ma la loro somma è costante ed è pari a $E_T=\frac{1}{2}kx^2_{Max}=\frac{1}{2}mv^2_{Max}$

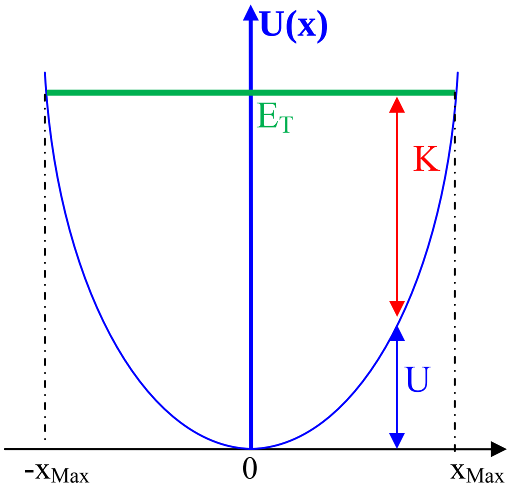


Grafico dell'Energia Potenziale

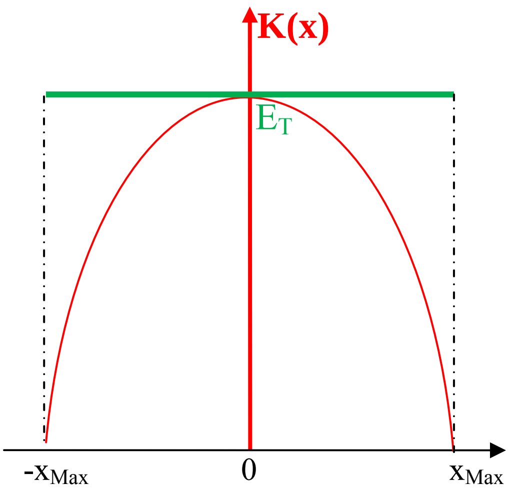


Grafico dell'Energia Cinetica

In particolare:

Ad $x = 0$ molla a riposo, $U = 0$ e K massima pari a $\frac{1}{2}mv^2_{Max}=E_T$

Ad $x = x_{Max}$ molla all'allungamento massimo, U massima pari a $\frac{1}{2}kx^2_{Max}=E_T$, K =0

Ad $x = -x_{Max}$ molla alla compressione massima U massima pari a $\frac{1}{2}kx^2_{Max}=E_T$, K =0

(si ricorda che x_{Max} e $-x_{Max}$ sono le coordinate dei punti di inversione del moto)

Considerazioni generali sui grafici dell'energia potenziale

Consideriamo una energia potenziale $U(x)$ funzione della sola coordinata x. L'energia meccanica per una particella di massa m che sente questo potenziale e ha velocità v in una posizione x è:

$$E_M = \frac{1}{2}mv^2 + U(x).$$

Possiamo da essa, calcolare la velocità:

$$v = \sqrt{\frac{2(E_M - U(x))}{m}}$$

che è reale solo se $U(x) \leq E_M$ quindi il moto di una particella avente energia meccanica E_M può aver luogo solo nella regione di spazio in cui si ha $U(x) \leq E_M$.

Alcuni casi:

a) Per $E_M = E_1$ (fig a), la particella può muoversi solo nella regione per $x_1 < x < x_2$ e in un punto generico x_i di tale regione essa ha energia cinetica K_i ed energia potenziale U_i. I punti x_1 ed x_2, dove $E_M = U(x_1) = U(x_2)$ e di conseguenza $K = 0$, si ha l'inversione del moto.

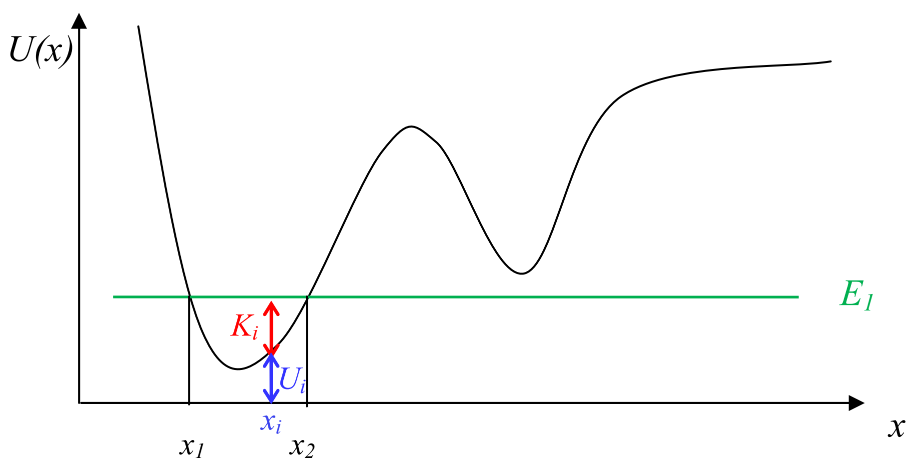


Fig *a)*

b) Per $E_M = E_2$ (fig b), la particella può muoversi nella regione $x_1 < x < x_2$ oppure $x_3 < x < x_4$, a seconda del punto di partenza del moto, ma non può passare da una regione altra perché dovrebbe transitare nella regione $x_2 < x < x_3$; regione non permessa perché in essa $U(x) > E_M$ (si dice, in questo caso, che esiste una ***barriera di potenziale***). Per poter passare da una regione all'altra, la particella deve avere una energia maggiore (caso c). In un punto generico x_i delle regioni permesse la particella ha energia cinetica K_i ed energia potenziale U_i

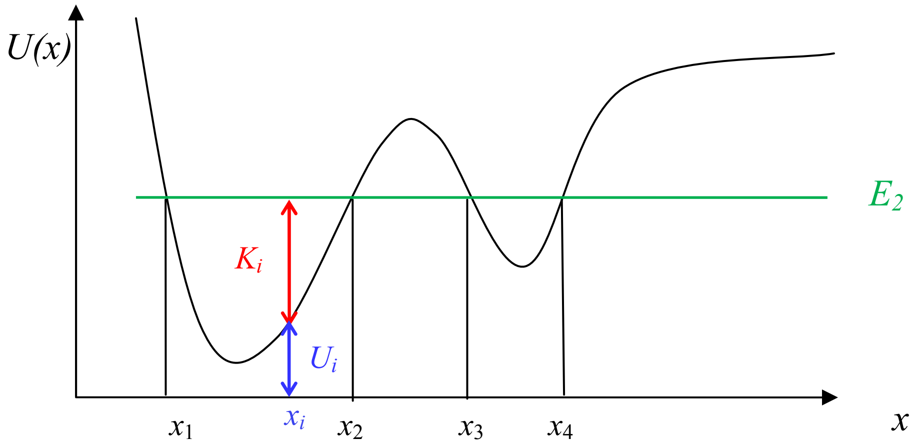


Fig. *b)*

c) Per $E_M = E_3 > E_2$ (fig c), la particella può muoversi in tutta la regione fra $x'_1 < x < x'_4$. In un punto generico x_i della regione permessa la particella ha energia cinetica K_i ed energia potenziale U_i.

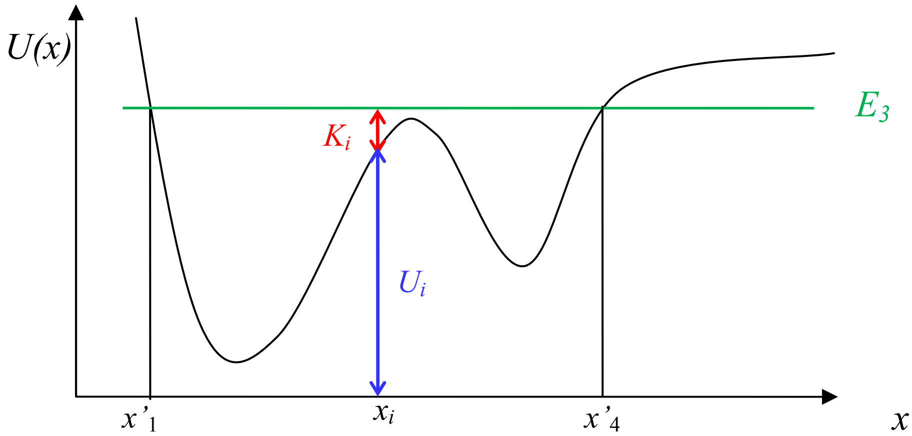


Fig. *c)*

d) Per $E_M = E_4$ la particella può muoversi liberamente in tutti i punti nella regione $x > x_1$ e in un punto generico x_i essa ha energia cinetica K_i ed energia potenziale U_i.

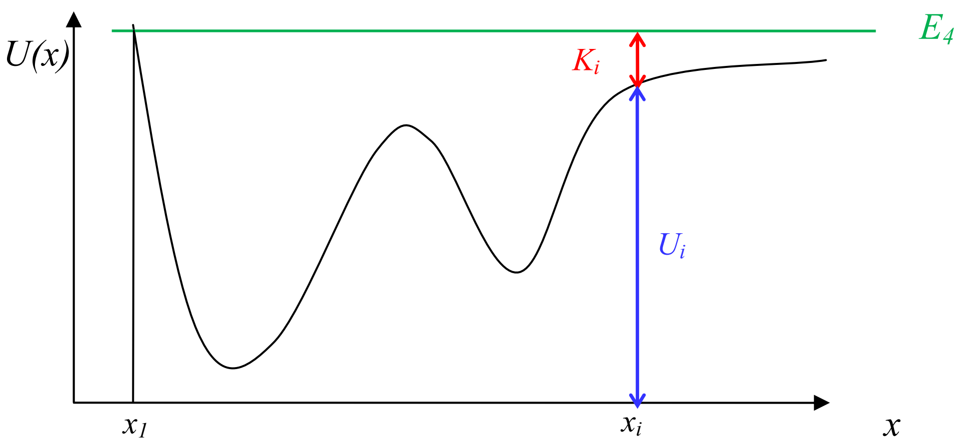


Fig. *d)*

Ricordiamo che data una funzione $U(x)$, i punti di massimo o di minimo relativi sono quelli in cui risulta $\frac{dU}{dx} = 0$. Sappiamo che $F = -\frac{\Delta U}{\Delta x} = -\frac{dU}{dx}$, quindi nei punti di massimo o di minimo relativi della energia potenziale $U(x)$ abbiamo $F = 0$ e quindi (da $F = ma, \Rightarrow a = 0$) i punti di massimo o di minimo relativi della energia potenziale $U(x)$ sono punti di equilibrio.

Punti di equilibrio stabili e instabili

C'è una significativa differenza però fra punti di massimo e di minimo dell'energia potenziale.

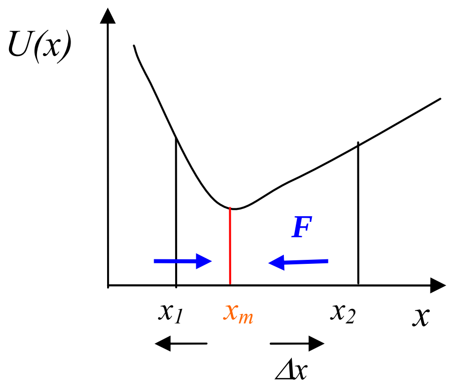
x_m = punto di minimo

Spostamento
da x_m verso x_1

$\Delta x = x_1 - x_m < 0$

$\Delta U = U(x_1) - U(x_m) > 0$

$\frac{\Delta U}{\Delta x} < 0 \Rightarrow F > 0$



Spostamento
da x_m verso x_2

$\Delta x = x_2 - x_m > 0$

$\Delta U = U(x_2) - U(x_m) > 0$

$\frac{\Delta U}{\Delta x} > 0 \Rightarrow F < 0$

Conclusione: se la particella è spostata di una quantità Δx da x_m, posizione di minimo di $U(x)$, si generano delle forze, opposte allo spostamento Δx, che riportano la particella nella posizione di mimino e pertanto x_m è un ***punto di equilibrio stabile.***

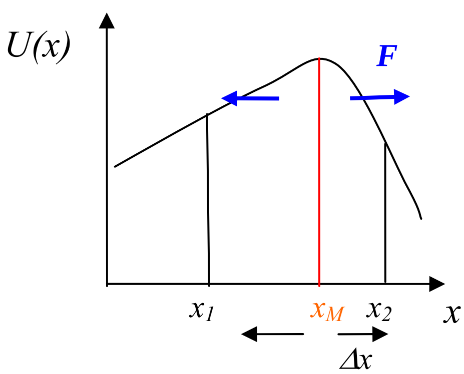
x_M = punto di massimo

Spostamento
da x_M verso x_1

$\Delta x = x_1 - x_m < 0$

$\Delta U = U(x_1) - U(x_m) < 0$

$\frac{\Delta U}{\Delta x} > 0 \Rightarrow F < 0$



Spostamento
da x_M verso x_2

$\Delta x = x_2 - x_m > 0$

$\Delta U = U(x_2) - U(x_m) < 0$

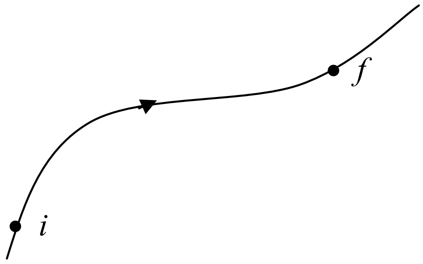
$\frac{\Delta U}{\Delta x} < 0 \Rightarrow F > 0$

Conclusione: se la particella è spostata di una quantità Δx da x_M, posizione di massimo di $U(x)$, si generano delle forze, concordi con lo spostamento Δx, che fanno allontanare sempre più la particella nella posizione di massimo e pertanto x_M è un ***punto di equilibrio instabile.***

Generalizzazione del principio di conservazione dell'energia meccanica

a) **Caso di *N* forze tutte conservative**.

Supponiamo ora che una massa *m* evolve da uno stato iniziale *i* ad uno stato finale *f* sotto l'azione *N* forze conservative. Sia $\vec{v}_i$ la velocità nello punto iniziale *i*, (posizione $\vec{r}_i$) e $\vec{v}_f$ quella nello stato finale *f* (una posizione $\vec{r}_f$).



In ogni caso, il lavoro totale fatto da tutte le forze può scriversi: $W_{T,i\to f} = \Delta K = K_f - K_i$ *(*)*
mentre per ogni singola forza conservativa il lavoro può essere calcolato dalla corrispondente espressione dell'energia potenziale

per la forza $\vec{F}_1 \Rightarrow W_{1,i\to f} = -\Delta U_1 = U_{1,i} - U_{1,f}$

per la forza $\vec{F}_2 \Rightarrow W_{2,i\to f} = -\Delta U_2 = U_{2,i} - U_{2,f}$

per la forza $\vec{F}_3 \Rightarrow W_{3,i\to f} = -\Delta U_3 = U_{3,i} - U_{3,f}$ *ecc,*

con $W_{T,i\to f} = W_{1,i\to f} + W_{2,i\to f} + W_{2,i\to f} \ldots\ldots = U_{1,i} - U_{1,f} + U_{2,i} - U_{2,f} + U_{3,i} - U_{3,f}$, *per (*)*$\Rightarrow$

$$K_f - K_i = U_{1,i} - U_{1,f} + U_{2,i} - U_{2,f} + U_{3,i} - U_{3,f} \quad \Rightarrow$$

$$K_f + U_{1,f} + U_{2,f} + U_{3,f}\ldots\ldots = K_i + U_{1,i} + U_{2,i} + U_{3,i}\ldots\ldots$$

Generalizzando la definizione di **Energia Meccanica** $E_M = K + \sum_{i=1}^{N} U_i$ (somma dell' energia cinetica e di tutte le energie potenziali) possiamo scrivere la precedente come

$$E_{M,i} = E_{M,f}.$$

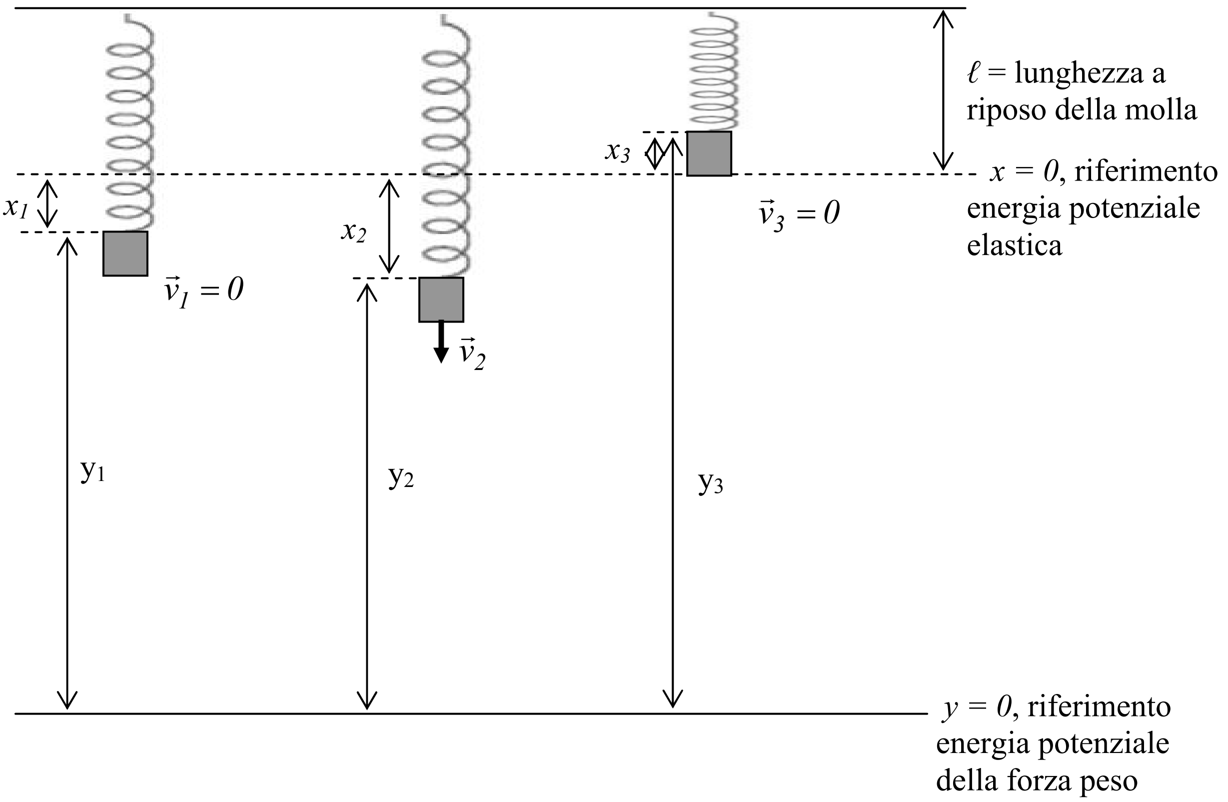
Poiché *i* ed *f* sono due punti generici, la relazione precedente ci dice che:

a) $E_M = K + \Sigma U = cost$, equivalentemente
b) $\Delta E_M = \Delta K + \Sigma \Delta U = 0$,

Se in un sistema agiscono solo forze conservative, l'energia meccanica si conserva, ovvero non può cambiare nel tempo. L'energia cinetica e i vari termini di energia potenziale possono variare, istante per istante, ma in modo tale che le variazioni si compensano fra loro.

Esempio di energia meccanica totale con più forze conservative

Massa *m* sospesa ad una molla verticale ideale di costante elastica *k*



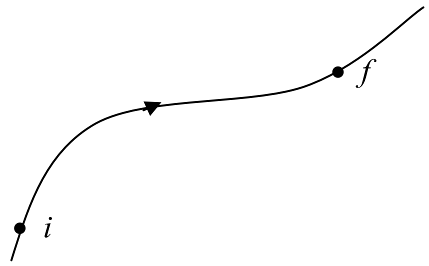
posizione 1, sistema in equilibrio stabile $E_M = \frac{1}{2}kx_1^2 + mgy_1$

posizione 2, massa in movimento $E_M = \frac{1}{2}kx_2^2 + mgy_2 + \frac{1}{2}mv_2^2$

posizione 3, molla alla massima compressione $E_M = \frac{1}{2}kx_3^2 + mgy_3$

B) **Presenza di una forza non conservativa fra *N* tutte conservative**.

Supponiamo ora che una massa m si sposta da uno stato iniziale i ad uno stato finale f sotto l'azione N forze conservative ed una non conservativa. Sia $\vec{v}_i$ la velocità nello punto iniziale i, (posizione $\vec{r}_i$) e $\vec{v}_f$ quella nello stato finale f (posizione $\vec{r}_f$).



In ogni caso, il lavoro totale fatto da tutte le forze può scriversi: $W_{T,i\to f} = \Delta K = K_f - K_i$ *(*)*
Assumiamo sia $\vec{F}_1$ la forza non conservativa; il suo lavoro sarà calcolabile solo come:

per la forza $\vec{F}_1 \Rightarrow W_{1,i\to f} = W_{nc,i\to f,} = \int_i^f \vec{F}_1 \cdot d\vec{\ell}$

mentre per ogni singola forza conservativa il lavoro può essere calcolato dalla corrispondente espressione dell'energia potenziale

per la forza $\vec{F}_2 \Rightarrow W_{2,i\to f} = -\Delta U_2 = U_{2,i} - U_{2,f}$

per la forza $\vec{F}_3 \Rightarrow W_{3,i\to f} = -\Delta U_3 = U_{3,i} - U_{3,f}$ *ecc,*

con $W_{T,i\to f} = W_{nc,i\to f} + W_{2,i\to f} + W_{2,i\to f} \ldots\ldots = W_{nc,i\to f} + U_{2,i} - U_{2,f} + U_{3,i} - U_{3,f}$ *per (*)*$\Rightarrow$

$$K_f - K_i = W_{nc,i\to f} + U_{2,i} - U_{2,f} + U_{3,i} - U_{3,f} \quad \Rightarrow$$

$$K_f + U_{2,f} + U_{3,f} = K_i + U_{2,i} + U_{3,i} + W_{nc,i\to f} \quad \text{con } E_M = K + \sum_{i=1}^{N} U_i$$

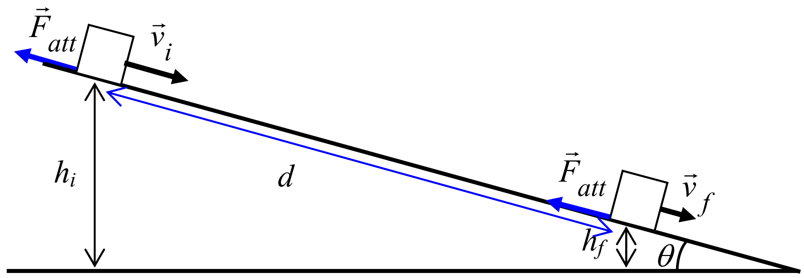
$$E_{M,f} = E_{M,i} + W_{nc,i\to f} \Rightarrow \Delta E_M = \Delta K + \Sigma\Delta U = W_{nc,i\to f}$$

Poiché i ed f sono due punti generici, la relazione precedente ci dice che in presenza di una forza non conservativa

a) $E_M = K + \Sigma U$ non è costante, equivalentemente
b) $\Delta E_M \neq 0$ *in particolare* $\Delta E_M = W_{nc,i\to f}$

Se in un sistema agiscono delle forza non conservative, l'energia meccanica totale non si conserva e la sua variazione è pari al lavoro fatto dalle forze non conservative. Poiché si trova che il lavoro fatto dalle forze conservative sul sistema è negativo (come vedremo fra poco), l'energia meccanica totale in presenza di forze non conservative diminuisce.

Verifichiamo che il lavoro fatto dalla forza di attrito (forza non conservativa) su un sistema è negativo.



$W_{i\to f} = \vec{F}_{att} \cdot \vec{d} = F_{att} \cdot d \cdot cos180 = -F_{att} \cdot d = -(\mu mgcos\theta) \cdot d < 0$ (negativo come detto)

$$\Delta E_M = W_{nc,i\to f} \Rightarrow \Delta K + \Delta U = -\mu mgdcos\theta \Rightarrow \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 + mgh_f - mgh_i = -\mu mgdcos\theta \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + mgh_f + \mu mgdcos\theta = \frac{1}{2}mv_i^2 + mgh_i \Rightarrow E_{M,f} + \mu mgd\cos\theta = E_{M,i}$$

L'energia meccanica diminuisce; quella finale sommata al lavoro della forza conservativa in valore assoluto è pari all'energia meccanica iniziale.

Generalizzazione della conservazione dell'energia.

Abbiamo appena osservato che in caso di presenza di forze non conservative l'energia meccanica $E_M = K+\Sigma U$ non si conserva.

Si possono definire, come vedremo in seguito, molte forme di energia: energia termica, energia potenziale elettrostatica, energia nucleare e altre ancora. Ciò che si osserva sperimentalmente è che la somma di tutte le forme di energia di un sistema isolato, detta **ENERGIA TOTALE *(E_T)***, si conserva.

Un sistema è tenuto insieme da forze di interazioni diverse e ad ognuna di esse è associata una energia specifica; pertanto possiamo dire che un sistema possiede, per il solo fatto di avere una certa configurazione, una **ENERGIA INTERNA *(E_{INT})*** data dalla somma di tutti questi termini di energia. L'energia totale di un sistema sarà data da:

$E_T = E_M + E_{INT} = K+\Sigma U + E_{INT} = cost$, sempre $\Rightarrow$ ***$\Delta E_T = 0$, sempre.***

Se, per la presenza di forze non conservative, $\Delta E_M = K + \Sigma U \neq 0 \Rightarrow \Delta E_T = \Delta E_M + \Delta E_{INT} = 0 \Rightarrow$

$\Delta E_M = -\Delta E_{INT}$

ovvero se in un sistema isolato si osserva una variazione dell'energia meccanica, ci sarà di conseguenza una variazione di segno opposto dell'energia interna. Infatti, quando siamo in presenza di attrito c'è una diminuzione dell'energia meccanica e si osserva un riscaldamento del sistema cioè un aumento di energia termica (interna) del sistema.