

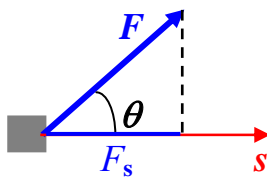
Lavoro ed Energia

Definizione di lavoro per una forza costante

Se una forza \vec{F} costante agisce su un corpo che effettua uno spostamento \vec{s} si dice che la forza compie un **lavoro W definito come:**

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos \theta = (F \cos \theta) \cdot s = F_s \cdot s$$

dove F_s è la componente della forza parallela allo spostamento.



Il lavoro è quindi una grandezza scalare le cui unità di misura sono:

$$N \cdot m = \frac{Kgm}{s^2} m = \frac{kgm^2}{s^2} = kg \left(\frac{m}{s} \right)^2 = \text{Joule} = J$$

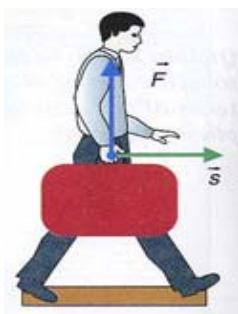
La definizione di lavoro può richiamare il significato della parola lavoro nel linguaggio comune, ma come si vedrà qui di seguito il lavoro in fisica è un concetto diverso. Infatti, in conseguenza della definizione di lavoro abbiamo:

- a) A parità di forza e spostamento in modulo, si ottiene il lavoro massimo se la forza è parallela allo spostamento ($\theta = 0, \cos \theta = 1$):

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos \theta = F \cdot s$$

- b) Una forza perpendicolare allo spostamento ($\theta = \pi/2, \cos \theta = 0$) compie sempre un lavoro nullo:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos \theta = (F \cos \theta) \cdot s = F_s \cdot s = 0$$



Portando una valigia orizzontalmente, la forza esercitata dal braccio non effettua lavoro!

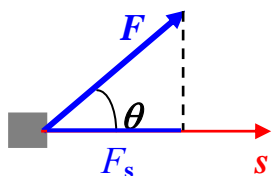
Un altro esempio di lavoro nullo si ha nel moto circolare uniforme, in cui la forza centripeta è in ogni istante perpendicolare alla velocità e quindi allo spostamento.

c) Se lo spostamento è nullo, $\vec{s} = 0$, il lavoro fatto dalla forza è nullo.



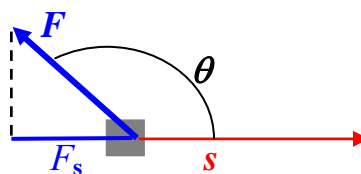
Una persona sostenendo una massa da fermo non compie lavoro.

d) Il lavoro può essere positivo o negativo.



$$0 < \theta < \pi/2, \cos \theta > 0$$

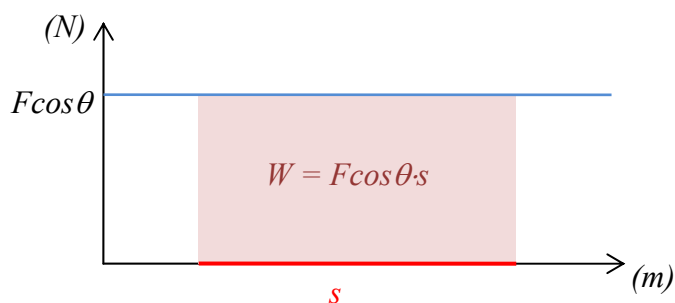
$W > 0$, forza parzialmente responsabile del moto
lavoro **motore**, cioè, favorevole al moto



$$\pi/2 < \theta < \pi, \cos \theta < 0$$

$W > 0$, forza non responsabile del moto
lavoro **resistente**, cioè, contrario al moto

Interpretazione grafica del lavoro: **area del rettangolo di base s ed altezza $F \cos \theta$:**

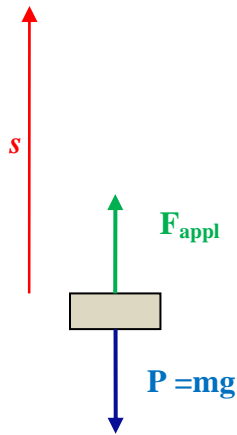


Se su un corpo, che effettua uno spostamento \vec{s} , agiscono più forze \vec{F}_i possiamo calcolare il lavoro fatto dalla singola forza $W_i = \vec{F}_i \cdot \vec{s}$ e definire il lavoro totale fatto da tutte le forze come:

$$W_{TOT} = \sum_i W_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{s} = \left(\sum_i \vec{F}_i \right) \cdot \vec{s} = \vec{F}_R \cdot \vec{s} \quad \text{con} \quad \vec{F}_R = \sum_i \vec{F}_i \quad \text{la risultante delle forze agenti sul corpo.}$$

Il lavoro della forza risultante è pari alla somma dei lavori delle singole forze agenti sul corpo.

Un esempio: sollevamento verticale di una massa m a velocità costante.



$$\vec{v} = \text{cost} \Rightarrow \vec{F}_{\text{appl}} + \vec{P} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{\text{appl}} = -\vec{P}$$

Lavoro di $\vec{F}_{\text{appl}} = W_{\text{appl}} = \vec{F}_{\text{appl}} \cdot \vec{s} = F_{\text{appl}}s = mgs$,
positivo perché è \vec{F}_{appl} ad imprimere il moto (\vec{F}_{appl} stesso verso di \vec{s})

Lavoro di $\vec{P} = W_p = \vec{P} \cdot \vec{s} = -Ps = -mgs$,
negativo perché \vec{F}_{appl} non è responsabile del moto (\vec{F}_{appl} verso opposto ad \vec{s})

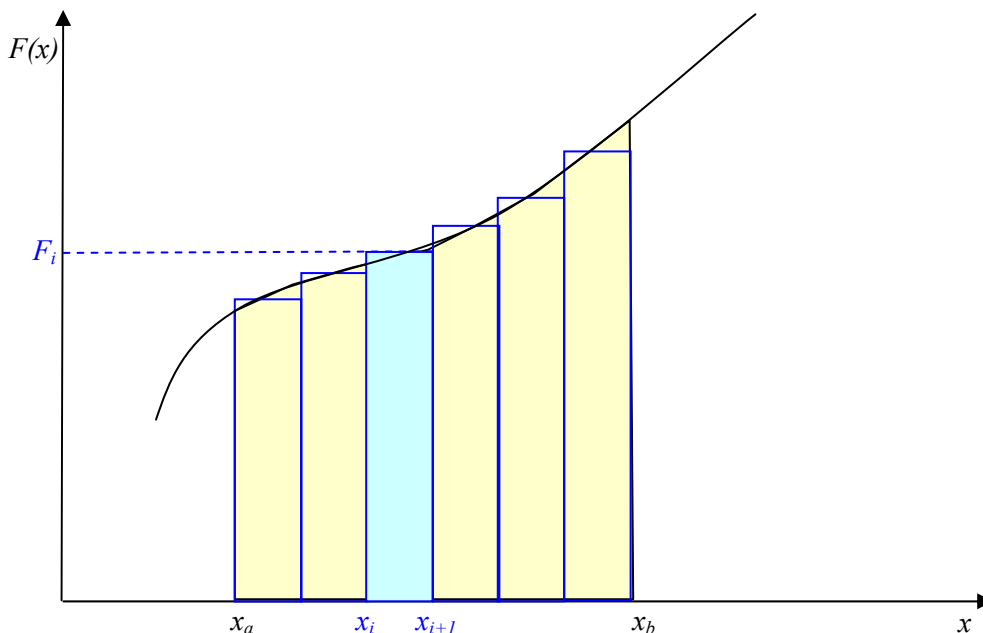
$$\text{Lavoro totale: } W_{\text{tot}} = W_{\text{appl}} + W_p = mgs - mgs = 0$$

Lavoro di forza parallela all'asse x , variabile con x , per uno spostamento lungo x

Consideriamo il caso di una forza, parallela all'asse x e variabile con x : $\vec{F} = F(x)\hat{i} \Rightarrow F = F(x)$.
Calcoliamo il lavoro per uno spostamento da un punto iniziale x_a ad uno finale x_b (forza parallela allo spostamento)

Prendiamo $n =$ numero intero e calcoliamo: $\Delta x = \frac{x_b - x_a}{n} = x_{i+1} - x_i$

In ogni Δx la forza può essere considerata costante e pari ad F_i , quindi il corrispondente lavoro possiamo calcolarlo come $\Delta W_i = F_i \cdot \Delta x$ (area celeste in figura)



Il lavoro totale fatto dalla forza $F(x)$ da x_a a x_b (area in giallo) può essere approssimativamente calcolato come: $W_{x_a \rightarrow x_b} \approx \sum_i F_i \cdot \Delta x$ e il calcolo diviene sempre più esatto al crescere di n ovvero per Δx sempre più piccoli:

$$W_{x_a \rightarrow x_b} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_i F_i \cdot \Delta x$$

Ottenendo il così detto **integrale definito della funzione $F(x)$ da x_a ad x_b**

$$W_{x_a \rightarrow x_b} = \int_{x_b}^{x_a} F(x) dx$$

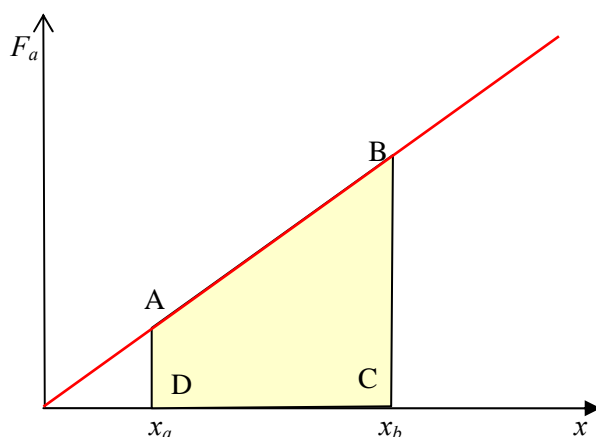
Esempio :Allungamento di una molla elastica ideale.

Calcoliamo il lavoro per allungare, con velocità costante, una molla da x_a a x_b ovvero il lavoro fatto dalla forza applicata $F_a = kx$.

Matematicamente:

$$W_{x_a \rightarrow x_b} = \int_{x_a}^{x_b} F_a(x) dx = \int_{x_a}^{x_b} kx dx = k \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x_a}^{x_b} = \frac{1}{2} kx_b^2 - \frac{1}{2} kx_a^2$$

Interpretazione geometrica: il lavoro è l'area del grafico di $F(x)$ in funzione di x , sottesa dalla curva fra i punti x_a e $x_b \Rightarrow$ l'area del trapezio ABCD = somma delle basi ($\overline{BC} + \overline{DA}$) per altezza (\overline{DC}) diviso 2.

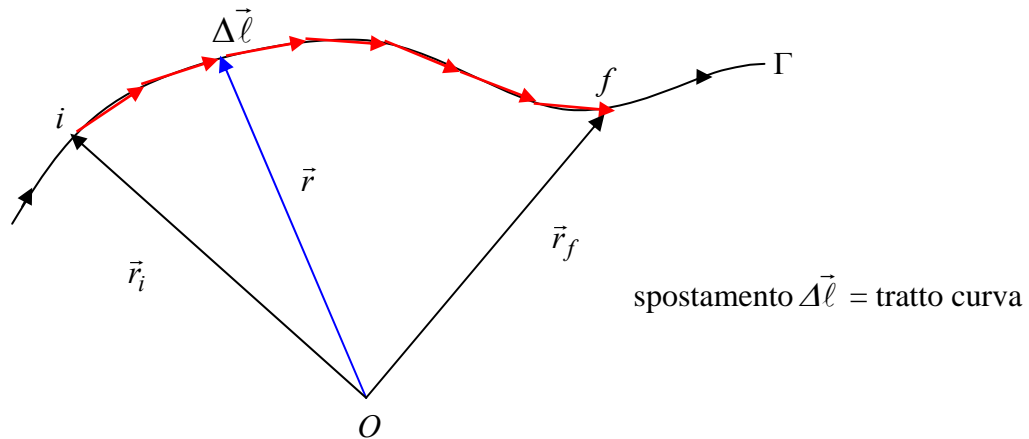


$$\overline{AD} + \overline{BC} = F(x_a) + F(x_b) = kx_a + kx_b; \quad \overline{DC} = (x_b - x_a)$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2} (kx_a + kx_b) \cdot (x_b - x_a) = \frac{1}{2} k (x_a x_b + x_b^2 - x_a^2 - x_a x_b) = \frac{1}{2} kx_b^2 - \frac{1}{2} kx_a^2$$

Caso generale: Lavoro di una forza variabile $\vec{F}(\vec{r})$

Lavoro di una forza variabile \vec{F} con la posizione \vec{r} per uno spostamento dalla posizione iniziale \vec{r}_i ad una posizione finale \vec{r}_f lungo una curva Γ .



Dividiamo il tratto di curva Γ fra i punti i e f in n (numero intero) di segmenti $\Delta\vec{\ell}_i$ (tutti con lo stesso modulo $\Delta\ell$) sufficientemente piccoli da poter assumere che lungo ciascuno di essi la forza $\vec{F}(\vec{r})$ sia costante (*) e pari ad \vec{F}_i .

Possiamo così usare la definizione di lavoro e calcolarlo per ogni tratto $\Delta\vec{\ell}_i$ ossia:

$$W_i = \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{\ell}_i$$

Il lavoro totale fra il punto i ed il punto f sarà: $W_{i \rightarrow f} = \sum_i W_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{\ell}_i$

Questo, a causa dell'assunzione (*), è un risultato approssimato che diventa sempre più vicino al valore vero quanto più $\Delta\ell$ diventa piccolo;

formalmente $W_{i \rightarrow f} = \lim_{\Delta\ell_i \rightarrow 0} \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{\ell}_i = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$, ottenendo il così detto **integrale di linea** di

$\vec{F}(\vec{r})$ lungo la linea Γ fra i punti individuati da \vec{r}_i e \vec{r}_f .

La grandezza $d\vec{\ell}$ è un elemento piccolissimo (infinitesimo) dello spostamento lungo la linea Γ .

La definizione più generale di lavoro di una forza variabile \vec{F} con la posizione \vec{r} per uno spostamento dalla posizione iniziale \vec{r}_i ad una posizione finale \vec{r}_f lungo una curva Γ è:

$$W_{i \rightarrow f} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

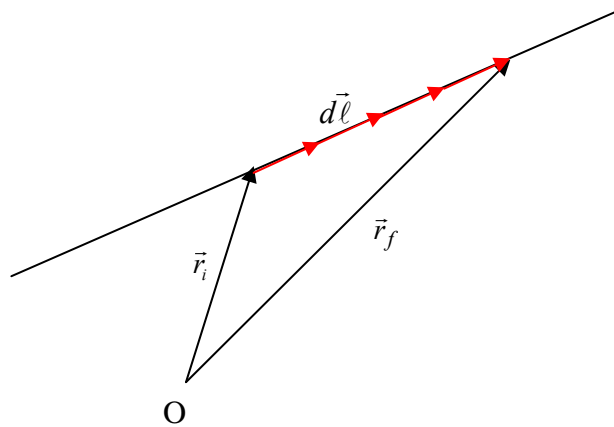
(2)

Questa definizione è basata sul concetto di **lavoro infinitesimo dW** , ovvero il lavoro fatto da una forza \vec{F} su un percorso piccolissimo (infinitesimo) $d\vec{\ell}$ come:

$$(3) dW = \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \quad \text{e quindi} \quad \Rightarrow W_{i \rightarrow f} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} dW = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

La definizione (2) è in accordo con la definizione iniziale (1); infatti se \vec{F} è costante e la curva Γ è una retta si ha :

$$W_{i \rightarrow f} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \vec{F} \cdot \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} d\vec{\ell} = \vec{F} \cdot (\vec{r}_f - \vec{r}_i) = \vec{F} \cdot \vec{s}$$



Teorema dell' energia cinetica

Il lavoro collega la forza agente su un corpo con lo spostamento da esso effettuato; ma se su un corpo agisce una forza, per la seconda legge della dinamica, sappiamo che si osserva anche una variazione della velocità del corpo.

Si può pertanto pensare ad una relazione fra il lavoro fatto da una forza su un corpo e la sua variazione di velocità.

Per la dimostrazione, consideriamo un caso semplice: una forza $F(x)$ variabile con x , agente parallelamente alla direzione x su un corpo di massa m .

Calcoliamo il lavoro da essa fatto per uno spostamento lungo x da una posizione iniziale i ad una finale f :

$$W_{i \rightarrow f} = \int_i^f F(x) \cdot dx \quad \text{ma} \quad F(x) = ma = m \frac{dv}{dx} \quad \Rightarrow$$

$$W_{i \rightarrow f} = \int_i^f F(x) \cdot dx = \int_i^f m \frac{dv}{dt} \cdot dx = \int_i^f m \cdot dv \frac{dx}{dt} = \int_i^f mvdv \quad \text{dove si è usata la definizione } v = \frac{dx}{dt}.$$

Se indichiamo v_i e v_f le velocità della massa m rispettivamente nelle posizioni i ed f otteniamo

$$W_{i \rightarrow f} = \int_i^f F(x) \cdot dx = m \left(\frac{v_f^2}{2} - \frac{v_i^2}{2} \right) = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

Questo risultato sebbene ottenuto in un caso particolare, si può dimostrare essere di validità generale.

Se per un corpo di massa m che vi muove con velocità v associamo una nuova grandezza K definita come:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad \left(\text{dimensioni } \text{kg} \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 = \text{kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = \text{Nm} = \text{Joule} = \text{J} \right)$$

possiamo scrivere:
$$W_{i \rightarrow f} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = K_f - K_i = \Delta K \Rightarrow \quad (4)$$

Chiameremo questa grandezza K : **Energia Cinetica**.

La relazione (4) stabilisce l'equivalenza fra il lavoro fatto da una forza su un corpo e la variazione di energia cinetica.

L'energia cinetica è una grandezza che possiamo associare allo stato di moto (velocità v) della massa m ovvero è una "proprietà" del corpo quindi l'energia cinetica di un corpo di massa m velocità v , pari a $\frac{1}{2}mv^2$, rappresenta la capacità di un corpo in movimento di compiere lavoro in base alla relazione:

(5)

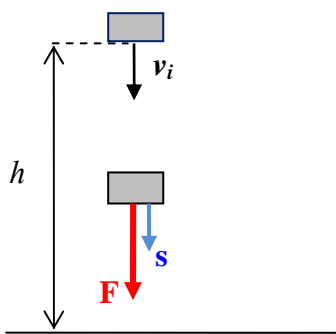
$$W_{i \rightarrow f} = \Delta K \quad \text{Teorema dell' Energia Cinetica}$$

Questo ci permette di introdurre il concetto generale di **ENERGIA**: essa è una grandezza scalare, che si manifesta in numerose forme (o tipi) associabile allo stato di un sistema e rappresenta la capacità del sistema di produrre lavoro.

L'energia cinetica è l'energia associata allo stato di moto un sistema (corpo) ovvero la capacità di un corpo m dotato di velocità di produrre lavoro. Maggiore è la velocità, a parità di m , maggiore è l'energia cinetica, maggiore il lavoro che il corpo può dare.

Il teorema dell'energia cinetica (eq. 5) evidenzia che se il lavoro delle forze agenti è positivo, esso è "fatto sul corpo" e l'energia cinetica del corpo aumenta. Se il lavoro è negativo, esso è "fatto dal corpo" per vincere le forze applicate e quindi l'energia cinetica del corpo diminuisce. Chiariamo questo con due esempi.

Esempio 1): Massa m in caduta libera lasciata da una altezza h da un piano con velocità \vec{v}_i verticale verso il basso.



$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s = mgh > 0$$

$$\Delta K = W \Rightarrow K_f - K_i = mgh > 0$$

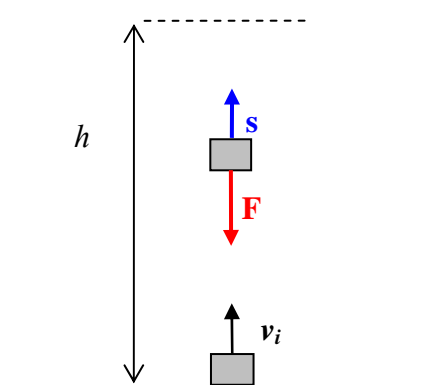
$$K_f > K_i \Rightarrow$$

Lavoro positivo compiuto dalla forza peso, energia cinetica aumenta:

In particolare: $\frac{1}{2}mv_f^2 > \frac{1}{2}mv_i^2 \Rightarrow v_f > v_i$
(come già noto)

Esempio 2): Massa m lanciata, dal suolo, verticalmente verso l'alto con velocità \vec{v}_i .

Sia h l'altezza della massa quando la velocità è \vec{v}_f



$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos \pi = -mgh < 0$$

$$\Delta K = W \Rightarrow K_f - K_i = -mgh < 0$$

$$K_f < K_i \Rightarrow$$

Lavoro negativo, energia cinetica diminuisce:

In particolare: $\frac{1}{2}mv_f^2 < \frac{1}{2}mv_i^2 \Rightarrow v_f < v_i$
(come già noto)

La potenza

Può essere importante confrontare il lavoro prodotto da una forza con il tempo impiegato per ottenerlo. Per questo scopo si introduce il concetto di **potenza** che **misura la rapidità con cui è compiuto il lavoro**.

Formalmente, se una forza compie un lavoro W in un tempo Δt , la potenza media P_m è definita:

$$P_m = \frac{W}{\Delta t}.$$

Per Δt molto piccolo, al limite per $\Delta t \rightarrow 0$ si ottiene la **potenza istantanea** (di seguito semplicemente potenza) :

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

La potenza è quindi una grandezza scalare le cui dimensioni nel sistema MKS sono $\frac{J}{s} = \text{Watt} = W$

(spesso è usato il $kW = 1000 W$. Notare che $W \cdot s = J$ è una unità di misura dell'energia; l'energia è spesso misurata anche in kilowattora= $kWh=1000W \cdot 3600s = 3.6 \cdot 10^6 J$)

Se la forza \vec{F} che compie lavoro è costante, ricordando (3) $dW = \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$ abbiamo:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{\ell}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \Rightarrow \quad P = \vec{F} \cdot \vec{v} \text{ per } \vec{F} = \text{cost}$$