Teorema di Carnot

a) Tutte le macchine termiche reversibili che utilizzano due sole sorgenti di calore a temperature T_1 e T_2 (con $T_1 > T_2$) hanno lo stesso rendimento η_R, pari a quello (η_C) di una macchina di Carnot che opera fra la medesima coppia di sorgenti:

$$\boxed{\eta_R = \eta_C}$$

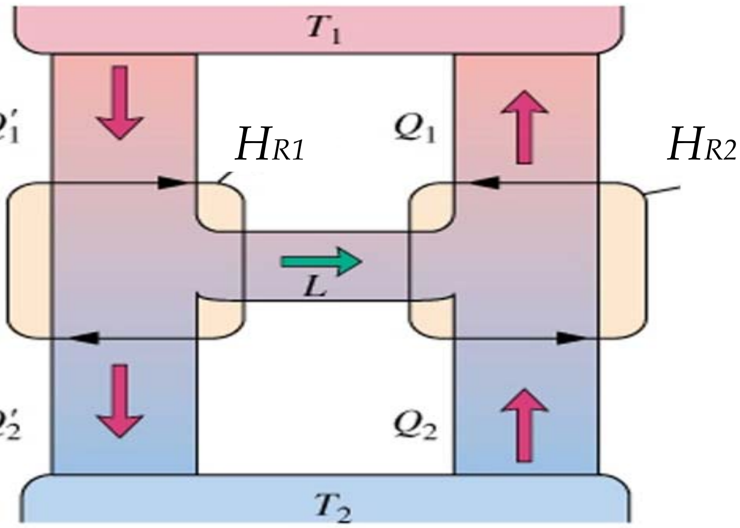
b) Le macchine termiche reali (irreversibili) che utilizzano due sole sorgenti di calore a temperature T_1 e T_2 (con $T_1 > T_2$) hanno un rendimento η_{Irr} sempre minore di quello (η_C) di una macchina di Carnot che opera fra la stessa coppia di sorgenti.

$$\boxed{\eta_{Irr} < \eta_C}$$

La dimostrazione del teorema di Carnot si effettua ragionando *per assurdo,* assumendo cioè che il rendimento di una macchina reversibile sia maggiore di quello della macchina di Carnot. Si dimostra che la conseguenza di questa ipotesi è la violazione della seconda legge della termodinamica.

Dimostrazione (parte a)

Siano H_{R1} ed H_{R2} due macchine termiche reversibili che operano tra le sorgenti a temperature T_1 e T_2 ($T_1>T_2$)con rendimento rispettivamente η_{R1} e η_{R2}. Supponiamo che $\eta_{R1} > \eta_{R2}$. Essendo le macchine reversibili, facciamo compiere un ciclo inverso (frigorifero) a H_{R2} usando esattamente il lavoro prodotto in un ciclo dalla macchina H_{R1}

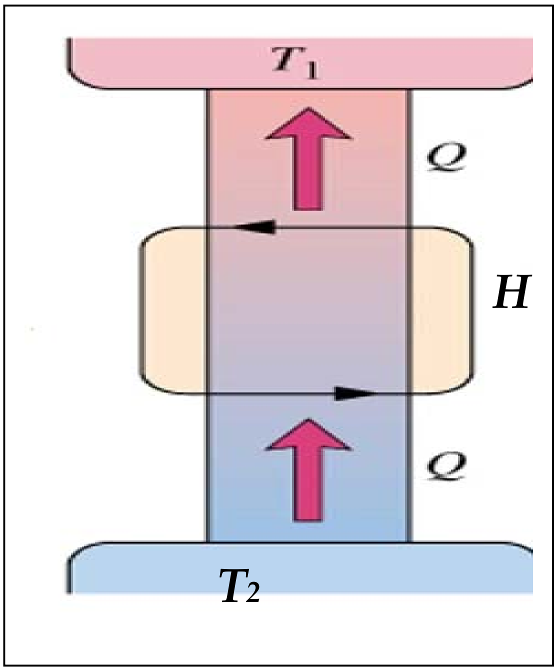


Dalla definizione di rendimento e dalla condizione $\eta_{R1} > \eta_{R2}$ segue:

$$\frac{|\mathcal{L}|}{|Q'_1|} > \frac{|\mathcal{L}|}{|Q_1|} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{|Q'_1|} > \frac{1}{|Q_1|} \Rightarrow |Q'_1| < |Q_1|$$

Dalla precedente disuguaglianza e dalla definizione di lavoro:

$$\mathcal{L} = |Q'_1| - |Q'_2| = |Q_1| - |Q_2| \Rightarrow \quad |Q_1| - |Q'_1| = |Q_2| - |Q'_2| = \boldsymbol{Q > 0}$$



Considerando la macchina termica congiunta $H_{R1} \oplus H_{R2} = H$ osserviamo che essa preleva dalla sorgente a temperatura T_2 un calore $Q = |Q_2| - |Q'_2| > 0$ e trasferisce dalla sorgente a temperatura T_1 ($T_1 > T_2$) un calore $Q = |Q_1| - |Q'_1| > 0$ senza impiego di lavoro esterno ossia:

H è un frigorifero perfetto.

Poiché non esiste un frigorifero perfetto, non può essere $\eta_{R1} > \eta_{R2}$

Supponiamo ora che sia $\eta_{R2} > \eta_{R1}$. Ripetendo il ragionamento precedente, scambiato il ruolo di H_1 e H_2, si arriva alla conclusione che non può essere $\eta_{R2} > \eta_{R1}$

Quindi $\Rightarrow$

$$\boxed{\eta_{R1} = \eta_{R2} \;\Rightarrow\; \eta_R = \eta_C}$$

Dimostrazione (parte b)

Siano H_{Irr} una macchina termica reale e H_R una macchina termica reversibile entrambe operanti tra le sorgenti a temperature T_1 e T_2 ($T_1 > T_2$) con rendimento rispettivamente η_{Irr} e η_C.

Supponiamo che $\eta_{Irr} > \eta_C$. Facciamo compiere un ciclo inverso (frigorifero) a H_R (reversibile) usando esattamente il lavoro prodotto in un ciclo dalla macchina H_{Irr}. Procedendo come prima si arriva alla conclusione che non può essere $\eta_{Irr} > \eta_C$.

L'altra condizione ($\eta_C < \eta_{Irr}$) non essere esclusa perché la macchina reale H_{Irr} non può compiere un ciclo inverso, essendo irreversibile,

quindi $\Rightarrow$

$$\boxed{\eta_{Irr} \le \eta_C}$$

Conclusione:

Nessuna macchina termica reale può avere un rendimento maggiore della corrispondente macchina di Carnot operante fra le stesse temperature. Nel migliore dei casi il rendimento può essere pari a quello di Carnot, ma allora è una macchina ideale. In ciò risiede l'importanza del ciclo ovvero della macchina di Carnot.