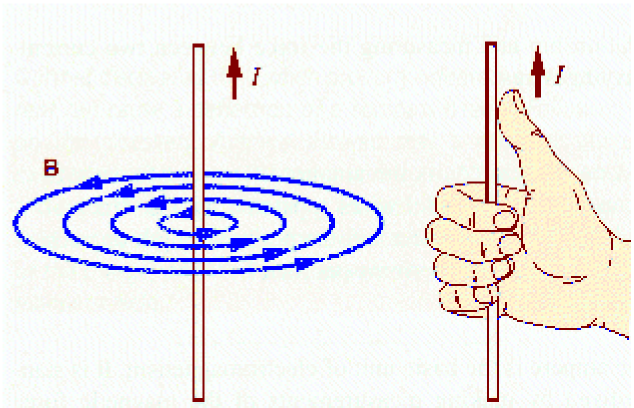
Origine del Campo Magnetico

Riportiamo due fatti sperimentali.

1) Un filo rettilineo infinito percorso da corrente i genera un campo magnetico con le seguenti proprietà:

- l'intensità aumenta linearmente con i ma decresce linearmente con r ovvero $B \propto i/r$, quindi
- le linee di campo sono circonferenze concentriche attorno al filo
- il verso delle linee di campo è legato al verso della corrente dalla regola della mano destra: *se il pollice è orientato nel verso della corrente, la curvatura delle dita indica il verso delle linee del campo magnetico*



$$B \propto \frac{i}{r} \rightarrow B = K\frac{i}{r} \rightarrow B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{r} \quad \text{(legge di Biot-Savart)}$$

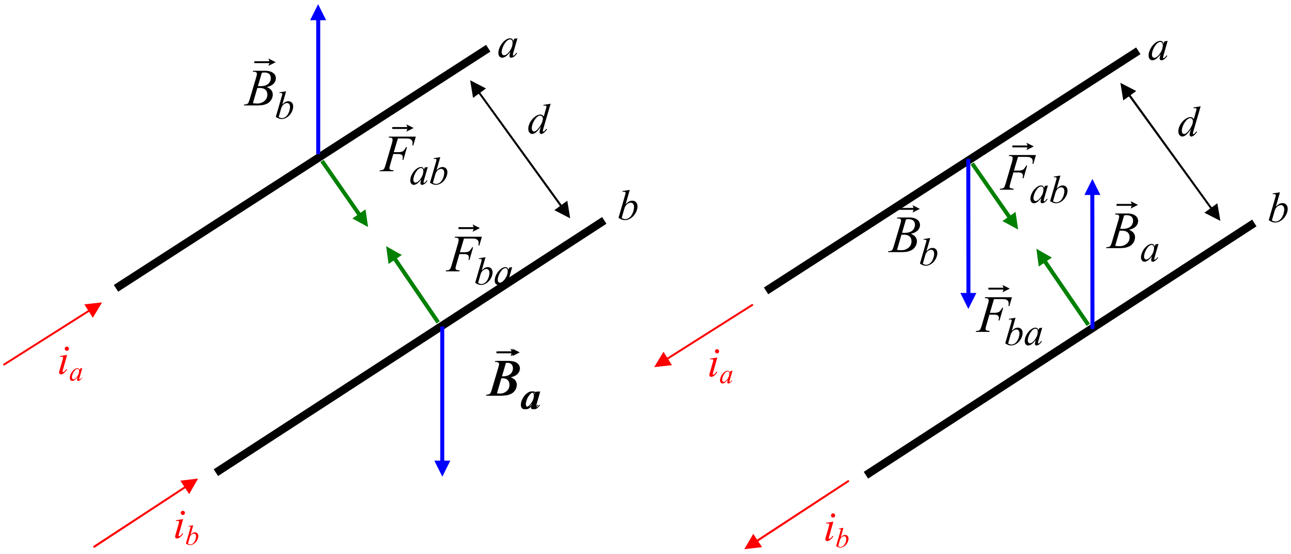
con $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ Tm/A$ (permeabilità magnetica del vuoto)

2) Vale il principio di sovrapposizione.

Se la corrente i_1 genera un campo magnetico $\vec{B}_1$ e la corrente i_2 genera un campo magnetico $\vec{B}_2$ il campo totale in ogni punto dello spazio è dato da $\vec{B}_T = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$

Interazione fra due fili paralleli percorsi da corrente

Siano a e b due fili rettilinei, infiniti, paralleli percorsi da corrente i_a e i_b.



La corrente i_a nel filo a genera nei punti dello spazio occupati dal filo b un campo $B_a = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i_a}{d}$ con direzione e verso in fig.

Il filo b, percorso da una corrente i_b, trovandosi immerso nel campo $\vec{B}_a$, sente una forza $\vec{F}_{ba} = i_b \vec{\ell} \times \vec{B}_a \Rightarrow$

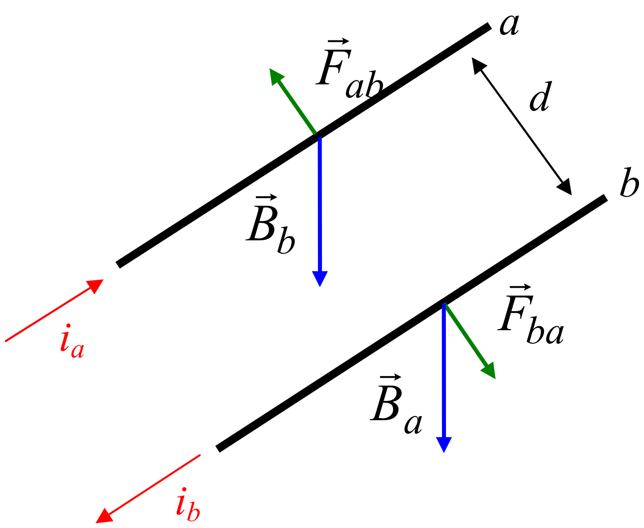
in modulo $F_{ba} = i_b \ell B_a \sin 90° = \frac{\mu_0 \ell i_a i_b}{2\pi d}$ con direzione e verso in fig.

Invertendo il ruolo del filo a con quello del filo b, possiamo dire che il filo a sente una forza $F_{ab} = \frac{\mu_0 \ell i_b i_a}{2\pi d}$ con direzione è verso in fig.

$\Rightarrow \vec{F}_{ba} = -\vec{F}_{ab}$

Ossia correnti parallele e concordi si attraggono……

…….mentre correnti parallele e discordi si respingono.



Definizione dell'unita di misura: "Ampere" A

Sia ora $d = \ell = 1\ m$, posto $i_a = i_b = 1\ A$ *otteniamo:*

$$F_{ab} = \frac{\mu_0 \ell i_b i_a}{2\pi d} = \frac{\mu_0}{2\pi} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} = 2 \cdot 10^{-7}\ N$$

Quindi *l'Ampere è quell'intensità di corrente costante che, se mantenuta in due conduttori paralleli ed infiniti, posti a distanza di 1 m produce su ciascuno dei conduttori una forza di* $2 \cdot 10^{-7}$ *N per metro di lunghezza.*

Verifica unità di misura:

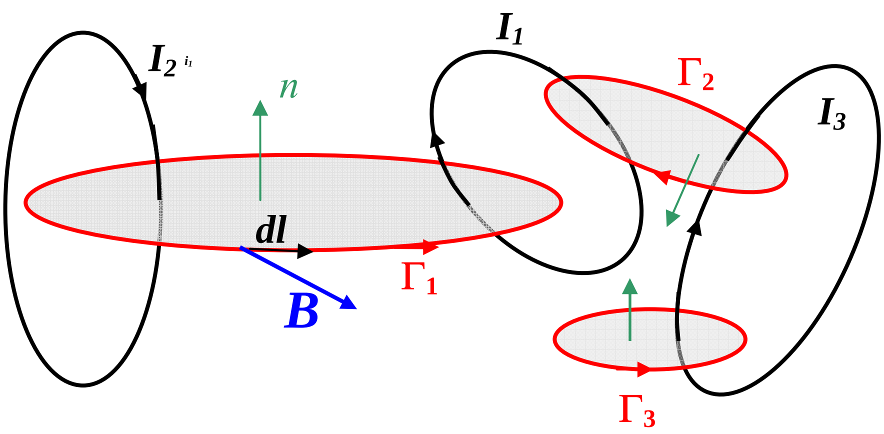
$[\mu_0] = T \cdot m/A$ $\qquad$ $T = N/(mA)$

$$[F] = \frac{m}{A} \cdot \frac{N}{mA} \cdot A \cdot A \cdot \frac{m}{m} = N$$

Il Teorema di Ampere

è la generalizzazione dell'affermazione 1) ossia che:
i campi magnetici sono creati da cariche in movimento ovvero da correnti.

Discutiamo qui il caso stazionario $\Rightarrow$ correnti costanti nel tempo.
Si ricorda che le correnti stazionarie possono esistere solo in circuiti chiusi quindi in casi stazionari le linee di corrente sono chiuse.
Pertanto, se scegliamo una linea geometrica arbitraria chiusa Γ, le linee delle correnti rispetto ad essa possono essere o concatenate (non possono essere sfilate da Γ) o non concatenate (possono essere allontanate indefinitamente da Γ)



I_1 concatenata con Γ_1, Γ_2
I_1 non concatenata con Γ_3
I_2 concatenata con Γ_1
I_2 non concatenata con Γ_2,Γ_3
I_3 concatenata con Γ_2, Γ_3
I_3 non concatenata con Γ_1

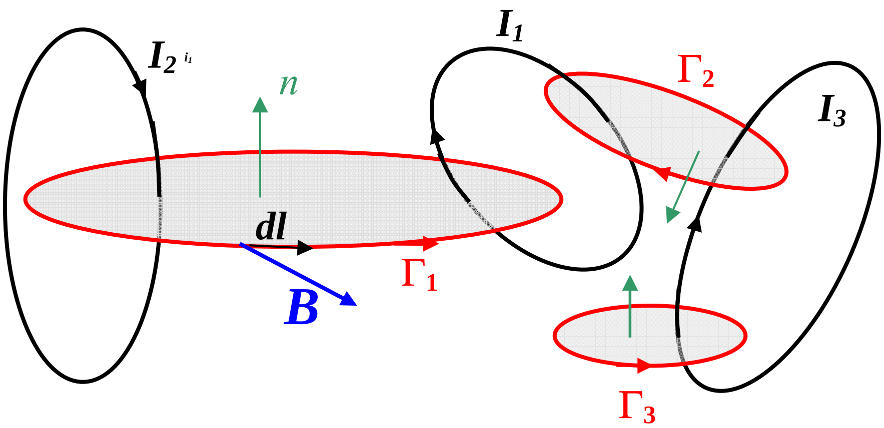
Se ci sono correnti esisterà un campo $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3$.
Divisa una curva Γ in elementi $d\vec{l}$ possiamo calcolare, per ogni $d\vec{l}$, il termine $\vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot dl \cdot \cos\theta$, quindi sommando tutti i contributi otteniamo:

$$\Rightarrow \oint_\Gamma B dl \cos\theta = \oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

Si trova che $\boxed{\oint_\Gamma \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_c}$ (**teorema di Ampere**) ossia la circuitazione del campo magnetico lungo una curva chiusa dipende solo e soltanto dalle correnti concatenate I_c.

Questo nonostante $\vec{B}$ sia creato, per il principio di sovrapposizione, da tutte le correnti presenti!!

Il teorema di Ampere è una proprietà del campo "mediata" lungo una curva, contrariamente al principio di sovrapposizione che fornisce una proprietà puntuale del campo.



Nella $\sum I_c$ le correnti concatenate possono essere positive o negative.
Fissato un verso positivo di percorrenza della curva Γ resta fissata, con la regola della mano destra, il verso della normale n all'area racchiusa da Γ

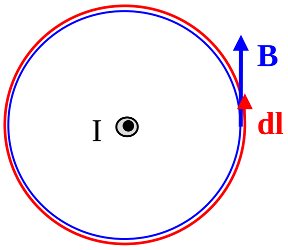
- Se il verso I_c all'interno di Γ è concorde con n, I_c è positiva
- Se il verso I_c all'interno di Γ è disconcorde con n, I_c è negativa

Quindi $\oint_{\Gamma 1} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_o(I_1 - I_2)$, $\oint_{\Gamma 2} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_o(I_2 - I_3)$, $\oint_{\Gamma 3} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_o I_3$

Osservazione: Il teorema di Ampere dice anche che il campo magnetico non è conservativo.

Giustifichiamo il teorema di Ampere nel caso di un filo rettilineo infinito percorso da corrente i.

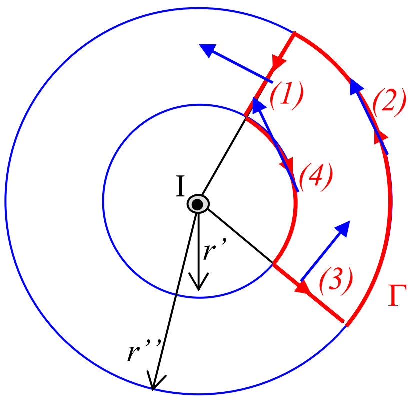
I° situazione: il filo percorso da corrente è interno alla linea di circuitazione Γ, corrente concatenata. con Γ. La linea Γ coincide con una line di campo di raggio r.



$$\oint_{cir} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint_{cir} B dl = \oint_{cir} \frac{\mu_0 i}{2\pi r} dl$$

$$= \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\oint_{cir} dl = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\cdot 2\pi r = \mu_0 i \quad \text{c.v.d}$$

II° situazione; il filo percorso da corrente è esterno alla linea della circuitazione Γ, ovvero la corrente non concatenata con la linea chiusa Γ. Γ è costituita da due tratti radiali (tratto 1 e 3) e due tratti lungo due linee di forza (tratto 2 e 4) di raggio rispettivamente r'' e r' (vedi figura).



$$\oint_\Gamma \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_1 \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_2 \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_3 \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_4 \vec{B}\cdot d\vec{l}$$

$$\int_1 \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0 \ \ e \ \ \int_3 \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0 \text{ perchè } \vec{B}\perp d\vec{l}$$

$$\int_2 \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_2 B'' dl \text{ perchè } \vec{B} \text{ parallelo a } d\vec{l},$$

$$\int_4 \vec{B}\cdot d\vec{l} = -\int_4 B' dl \text{ perchè } \vec{B} \text{ antiparallelo a } d\vec{l},$$

$$\text{con} \quad B'' = \frac{\mu_0 i}{2\pi r''} \quad \text{e} \quad B' = \frac{\mu_0 i}{2\pi r'}$$

quindi $\oint_\Gamma \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_2 B'' dl - \int_4 B' dl = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\int_2 \frac{dl}{r''} - \frac{\mu_0 i}{2\pi}\int_4 \frac{dl}{r'}$

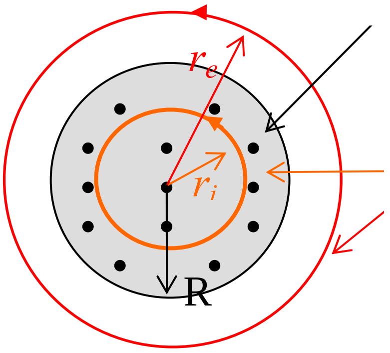
ma per definizione di radiante $\frac{dl}{r} = d\alpha$ e osserviamo che

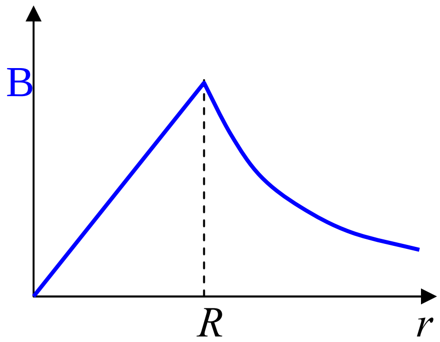
$$lunghezza\ (2)/r'' = lunghezza\ (4)/r' = \alpha \Rightarrow$$

$$\oint_\Gamma \vec{B}\cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(\int_2 \frac{dl}{r''} - \int_4 \frac{dl}{r'}\right) = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(\int_2 d\alpha - \int_4 d\alpha\right) = \frac{\mu_0 i}{2\pi}(\alpha - \alpha) = 0 \ \ \text{c.v.d}$$

Applicazione:***Campo di un filo cilindrico infinito percorso da corrente I***

Consideriamo un cilindro di raggio R percorso da una corrente *I* uscente.
La corrente è distribuita uniformemente nella sezione con densità $J=I/\pi R^2$
Per conservare la simmetria cilindrica nello spazio sede del campo *B*, le linee di forza devono essere delle circonferenze concentriche e coassiali al cilindro e l'intensità del campo deve essere la stessa in tutti i punti distante *r* dall'asse.





Applichiamo il teorema di Ampere, prendendo come linea Γ una circonferenza (coincidente con una linea di forza) di raggio $r_i < R$

$$\oint_\Gamma \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum i_c \quad \text{essendo} \quad \vec{B} // d\vec{l} \Rightarrow \oint_\Gamma B dl = \mu_0 \sum i_c$$

$$\text{ma } B \text{ costante} \Rightarrow B\oint_\Gamma dl = \mu_0 \sum i_c \Rightarrow B 2\pi r_i = \mu_0 \sum i_c$$

$$\sum i_c = J\cdot \pi r_i^2 = \frac{I}{\pi R^2}\cdot \pi r_i^2 = \frac{I r_i^2}{R^2} \quad \text{quindi}: \quad B 2\pi r_i = \mu_0 \frac{I r_i^2}{R^2} \Rightarrow$$

1) $\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r}$ $\rightarrow$ il campo *B* è direttamente proporzionale a *r* (per *r*<*R*)

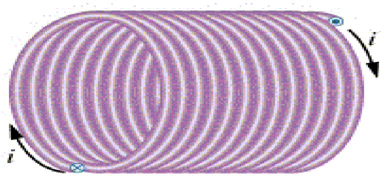
Applichiamo ancora il teorema di Ampere, prendendo come linea Γ una circonferenza (coincidente con una linea di forza) di raggio $r_e > R$
Il calcolo della circuitazione è identico, mentre $\sum i_c = i \Rightarrow B 2\pi r_e = \mu_0 i$

2) $\boxed{B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}}$ $\rightarrow$ il campo *B* è inversamente proporzionale ad *r* (per *r*>*R*)

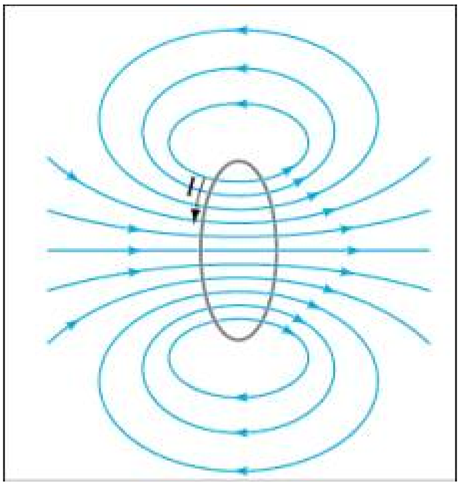
(Entrambe le formule danno lo stesso valore di *B* (massimo) per *r* = *R*)

Applicazione: ***Campo di un solenoide***

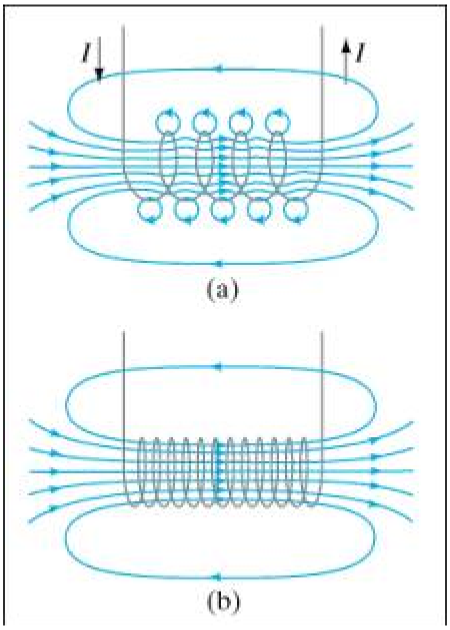
Il solenoide è una bobina di filo conduttore costituita da molte spire circolari vicine fra loro.



Per capire la configurazione del campo, partiamo da quello prodotto da una spira circolare ed usiamo il principio di sovrapposizione……..



Linee di campo per una spira circolare



Linee di campo per n_1 spire (a) e per n_2 spire (b) con $n_1 < n_2$

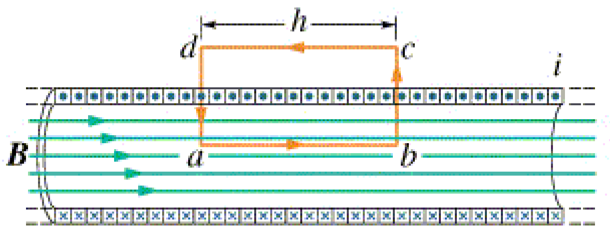
Si nota che, al crescere del numero delle spire,

- il campo si intensifica all'interno e diminuisce all'esterno,
- all'interno tende a divenire uniforme e parallelo all'asse del solenoide,
- il verso del campo interno è fissato con la regola della mano destra: se le dita segnano il verso della corrente nelle spire, il pollice da il verso del campo.

Al limite per un solenoide infinito (numero di spire infinito e spire strettamente unite) ***solenoide ideale*** si ha:

- il campo è solo all'interno ed è uniforme e parallelo all'asse,
- il campo esterno è nullo.

Campo di un solenoide ideale



Un solenoide reale può essere considerato ideale se le sue dimensioni trasversali sono molto minori della lunghezza.

Detto *n il numero di spire del solenoide per unità di lunghezza*, il campo può essere calcolato dal Teorema di Ampere usando la curva di circuitazione in figura;

$$\oint_\Gamma \overline{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum i_c \Rightarrow \int_a^b \overline{B}\cdot d\vec{l} + \int_b^c \overline{B}\cdot d\vec{l} + \int_c^d \overline{B}\cdot d\vec{l} + \int_d^a \overline{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum i_c$$

$\int_a^b \overline{B}\cdot d\vec{l} = \int_a^b B dl = B\int_a^b dl = Bh$ essendo $\vec{B} // d\vec{l}$ e B costante

$\int_b^c \overline{B}\cdot d\vec{l} = 0$ e $\int_d^a \overline{B}\cdot d\vec{l} = 0$ essendo $\vec{B} \perp d\vec{l}$ in un tratto e $B = 0$ nel restante tratto

$\int_c^d \overline{B}\cdot d\vec{l} = 0$ essendo $B = 0$ su tutto il tratto

$\sum i_c = i(nh) \Rightarrow Bh = \mu_0 inh \Rightarrow$

$$\boxed{B = \mu_0 in}$$