

Le proprietà fondamentali del campo magnetico

1) Fatti sperimentali.

Riportiamo due fatti sperimentali:

a) Un filo rettilineo infinito percorso da corrente I genera un campo magnetico con le seguenti proprietà:

- l'intensità aumenta linearmente con I ma decresce linearmente con r ovvero $B \propto I/r$, quindi
- le linee di campo sono circonferenze concentriche attorno al filo
- il verso delle linee di campo è legato al verso della corrente dalla regola della mano destra: *se il pollice è orientato nel verso della corrente, la curvatura delle dita indica il verso delle linee del campo magnetico.* (vedi fig.1)

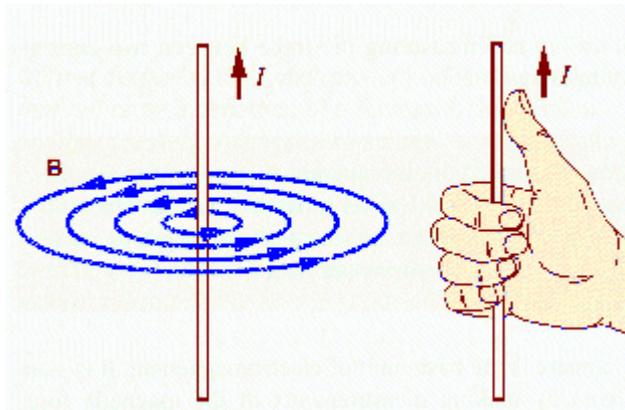


fig. 1

$$B \propto \frac{I}{r} \rightarrow B = K \frac{I}{r} \rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (\text{legge di Biot-Savart})$$

con $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Tm/A}$ (permeabilità magnetica del vuoto)

b) Vale il principio di sovrapposizione.

Se la corrente I_1 genera un campo magnetico \vec{B}_1 e la corrente I_2 genera un campo magnetico \vec{B}_2 , il campo totale in ogni punto dello spazio se entrambe le correnti sono presenti è dato da $\vec{B}_T = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$

2) Interazione fra due fili paralleli percorsi da corrente

Siano a e b due fili rettilinei, infiniti, paralleli percorsi da corrente I_a e I_b con verso concorde, come in *fig. 2*.

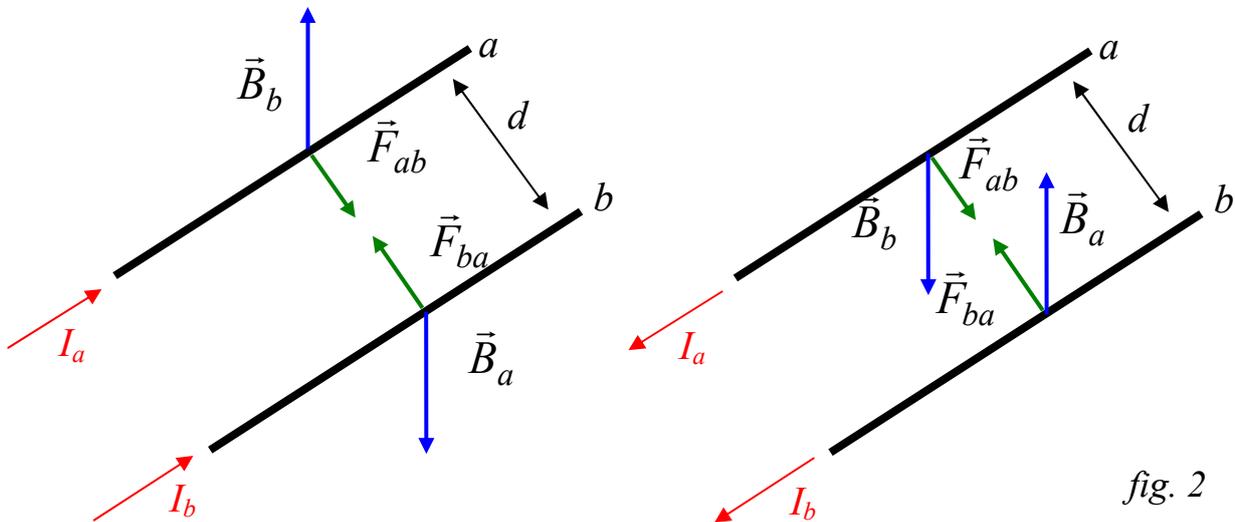


fig. 2

La corrente I_a nel filo a genera nei punti dello spazio occupati dal filo b un campo $B_a = \frac{\mu_0 I_a}{2\pi d}$ con direzione e verso in *fig. 2*. Il filo b , percorso da una corrente I_b , trovandosi immerso nel campo B_a , sente una forza $\vec{F}_{ba} = I_b \vec{\ell} \times \vec{B}_a$.

In modulo, si ha: $F_{ba} = I_b \ell B_a \sin 90^\circ = \frac{\mu_0 \ell I_a I_b}{2\pi d}$ con direzione e verso in *fig. 2*, ossia il filo b sente una forza \vec{F}_{ab} che lo attrae verso il filo a .

Invertendo il ruolo del filo a con quello del filo b , possiamo dire che il filo a sente una forza $F_{ab} = \frac{\mu_0 \ell I_b I_a}{2\pi d}$ che lo attrae verso il filo b (vedi *fig. 2*) con $\vec{F}_{ba} = -\vec{F}_{ab}$.

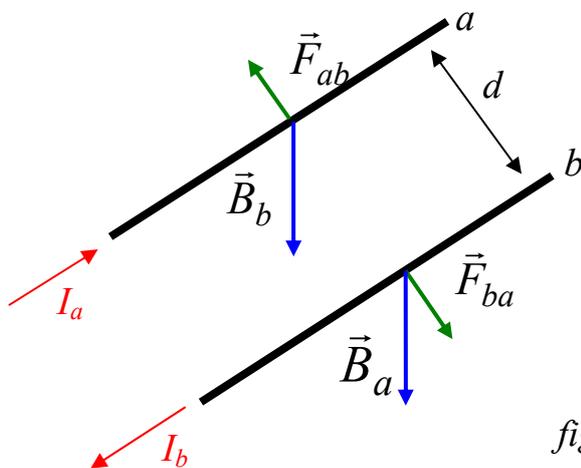


fig. 3

Se le correnti scorrono nei fili in verso opposto, si vede che la direzione e verso delle forze \vec{F}_{ba} e \vec{F}_{ab} è quella indicata in *fig. 3* ossia correnti parallele e concordi si attraggono mentre correnti parallele e discordi si respingono.

3) Definizione dell'unità di misura: "Ampere"(A)

Sia ora $d = \ell = 1 \text{ m}$, posto $I_a = I_b = 1 \text{ A}$ otteniamo:

$$F_{ab} = \frac{\mu_0 \ell I_b I_a}{2\pi d} = \frac{\mu_0}{2\pi} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$$

Quindi l'Ampere è quell'intensità di corrente costante che, se mantenuta in due conduttori paralleli ed infiniti, posti a distanza di 1 m produce su ciascuno dei conduttori una forza di $2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$ per metro di lunghezza.

$$\text{Verifica unità di misura: } [\mu_0] = \frac{Tm}{A}; \quad T = \frac{N}{mA} \Rightarrow [F] = \frac{m}{A} \cdot \frac{N}{mA} \cdot A \cdot A \cdot \frac{m}{m} = N$$

4) Il Teorema di Ampere

Esso è la formalizzazione di quanto si osserva sperimentalmente ossia che **le correnti generano dei campi magnetici**.

Discutiamo qui il caso stazionario ossia il caso di correnti costanti nel tempo, ricordando che le correnti stazionarie possono esistere solo in circuiti chiusi quindi in casi stazionari le linee di corrente sono chiuse.

Pertanto, se scegliamo una linea geometrica arbitraria chiusa Γ , le linee delle correnti rispetto ad essa possono essere o concatenate (non possono essere sfilate da Γ) o non concatenate (possono essere allontanate indefinitamente da Γ). Questo è schematizzato in *fig. 4* dove sono presenti tre correnti (I_1, I_2, I_3) e tre possibili linee chiuse ($\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$).

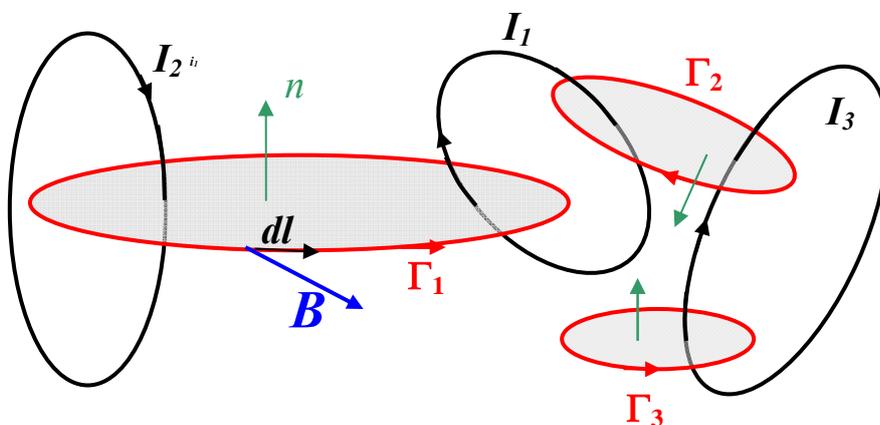


fig. 4

Risulta essere:

- I_1 concatenata con Γ_1, Γ_2
- I_1 non concatenata con Γ_3
- I_2 concatenata con Γ_1
- I_2 non concatenata con Γ_2, Γ_3
- I_3 concatenata con Γ_2, Γ_3
- I_3 non concatenata con Γ_1 .

Essendoci più correnti, in ogni punto dello spazio esisterà un campo:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3.$$

Divisa una curva Γ in elementi $d\vec{l}$ possiamo calcolare, per ogni $d\vec{l}$, il termine $\vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot dl \cdot \cos \theta$, quindi sommando tutti i contributi otteniamo:

$$\Rightarrow \oint_{\Gamma} B dl \cos \theta = \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

Si trova che $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_c$ (**teorema di Ampere**) ossia la circuitazione del campo magnetico lungo una curva chiusa dipende solo e soltanto dalle correnti concatenate I_c .

Questo nonostante \vec{B} sia creato, per il principio di sovrapposizione, da tutte le correnti presenti!!

Il teorema di Ampere è una proprietà del campo “mediata” lungo una curva, contrariamente al principio di sovrapposizione che fornisce una proprietà puntuale del campo.

Nella $\sum I_c$, le correnti concatenate possono essere positive o negative. Fissato un verso positivo di percorrenza della curva Γ resta fissata, con la regola della mano destra, il verso della normale \vec{n} all’area racchiusa da Γ

- Se il verso I_c all’interno di Γ è concorde con \vec{n} , I_c è positiva
- Se il verso I_c all’interno di Γ è disconcorde con \vec{n} , I_c è negativa.

Quindi, nella situazione rappresentata in fig. 4 si ha:

$$\oint_{\Gamma_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I_1 - I_2), \quad \oint_{\Gamma_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I_2 - I_3), \quad \oint_{\Gamma_3} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_3$$

Osservazione: Il teorema di Ampere dice anche che il **campo magnetico non è conservativo**.

Giustificiamo il teorema di Ampere nel caso di un filo rettilineo infinito percorso da corrente I . Il principio di sovrapposizione ci permetterà poi di estendere il risultato a qualsiasi configurazione di correnti stazionarie.

I° situazione (fig. 5): il filo percorso da corrente è interno alla linea di circuitazione Γ , quindi la corrente I è concatenata con la linea Γ . Questa coincide con una linea di campo di raggio r .

$$\oint_{cir} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{cir} B dl = \oint_{cir} \frac{\mu_0 i}{2\pi r} dl$$

$$= \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \oint_{cir} dl = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \cdot 2\pi r = \mu_0 i \quad \text{c.v.d}$$

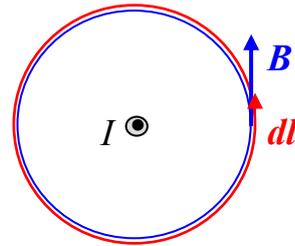


fig. 5

II° situazione (fig. 6): il filo percorso da corrente è esterno alla linea di circuitazione Γ , ovvero la corrente I non è concatenata con la linea Γ . Scegliamo Γ (vedi fig. 6) costituita da due tratti radiali (tratto 1 e 3) e due tratti lungo due linee di forza (tratto 2 e 4) di raggio rispettivamente r'' e r' .

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_1 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_2 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_3 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_4 \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

$$\int_1 \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \text{e} \quad \int_3 \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \text{perchè} \quad \vec{B} \perp d\vec{l}$$

$$\int_2 \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_2 B'' dl \quad \text{perchè} \quad \vec{B} \text{ parallelo a } d\vec{l},$$

$$\int_4 \vec{B} \cdot d\vec{l} = -\int_4 B' dl \quad \text{perchè} \quad \vec{B} \text{ antiparallelo a } d\vec{l},$$

con $B'' = \frac{\mu_0 i}{2\pi r''}$ e $B' = \frac{\mu_0 i}{2\pi r'}$

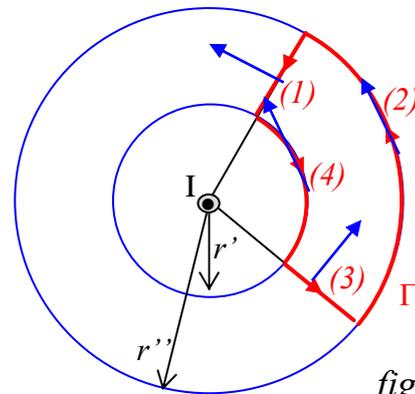


fig. 6

$$\text{quindi} \quad \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_2 B'' dl - \int_4 B' dl = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_2 \frac{dl}{r''} - \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_4 \frac{dl}{r'}$$

ma per definizione di radiante $\frac{dl}{r} = d\alpha$ e osserviamo che

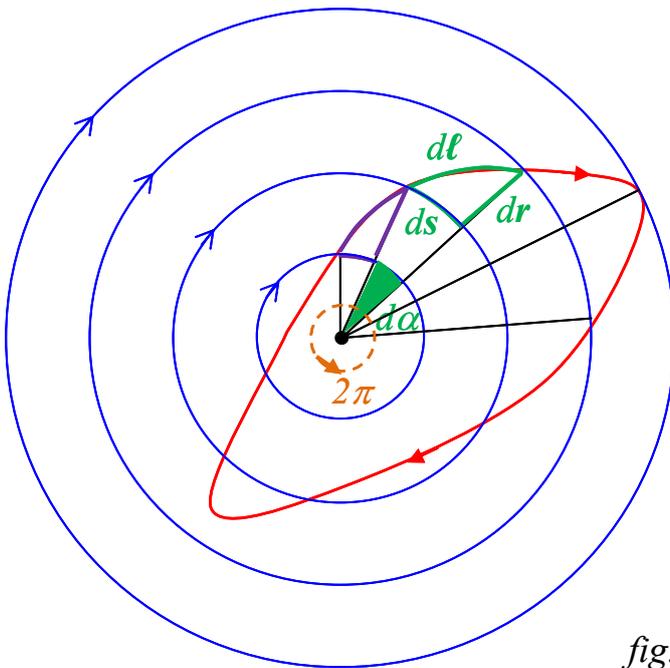
$$\text{lunghezza (2)} / r'' = \text{lunghezza (4)} / r' = \alpha \Rightarrow$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left(\int_2 \frac{dl}{r''} - \int_4 \frac{dl}{r'} \right) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left(\int_2 d\alpha - \int_4 d\alpha \right) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} (\alpha - \alpha) = 0 \quad \text{c.v.d}$$

Quanto appena fatto ci permette di osservare, nel caso di un campo B creato da un filo rettilineo, che i tratti radiali non danno contributo alla circuitazione mentre gli

archi di circonferenze lungo una linee di campo danno un contributo $\frac{\mu_0 I}{2\pi} \alpha$ con α l'angolo in radianti sotteso all'arco.

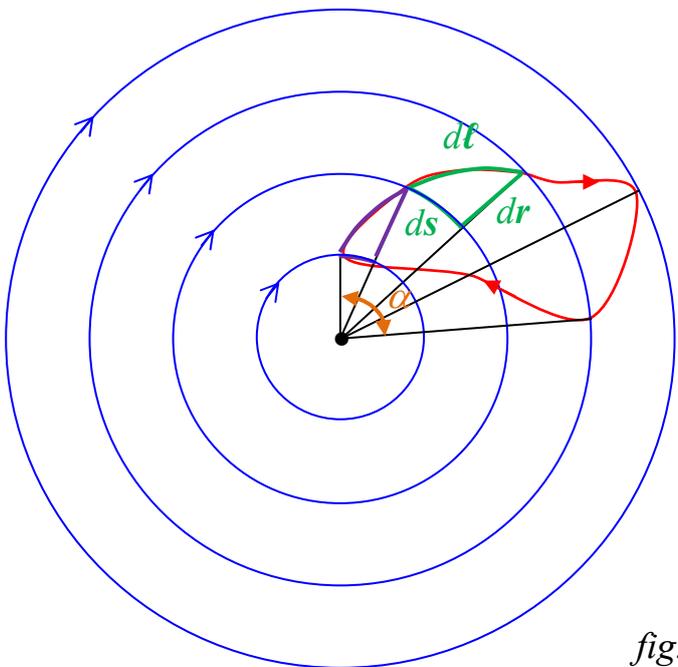
Questo ci permette di generalizzare la dimostrazione a curve generiche infatti, come è mostrato in fig. 7, $d\vec{\ell} \approx d\vec{r} + d\vec{s} \Rightarrow \int \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \approx \int \vec{B} \cdot d\vec{r} + \int \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \alpha$.



Se la corrente è concatenata con la curva Γ (fig. 7a) sia ha:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \approx \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sum \alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi} 2\pi = \mu_0 I$$

fig. 7a



Se la corrente non è concatenata con la curva Γ (fig. 7b) sia ha:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \approx \frac{\mu_0 I}{2\pi} (\alpha - \alpha) = 0$$

fig. 7b

Applicazione 1: **Campo di un filo cilindrico infinito percorso da corrente I**

Consideriamo un cilindro di raggio R percorso da una corrente I uscente. La corrente è distribuita uniformemente nella sezione con densità $J=I/\pi R^2$ (fig 8a).

Per conservare la simmetria cilindrica nello spazio sede del campo B , le linee di forza devono essere delle circonferenze concentriche e coassiali al cilindro e l'intensità del campo deve essere la stessa in tutti i punti distante r dall'asse.

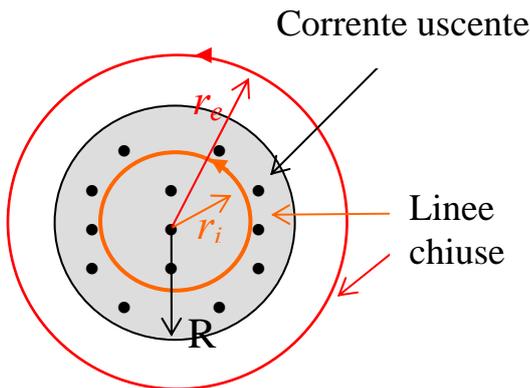


fig. 8a

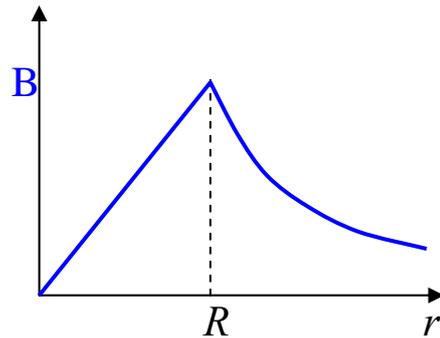


fig. 8b

Applichiamo il teorema di Ampere, prendendo come linea Γ una circonferenza (coincidente con una linea di forza) di raggio $r_i < R$

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum i_c \quad \text{essendo} \quad \vec{B} // d\vec{l} \Rightarrow \oint_{\Gamma} B dl = \mu_0 \sum i_c$$

$$\text{ma } B \text{ costante} \Rightarrow B \oint_{\Gamma} dl = \mu_0 \sum i_c \Rightarrow B 2\pi r_i = \mu_0 \sum i_c$$

$$\sum i_c = J \cdot \pi r_i^2 = \frac{I}{\pi R^2} \cdot \pi r_i^2 = \frac{I r_i^2}{R^2} \quad \text{quindi:} \quad B 2\pi r_i = \mu_0 \frac{I r_i^2}{R^2} \Rightarrow$$

$$1) \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r \rightarrow \text{il campo } B \text{ è direttamente proporzionale a } r \text{ (per } r < R)$$

Applichiamo ancora il teorema di Ampere, prendendo come linea Γ una circonferenza (coincidente con una linea di forza) di raggio $r_e > R$.

Il calcolo della circuitazione è identico, mentre $\sum i_c = i \Rightarrow B 2\pi r_e = \mu_0 i$

$$2) \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \rightarrow \text{il campo } B \text{ è inversamente proporzionale ad } r \text{ (per } r > R)$$

Il modulo del campo in funzione di r è mostrato in fig. 8b dove si nota che entrambe le formule danno lo stesso valore di B (massimo) per $r = R$.

Applicazione 2: *Campo di un solenoide*

Il solenoide (*fig. 9*) è una bobina di filo conduttore costituita da molte spire circolari vicine fra loro.

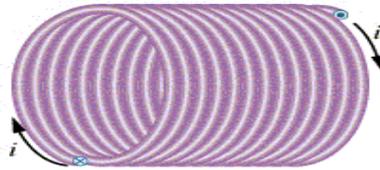
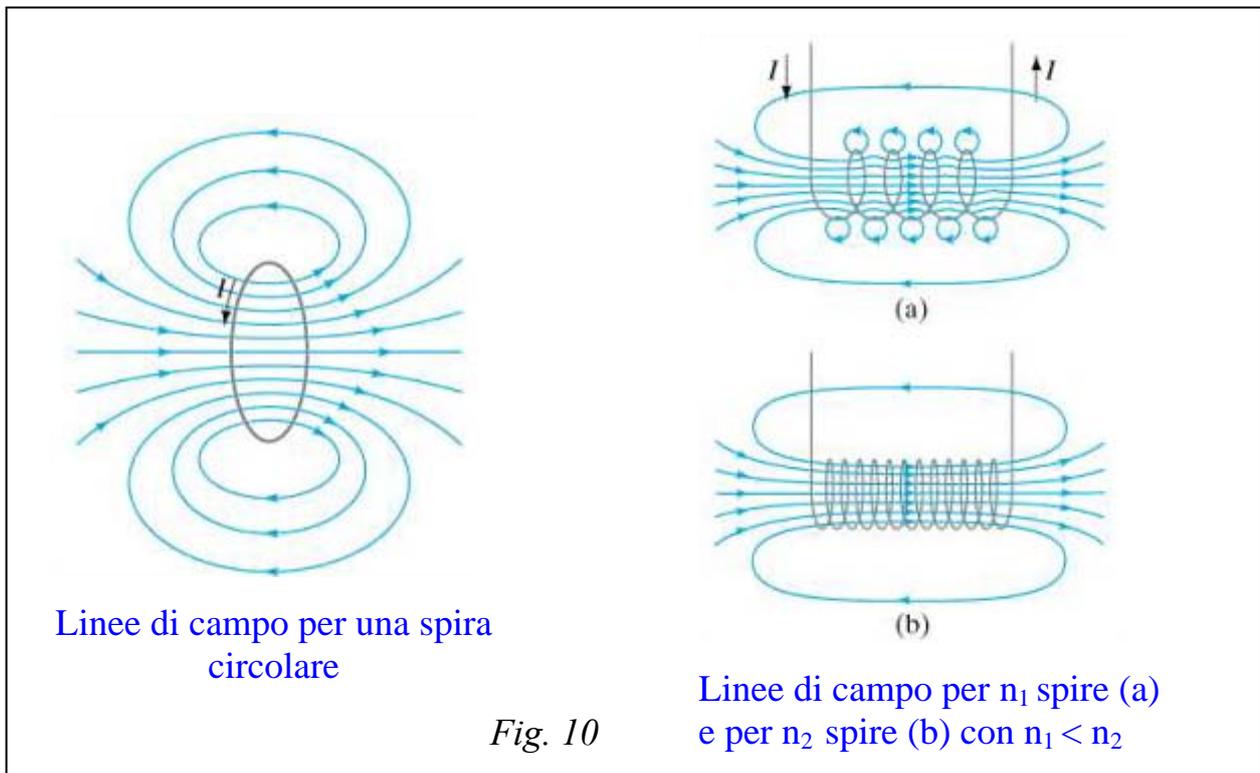


fig. 9

Per capire la configurazione del campo, partiamo da quello prodotto da una spira circolare e usiamo il principio di sovrapposizione, come mostrato in *fig. 10*.



Si nota che, al crescere del numero delle spire,

- il campo si intensifica all'interno e diminuisce all'esterno,
- all'interno tende a divenire uniforme e parallelo all'asse del solenoide,
- il verso del campo interno è fissato con la regola della mano destra: se le dita segnano il verso della corrente nelle spire, il pollice dà il verso del campo.

Al limite per un solenoide infinito (numero di spire infinito e spire strettamente unite), che diremo *solenoido ideale*, (fig. 11) si ha che:

- il campo esterno è nullo
- il campo all'interno, diverso da zero, è parallelo all'asse.
- punti equidistanti radialmente dall'asse, devono avere lo stesso valore di B.

Un solenoide reale può essere considerato ideale se le sue dimensioni trasversali sono molto minori della lunghezza.

Il campo magnetico all'interno di un solenoide ideale, detto n il numero di spire del solenoide per unità di lunghezza, può essere calcolato usando il teorema di Ampere e la curva di circuitazione disegnata in fig. 11.

Campo di un solenoide ideale

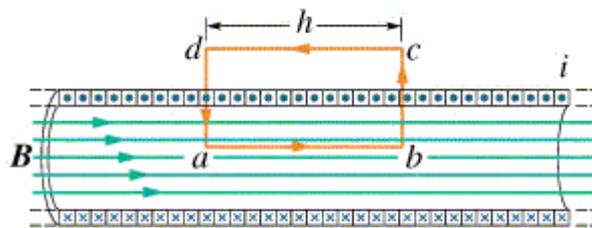


fig. 11

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum i_c \Rightarrow \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_d^a \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum i_c$$

$$\int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_a^b B dl = B \int_a^b dl = Bh \text{ essendo } \vec{B} // d\vec{l} \text{ e } B \text{ costante}$$

$$\int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \text{ e } \int_d^a \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \text{ essendo } \vec{B} \perp d\vec{l} \text{ in un tratto e } B = 0 \text{ nel restante tratto}$$

$$\int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \text{ essendo } B = 0 \text{ su tutto il tratto}$$

$$\sum i_c = i(nh) \Rightarrow Bh = \mu_0 inh \Rightarrow$$

$$B = \mu_0 in$$

Conclusione: il campo all'interno di un solenoide ideale è uniforme e costante, parallelo all'asse del solenoide e con verso fissato dalla regola della mano destra.

5) Il teorema di Gauss per il Magnetismo

Una bacchetta di un magnete naturale presenta al suo esterno un campo \vec{B} le cui linee di campo sono schematizzate in fig. 12. L'andamento, all'esterno della bacchetta, delle linee di campo è identico a quello relativo al campo elettrico \vec{E} generato da una opportuna carica elettrica depositata sugli estremi di una bacchetta isolante.

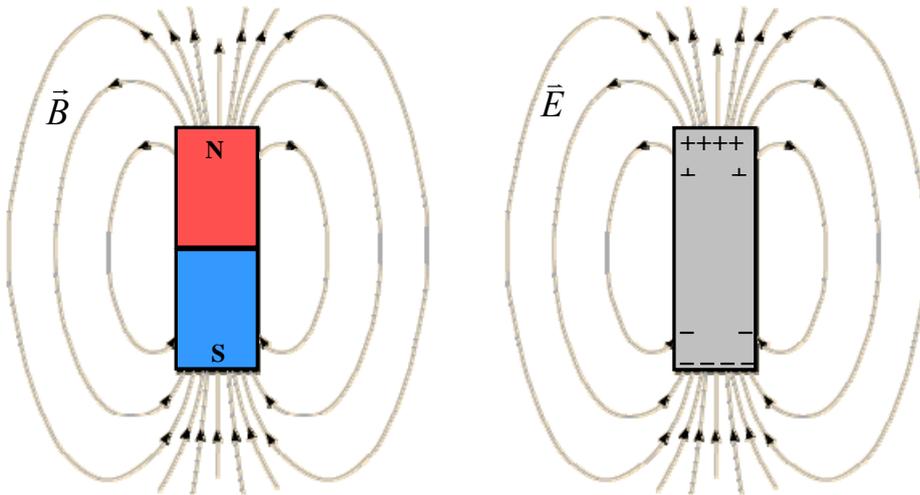


fig. 12

Questo può suggerire l'esistenza di cariche magnetiche che giocano lo stesso ruolo delle cariche elettriche. Tali eventuali cariche sono state chiamate Nord e Sud con le linee di campo uscenti dalle cariche Nord ed entranti nelle cariche Sud, in analogia al campo magnetico terrestre. I due estremi sono detti *poli magnetici*.

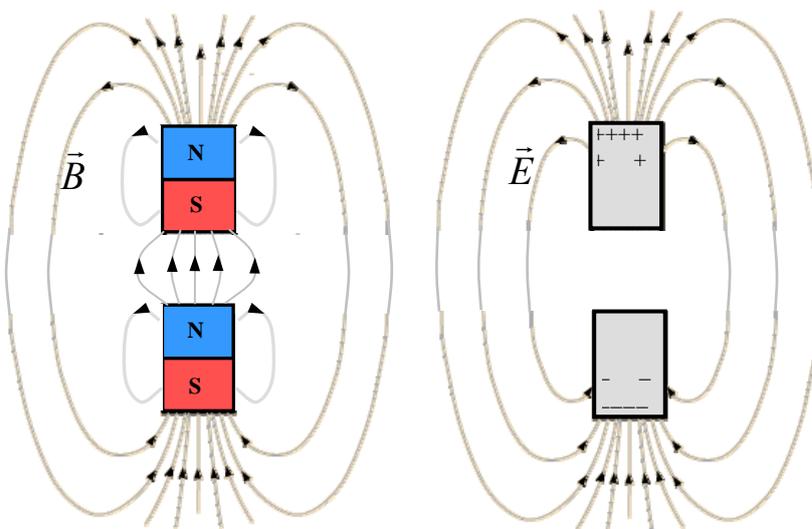


fig. 13

Ma la similitudine con le cariche elettriche finisce qui; infatti se dividiamo le due bacchette con lo scopo di "isolare" le rispettive cariche su una delle estremità osserviamo che ciò è possibile solo per le cariche elettriche. Le due parti del magnete naturali, infatti, continuano a presentare ancora entrambi i poli e la configurazione del campo \vec{B} risultante è completamente diversa, come schematizzato in fig. 13.

Per quanto piccolo si possa fare un magnete naturale (*fig. 14*), esso presenterà sempre i due poli, ovvero non è possibile sperimentalmente isolare la carica magnetica e quindi siamo costretti a concludere che: **la carica magnetica non esiste**.

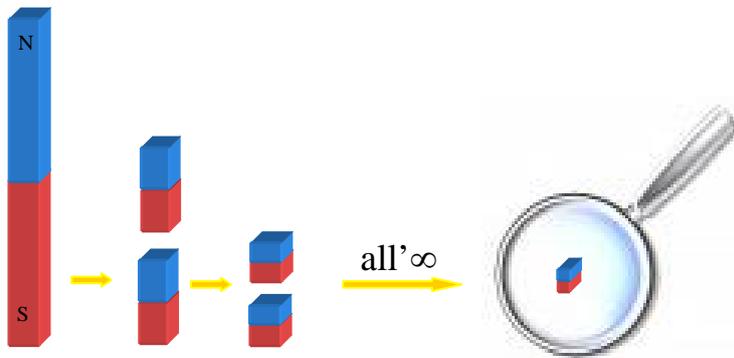


fig. 14

Le linee di campo si originano e terminano sulle cariche; non esistendo le cariche magnetiche **le linee del campo \vec{B} devono essere delle linee chiuse** (*fig. 15*).

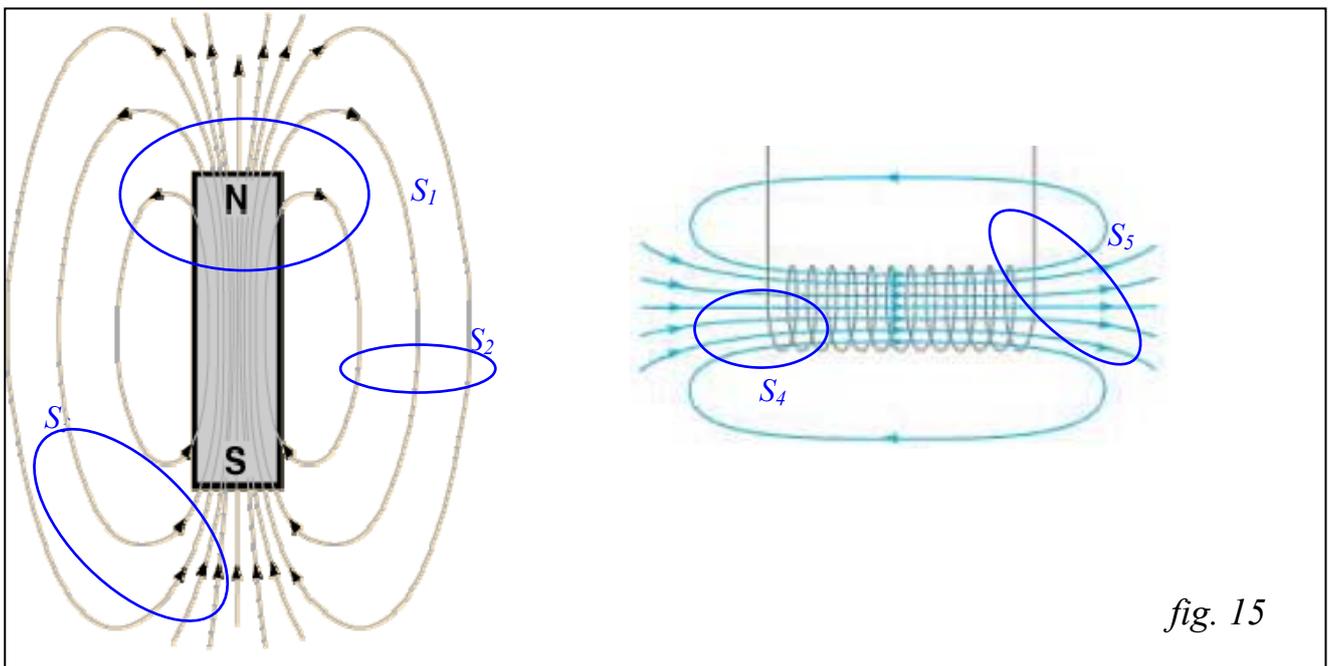


fig. 15

Di conseguenza, qualunque superficie chiusa (come S_1, S_2, S_3, S_4, S_5) immersa in un campo magnetico \vec{B} è attraversata dallo stesso numero di linee di campo entranti e uscenti dalla superficie (*fig. 15*).

Ricordando il concetto di flusso, ciò equivale a dire che **il flusso del campo magnetico \vec{B} attraverso una superficie chiusa è sempre nullo**, formalmente

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0.$$

Questa affermazione è nota come: *teorema di Gauss per il magnetismo* ed esprime formalmente l'osservazione sperimentale della non esistenza della carica magnetica.

Ricordando il teorema di Ampere, dobbiamo concludere che le sorgenti di campi magnetici stazionari sono solo le correnti; ma allora cosa genera il magnetismo naturale?

La risposta dettagliata a questa domanda è fuori gli scopi del corso, ma intuitivamente ricordiamo che la materia è fatta di atomi e che ogni elettrone orbitale di un atomo è a tutti gli effetti una micro corrente stazionaria. Essa genera, in accordo con il teorema di Ampere, un debolissimo campo magnetico $\vec{B}_{e,i}$. Questi campi poco intensi, uno per ciascuno degli N elettroni presenti in un materiale, sono distribuiti casualmente e generalmente succede che per quasi tutti i materiali $\sum_N \vec{B}_{e,i} = \vec{B}_T = 0$.

Solo in alcuni materiali ferrosi, per un effetto quantistico, un certo numero di elettroni $N' \ll N$ crea campi $\vec{B}_{e,i}$ concordi fra loro in modo che $\sum_{N'} \vec{B}_{e,i} = \vec{B}_T \neq 0$. *Il materiale presenta quindi un campo magnetico intrinseco ovvero è un magnete naturale.*