Concetto di capacità

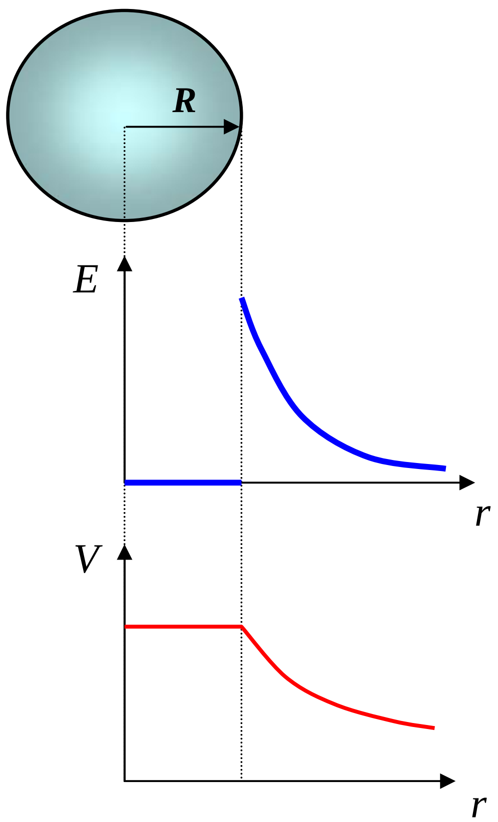
Il teorema di Gauss stabilisce che, posta una carica Q su un conduttore isolato, il campo elettrico $\vec{E}$ da essa prodotto nello spazio circostante è direttamente proporzionale alla carica stessa:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E \propto Q,$$

mentre la definizione di potenziale elettrostatico V stabilisce che esso è proporzionale al campo elettrico $\vec{E}$:

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \Rightarrow V \propto E.$$

Dobbiamo quindi aspettarci che per un conduttore isolato esista una proporzionalità fra la carica da esso posseduta e il suo potenziale, rispetto all'infinito. Verifichiamo questa affermazione nel caso di una sfera conduttrice di raggio R, con carica Q, isolata e in equilibrio elettrostatico. Ricordando che posto come riferimento $V(r)= 0$ per $r \to \infty$, si ha:



per $r > R$

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}, \quad V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$$

per $r < R$

$$\vec{E}(r) = 0, \quad V(r) = V(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$$

e quindi segue che:

$$V_{sfera} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} \Rightarrow Q = 4\pi\varepsilon_0 R \cdot V_{sfera}.$$

Ossia c'è una relazione lineare fra la carica Q posseduta dalla sfera ed il potenziale cui essa si porta:

1) $Q \propto V_{sfera}$

Si può dimostrare che, detta Q la carica posseduta da un qualunque conduttore isolato e V il relativo potenziale, la relazione (1) continua ed essere vera ossia sempre $Q \propto V \Rightarrow Q = C \cdot V$ dove si è indicata con C, detta ***Capacità elettrica del conduttore isolato,*** la costante di proporzionalità fra Q e V.

2) $C = \dfrac{Q}{V}$ *Unità di misura :1 farad = 1F = 1 coulomb/1 volt = C/V*

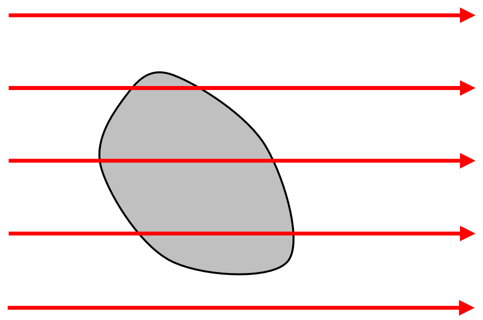
Si dimostra che la capacità dipende solo dalla geometria del conduttore. Questo è immediato per una sfera isolata per la quale la capacità dipende solo da raggio R, infatti:

$$C_{sfera} = \frac{Q}{V_{sfera}} = 4\pi\varepsilon_0 R .$$

La proporzionalità fra carica e potenziale, ovvero la capacità, cambia se il conduttore non è isolato; infatti in questa situazione il potenziale del conduttore è determinato sia dalla carica da esso possedute sia dalla carica eventualmente presenti su gli altri conduttori. Per analizzare quanto succede per un conduttore non isolato dobbiamo parlare di un fenomeno della *induzione elettrostatica*.

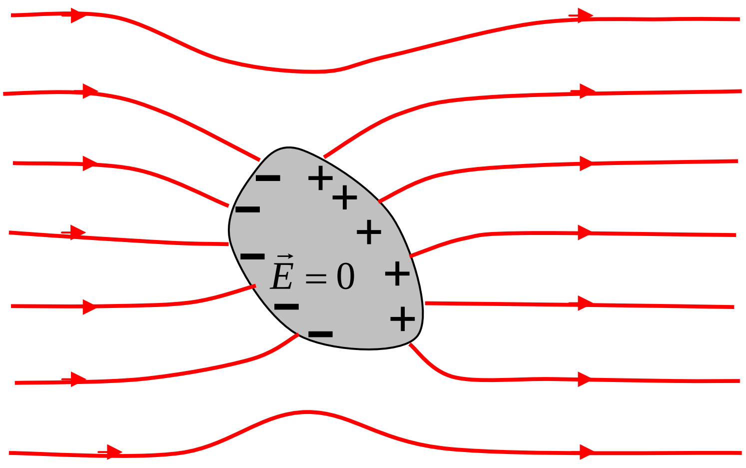
L'induzione elettrostatica

Poniamo un conduttore scarico in un campo elettrico $\vec{E}_{est}$ (uniforme) generato da cariche moto distanti dal conduttore, cosi da poter assumere che esse non siano disturbate in nessun modo e quindi $\vec{E}_{est} = cost.$



$\vec{E}_{est}$ agisce sulle cariche libere $\pm q$ del conduttore ponendole inizialmente in moto.
Poiché $\vec{F}_{el} = \pm|q| \cdot \vec{E}_{est}$, cariche di segno opposto si portano su superfici opposte.
Dopo un certo tempo, il conduttore si porterà in equilibrio elettrostatico.

All'equilibrio si saranno prodotte delle distribuzioni di carica (detta ***carica indotta***) di segno opposto $\pm|q_i|$ con $\sum q_i = 0$.
Queste cariche creano un campo elettrico $\vec{E}_{IND}$ che, sovrapponendosi a quello originario, creano una nuova configurazione del campo $\vec{E}_{TOT} = \vec{E}_{IND} + \vec{E}_{est}$ dovunque, con $\vec{E}_{TOT} = 0$ all'interno del conduttore.



Dette:

- $|Q_{est}|$ le cariche esterne, di un solo segno, che generano il campo iniziale $\vec{E}_{est}$
- $Q_{i-} = \sum q_{i,}$ (con $q_i < 0$), la carica indotta negativa totale
- $Q_{i+} = \sum q_{i,}$ (con $q_i > 0$), la carica indotta positiva totale
-

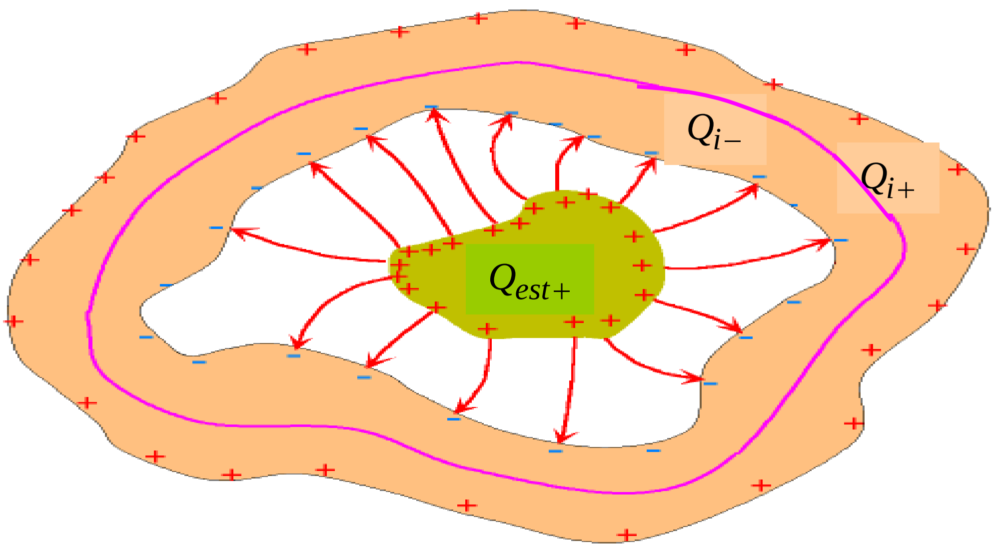
sia ha sempre che:

a) $|Q_{i-}| = |Q_{i+}|$ come conseguenza della conservazione della carica

b) $|Q_{i\pm}| \leq |Q_{est}|$ poiché non tutte le linee di campo di $\vec{E}_{est}$ confluiscono sul conduttore.

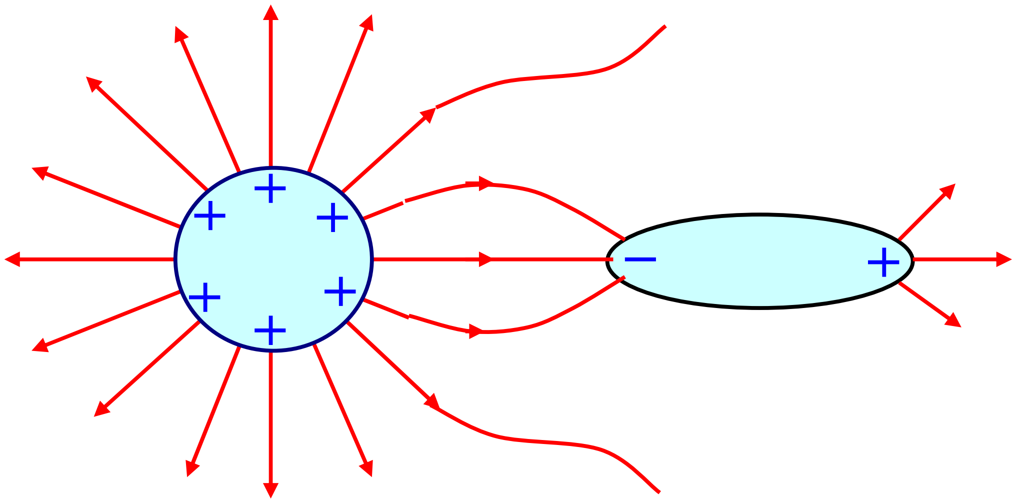
Il caso limite si ha quando tutte le linee di campo di $\vec{E}_{est}$, ovvero tutte le linee di campo che partono dalle Q_{est}, confluiscono sul conduttore posto nel campo $\vec{E}_{est}$; in tal caso succede che $|Q_{i\pm}| = |Q_{est}|$ in tal caso il sistema è detto a induzione completa.

E' evidente che un sistema è rigorosamente a induzione completa solo se un conduttore circonda completamente l'altro, come mostrato in figura.



Capacità del conduttore non isolato.

Supponiamo che ad una sfera conduttrice con carica $+Q$ sia avvicinato un altro conduttore scarico.
Si ha il fenomeno dell'induzione elettrostatica.



Per il principio di sovrapposizione, assumendo che la distribuzione della carica sulla sfera non sia modificata sensibilmente, il potenziale della sfera non isolata $V_{s.n.i}$ è:

$$V_{s.n.i.} = V_{s.i.} + V^{+} + V^{-}$$

dove V^{+} è il potenziale dovuto alle cariche Q_{i+} (quindi $V^{+}>0$)
V^{-} è il potenziale dovuto alle cariche Q_{i-} (quindi $V^{-}<0$)
$V_{s.i}$ il potenziale della sfera isolata.

Poiché le Q_{i-} sono più vicine alla sfera delle Q_{i+} $\Rightarrow |V^{-}| > |V^{+}| \Rightarrow$

$$V_{s.n.i.} < V_{s.i.} \Rightarrow \frac{Q}{V_{s.i.}} < \frac{Q}{V_{s.n.i.}} \Rightarrow \boxed{C_{s.i.} < C_{s.n.i.}}$$

La capacita di un conduttore non isolato aumenta; questo effetto è tanto maggiore quanto maggiore è Q_{i-} ossia quanto più si è vicini alla condizione di induzione completa.

Un sistema di due conduttori affiancati in modo che si realizzi fra loro l'induzione completa prende il nome di *condensatore*.

Condensatori

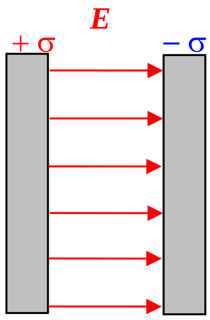
Un condensatore è un sistema di due conduttori (detti armature) fra i quali si verifica l'induzione elettrostatica completa. La capacità è definita come:

$$C = \frac{|Q|}{|\Delta V|} \quad (\text{ in F})$$

dove Q è la carica presente su una delle due armature, ΔV la differenza di potenziale fra le armature.
Si trova che la capacità di un condensatore dipende solo dalla sua geometria.

Condensatore piano ideale.

Le due armature sono da due superficie piane e parallele di area A poste a distanza d, con d molto minore delle dimensioni lineari di A. In questa ipotesi possiamo assumere la distribuzione di carica sull'armature equivalente a quella di due piani carichi, paralleli ed infiniti, con la densità di carica uguale ma opposta (vista precedentemente).



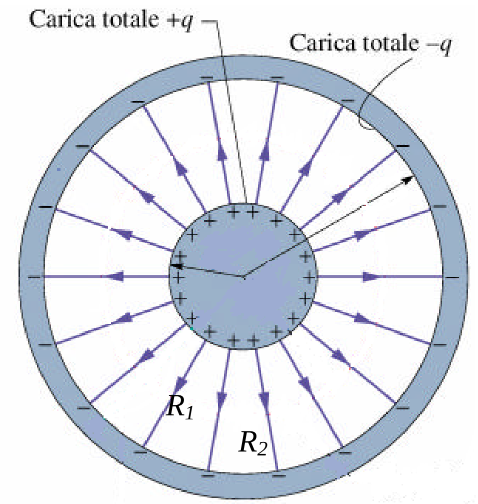
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow |\Delta V| = Ed = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}$$

$$Q = \sigma A \Rightarrow C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\sigma A}{\frac{\sigma d}{\varepsilon_0}} = \varepsilon_0 \frac{A}{d} \qquad \Rightarrow C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

La capacità di un condensatore a faccia piane e parallele dipende solo dalla geometria del sistema (A,d) e non dalle quantità elettriche (ΔV,Q).

Condensatore sferico

I due conduttori (armature) sono due sfere concentriche di raggio R_1 e R_2.



Ricordiamo che il campo è diverso da zero sono nei punti a distanza dal centro $R_1 \le r \le R_2$ ed è pari a:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r} \Rightarrow$$

$$|\Delta V| = -\int_{R_2}^{R_1} \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_{R_2}^{R_1} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}\cdot d\vec{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_2}^{R_1} -\frac{1}{r^2}dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R2}\right) \Rightarrow$$

$$|\Delta V| = \frac{q(R_2 - R_1)}{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}, \qquad C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{q}{\frac{q(R_2 - R_1)}{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{(R_2 - R_1)}$$

La capacità anche in questo caso dipende solo dalla geometria.

Osserviamo che il valore limite è sempre $C = \varepsilon_0 \dfrac{area\ armature}{distanza\ \ fra\ esse}$

Infatti,se

$$R_2 = R >> d = (R_2 - R_1) \Rightarrow 4\pi R_1 R_2 \approx 4\pi R^2 = area\ armature$$

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{(R_2 - R_1)} \approx \varepsilon_0 \frac{4\pi R^2}{d} = \varepsilon_0 \frac{area\ armature}{distanza}.$$

Energia elettrostatica

Un condensatore carico immagazzina energia associandola al campo elettrico ossia sotto forma di energia potenziale elettrostatica.

Per caricare un condensatore, dobbiamo collegarlo ad una "pompa" che sposta le cariche positive (o negative) da un'armatura e all'altra. In questo processo, detto **processo di carica del condensatore,** è compiuto un lavoro.
Se sulle armature vogliamo portare una carica Q (ossia caricare il condensatore con una carica Q), dobbiamo spostare successivamente tante cariche infinitesime dq sulla stessa armatura. Per portare la prima quantità infinitesima dq non viene fatto lavoro perché non c'è ancora campo elettrico; per portare le successive, serve un lavoro via via maggiore perchè il campo elettrico diviene sempre più intenso. Poiché si avvicinano e si depositano sull'armatura cariche dello stesso segno, non è il campo elettrico a fare lavoro ma un agente esterno. Si ha un lavoro fatto dall'esterno sul sistema che, per la conservazione dell'energia, deve restare in esso immagazzinato.

Calcoliamo il lavoro esterno dW fatto per caricare il condensatore C, assumendo che stiamo portando un infinitesimo di carica dq mentre sul condensatore c'è gia un carica q ovvero un differenza di potenziale fra le armature $V = q/C$.

$$dW = V \cdot dq = \frac{q}{C} dq$$

Il lavoro totale per portare la carica sull'armature da 0 a Q, con incrementi successivi dq è la somma di tutti i corrispondenti contributi dW:

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{(VC)^2}{C} = \frac{1}{2} C V^2$$

Questo lavoro è immagazzinato nel condensatore.
Un condensatore C caricato con una carica possiede quindi una energia potenziale elettrostatica U_E dove:

$$U_E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2$$

Ricordiamo che se in un sistema è immagazzina energia potenziale, la sua configurazione deve cambiare in quanto l'energia potenziale è associata alla variazione di una sua proprietà (una molla possiede energia potenziale elastica se è allungata o compressa). L'energia potenziale elettrostatica in un condensatore deve essere associata al campo elettrico fra le armature, essendo questa l'unica proprietà che varia fra un condensatore carico ed uno scarico.

Vediamo ciò in dettaglio, riferendoci ad un condensatore piano ideale

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}.$$

$$U_E = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 \frac{A}{d}\right)(Ed)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 (Ad)$$

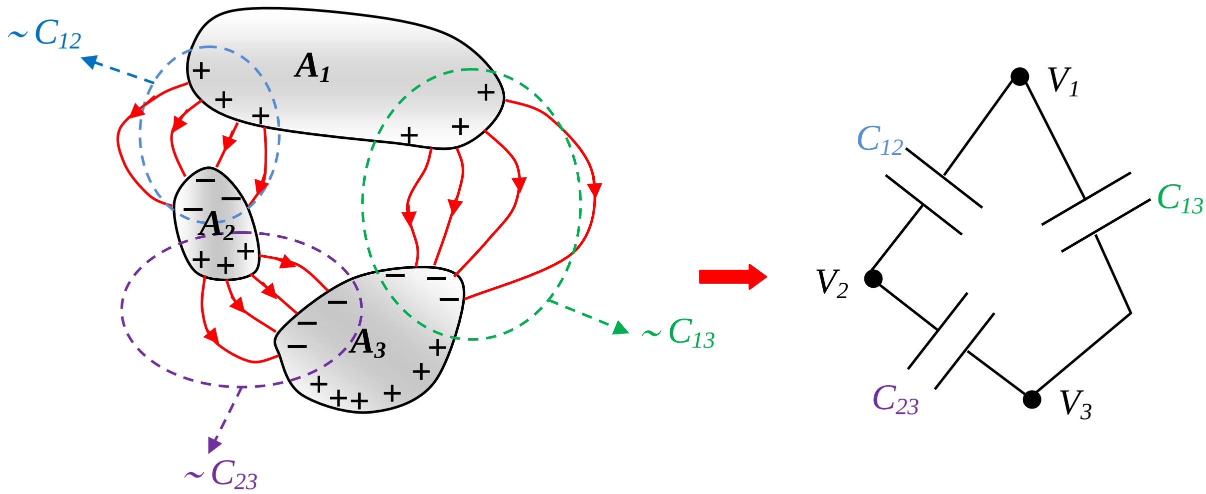
Osserviamo che la quantità *Ad* è il volume interno al condensatore ovvero la regione di spazio in cui è stato creato il campo. Possiamo pensare quindi ad una energia distribuita nello spazio con una densità u_E valutabile come:

$$u_E = \frac{U_E}{Vol} = \frac{\dfrac{\varepsilon_0 E^2 (Ad)}{2}}{Ad} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Questo risultato è generalizzabile: una qualsiasi regione dove esiste un campo elettrico ha associata una densità di energia che è proporzionale all'intensità al quadrato del campo elettrico; ovvero lo spazio è sede di energia se in esso c'è un campo elettrico. Questa energia è stata depositata nello spazio nel momento in cui è stato creato il campo elettrico posizionando le cariche.

Reti di condensatori

Vediamo cosa succede se si hanno più conduttori fra loro vicini. Limitiamoci al caso in cui essi sono solo 3, come in figura. Portiamo una carica positiva Q sul conduttore A_1, posto in vicinanza di due conduttori A_2 e A_3 scarichi. Dopo un certo tempo, per effetto dell'induzione elettrostatica si origina una configurazione del campo $\vec{E}$ e una distribuzione di cariche schematizzate in figura.



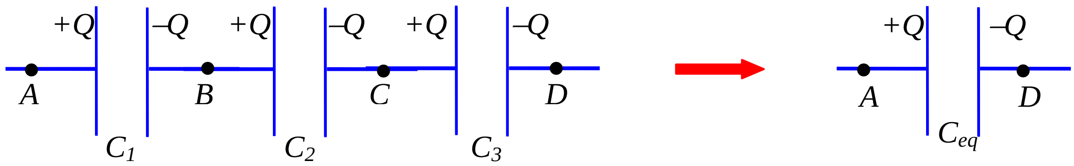
A regime, i singoli conduttori sono equipotenziali, rispettivamente a un potenziale V_1, V_2 e V_3 rispetto all'∞, e alcune regioni affiancate dei conduttori (zone racchiuse nelle curve tratteggiate in figura) mostrano la stessa carica, ma di segno opposto. Limitatamente all'interno di queste regioni si ha "induzione completa" e si può pensare di associare a ciascuna di esse un condensatore di valore opportuno. Il sistema dei 3 conduttori diviene quindi equivalente alla rete di condensatori in figura. Si può dimostrare che questo è sempre vero: un qualsiasi sistema di più conduttori può essere schematizzato da una opportuna rete di condensatori.

Il problema si sposta ora al calcolo della capacita complessiva (*Ceq* = ***capacità equivalente***) di una rete di condensatori. Essa dipende dal modo i cui i condensatori sono collegati fra loro. I casi limite sono:

a) tutti i condensatori della rete presentano sulle armature la stessa carica (detto ***collegamento serie***)

b) la differenza di potenziale fra le armature di tutti i singoli condensatori della rete è la stessa (detto ***collegamento parallelo***)

Caso a) Collegamento serie



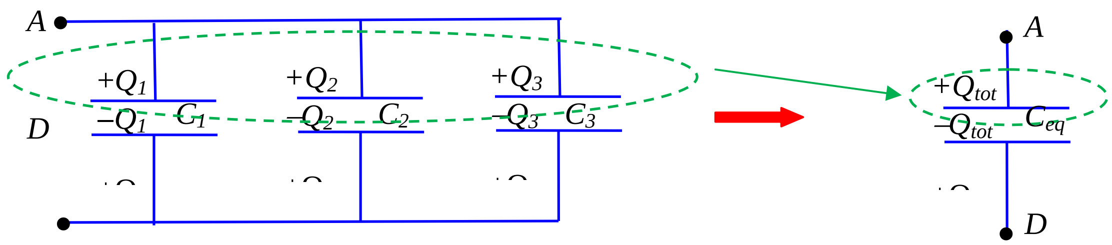
Dalla definizione di capacità di un condensatore segue:

$V_A - V_B = \frac{Q}{C_1}$, $V_B - V_C = \frac{Q}{C_2}$, $V_C - V_D = \frac{Q}{C_3}$, ma anche (*) $V_A - V_D = \frac{Q}{C_{eq}}$,

$$V_A - V_D = V_A - V_B + V_B - V_C + V_C - V_D = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right),$$

confrontando con * , segue $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$

Caso b) Collegamento parallelo



Dalla definizione di capacità di un condensatore segue:

$Q_1 = (V_A - V_D)C_1$; $Q_2 = (V_A - V_D)C_2$; $Q_3 = (V_A - V_D)C_3$; ma anche (**) $Q_{tot} = (V_A - V_D)C_{eq}$

$Q_{tot} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = (V_A - V_D)(C_1 + C_2 + C_3)$

confrontando con ** segue: $C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3$

Con queste formule, reti di condensatori complicate possono generalmente essere ridotte ad una sola capacità equivalente riconoscendo via via gruppi di condensatori collegati in serie e/o in parallelo e sostituendo ad essi la relativa capacità equivalente.