Cinematica – II°

4) Il moto in più dimensioni

Supponiamo che il punto P sia in moto nello spazio e sia $\vec{r}_0$ il suo vettore posizione all'istante di tempo t_0 e $\vec{r}_1$ il suo vettore posizione all' istante di tempo t_1 successivo ($t_1 > t_0$). In corrispondenza dell'intervallo di tempo di osservazione $\Delta t = t_1 - t_0$ si ha una variazione di posizione $\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$ (fig. 10).

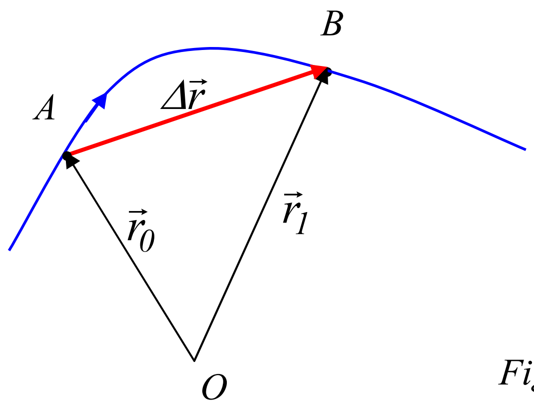


Fig. 10

Si definisce velocità vettoriale media $\vec{v}_m$ la grandezza:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad \text{(che si misura in } m/s\text{)}$$

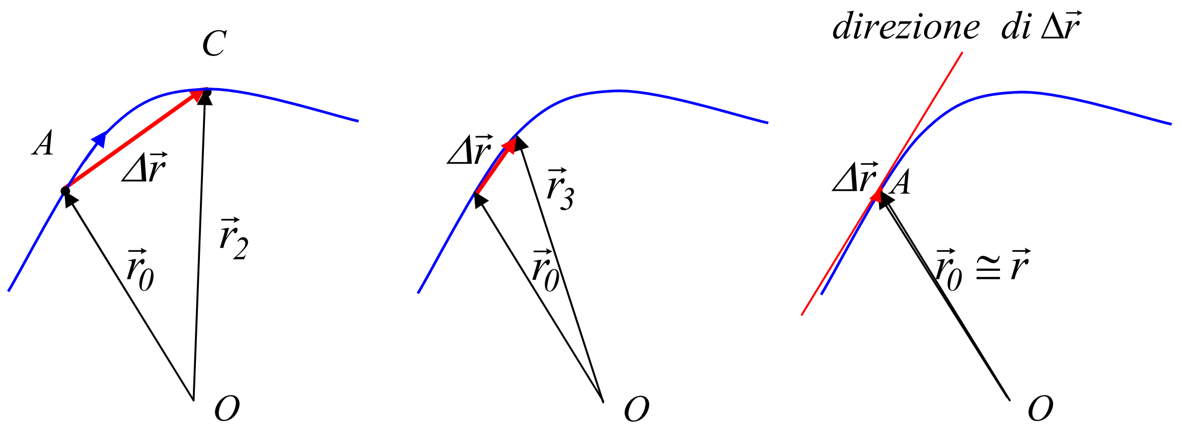
Ripetendo quanto detto nel par. 2, risulta più utile la valutazione della velocità vettoriale istantanea $\vec{a}_i$ ovvero la velocità vettoriale media quando $\Delta t \to 0$:

$$\vec{v}_i = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}_m}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \, .$$

La velocità vettoriale istantanea misura la rapidità di variazione del vettore posizione $\vec{r}$ nel tempo ossia è la derivata rispetto al tempo del vettore posizione. In seguito quando parleremo di velocità $\vec{v}$ ci riferiremo sempre alla velocità vettoriale istantanea:

5.1 $$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Il calcolo della derivata di un vettore è matematicamente non semplice e non sarà necessario il suo svolgimento in questo corso, pertanto terremo la 5.1 solo come definizione formale. Ciò non toglie che è utile capire la direzione di $\vec{v}$ che scaturisce dalla 5.1. Come si intuisce dalla fig. 11, per intervalli Δt sempre più piccoli il vettore $\Delta\vec{r}$ approssima il tratto di curva (ovvero di traiettoria) finché $\Delta t \sim 0$, $\Delta\vec{r}$ si riduce a un punto della curva ($\sim A$); in queste condizioni la direzione di $\Delta\vec{r}$ ha un solo punto in comune con la curva ossia la direzione di $\Delta\vec{r}$ è tangente in A alla curva. Poiché $\Delta\vec{r} \,//\, \vec{v} \;\Rightarrow$ la direzione della velocità in un punto della traiettoria è quella della tangente in quel punto alla traiettoria.



$t_2 - t_0 < t_1 - t_0$ $\qquad$ $t_3 - t_0 < t_2 - t_0$ $\qquad$ $t - t_0 \sim 0$ $(\Delta t \to 0)$

Fig. 11

Definita $\vec{v}_0$ la velocità all'istante t_0 e $\vec{v}_1$ la velocità all'istante t_1, in corrispondenza dell'intervallo di tempo di osservazione $\Delta t = t_1 - t_0$ si avrà una variazione della velocità in genere diversa da zero $\Delta\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_0$.

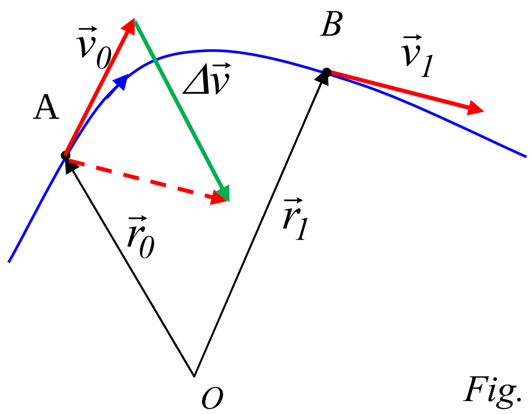


Fig. 12

Si definisce accelerazione vettoriale media $\vec{a}_m$ la grandezza:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad \text{(che si misura in } m/s^2\text{)}$$

Siamo anche qui più interessati alla valutazione dell' accelerazione vettoriale istantanea $\vec{a}_i$ ovvero l'accelerazione vettoriale media quando $\Delta t \to 0$:

$$\vec{a}_i = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}_m}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

L'accelerazione vettoriale istantanea misura la rapidità di variazione del vettore velocità $\vec{v}$ nel tempo ossia è la derivata prima rispetto al tempo del vettore velocità. Nel seguito quando parleremo di accelerazione $\vec{a}$ ci riferiremo sempre alla accelerazione vettoriale istantanea:

5.2 $$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Anche in questo caso, è utile capire la direzione di $\vec{a}$ senza effettuare formalmente la derivata di $\vec{v}$: $\vec{a}$ ha sempre la direzione e il verso di $\Delta\vec{v}$ che, come si evince dalla fig.12, punta verso l'interno della traiettoria. Maggiori dettagli circa la direzione di $\vec{a}$ saranno dedotti in seguito.

Osservazione. Se il moto è lungo una retta, scelta anche come asse di riferimento $\hat{i}$ (vedi fig. 3a) segue banalmente dalle 5.1 e 5.2 che i vettori $\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}$ sono tutti paralleli fra loro e paralleli ad $\hat{i}$. Le 2.2 e 2.4 danno quindi informazioni sul modulo e verso (rispetto ad $\hat{i}$).

6) Il moto in un piano (ovvero in due dimensioni).

Consideriamo il moto di un punto P lungo una curva piana, descritto in un sistema di riferimento cartesiano x-y. Quando il punto P, in un istante di tempo t, è nella posizione $\vec{r}(t)$, siano $\vec{v}(t)$ e $\vec{a}(t)$ la sua velocità ed accelerazione (fig 13).

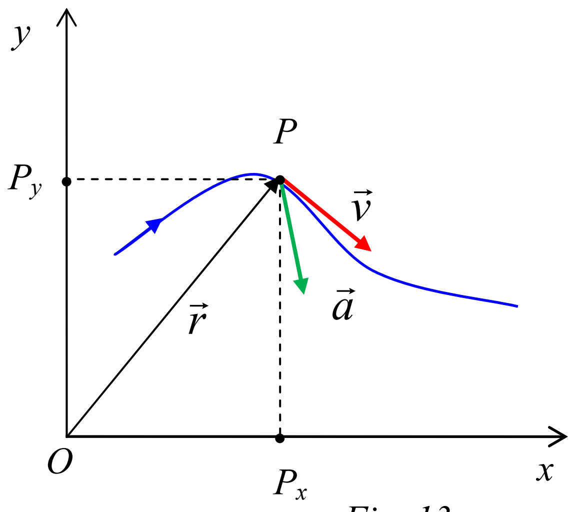


Fig 13

Il vettore $\vec{r}(t)$ può essere scritto in termini delle sue componenti cartesiane:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$$

dove $x(t)$ e $y(t)$ possono interpretarsi come le posizioni dei punti proiezione di P: P_x e P_y rispettivamente lungo l'asse x e l'asse y.

Ricordando le definizioni di velocità ed accelerazione vettoriali e che il sistema di riferimento è fisso ($\hat{i}, \hat{j}$ costanti) abbiamo:

$$\vec{v}(t)=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}\right)=\frac{dx(t)}{dt}\hat{i}+\frac{dy(t)}{dt}\hat{j}=v_x(t)\hat{i}+v_y(t)\hat{j}$$

con $v_x(t)$ e $v_y(t)$ rispettivamente le velocità con cui i punti proiezioni P_x e P_y si muovono lungo l'asse x e y;

$$\vec{a}(t)=\frac{d\vec{v}(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(v_x(t)\hat{i}+v_y(t)\hat{j}\right)=\frac{dv_x(t)}{dt}\hat{i}+\frac{dv_y(t)}{dt}\hat{j}=a_x(t)\hat{i}+a_y(t)\hat{j}$$

con $a_x(t)$ e $a_y(t)$ rispettivamente le accelerazioni con cui i punti proiezioni P_x e P_y si muovono lungo l'asse x e y.

Si nota che le grandezze lungo x,

6.1 $$x(t),\ v_x(t)=\frac{dx(t)}{dt},\ \ a_x(t)=\frac{dv_x(t)}{dt}$$

e quelle lungo y :

6.2 $$y(t),\ v_y(t)=\frac{dy(t)}{dt},\ \ a_y(t)=\frac{dv_y(t)}{dt}$$

evolvono indipendentemente l'una dall'altra e pertanto il moto del punto P nel piano può essere ricondotto a due moti rettilinei: il moto del punto proiezione P_x lungo l'asse x e il moto del punto proiezione P_y lungo y.

Istante per istante, le caratteristiche del moto nel piano sono ottenibili come:

6.3
$$\vec{r}(t)=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}$$
$$\vec{v}(t)=v_x(t)\hat{i}+v_y(t)$$
$$\vec{a}(t)=a_x(t)\hat{i}+a_y(t)\hat{j}$$

Chiariamo quando detto con un esempio, il cosiddetto *moto del proiettile.*

7) Il Moto del proiettile.

Lanciamo un oggetto verso l'alto, con velocità iniziale $\vec{v}_0$ inclinata di un angolo θ rispetto all'orizzontale e descriviamo il moto in un sistema x-y come in fig. 14.

Si assume che il punto di lancio coincida con l'origine del sistema di riferimento (ossia a $t_0 = 0$, $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$) e siano $v_{ox} = v_0 cos\theta$ e $v_{oy} = v_0 sen\theta$ le componenti di $\vec{v}_0$ rispetto all'asse x e y rispettivamente.

Lungo l'asse x, il moto è rettilineo uniforme ($a_x = 0$) e viste le condizioni iniziali e ricordando le 3.1 e 3.2, abbiamo:

7.1 $$v_x(t) = v_0 \cos\theta, \qquad x(t) = v_0 \cos\theta\, t$$

Lungo l'asse y, il moto è rettilineo uniformemente accelerato ($a_y = -g$) e viste le condizioni iniziali e ricordando le 3.3 e 3.4 abbiamo:

7.2 $$v_y(t) = v_0 sen\theta - gt, \qquad y(t) = v_0 sen\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2 .$$

Istante per istante $\vec{r}(t)$ e $\vec{v}(t)$ possono essere calcolate tramite le 6.3 usando le 7.1 e 7.2, come è fatto graficamente in fig. 14.

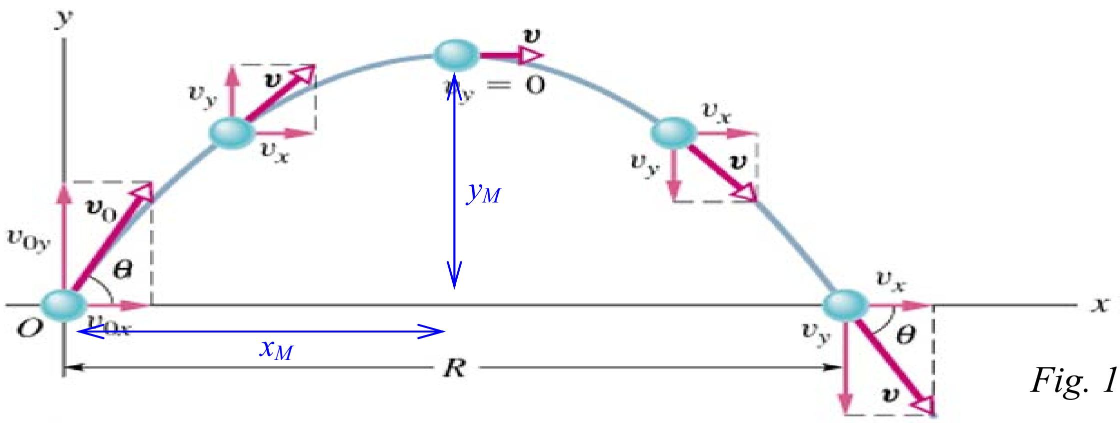


Fig. 14

Per essere più concreti, valutiamo qualche caratteristica del moto:

a) La traiettoria.

Essa è una curva nel piano x-y ossia è rappresentata da $y = f(x)$ che possiamo ottenere eliminando la variabile t fra $x(t)$ e $y(t)$. Dalla seconda delle 7.1 segue:

$t = \dfrac{x}{v_0 \cos\theta}$ che sostituita nella seconda delle 7.2 da:

$$y = v_0 sen\theta \frac{x}{v_0 \cos\theta} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\theta} \right)^2 = x \frac{sen\theta}{\cos\theta} - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\theta} \Rightarrow$$

$$y = -\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\theta} x^2 + \tan\theta\, x \Rightarrow$$

La traiettoria è una parabola, passante per l'origine, con concavità verso il basso.

b) La gittata, ovvero la distanza in cui l'oggetto tocca il suolo (R in fig. 14), supposto questo orizzontale.
R è lo spazio percorso lungo x nel tempo t_R necessario al corpo per toccare il suolo (ovvero raggiungere la posizione $y = 0$). Il tempo t_R è quindi determinato, usando la seconda delle 7.2, dalla condizione :

$$y(t_R)=0 \Rightarrow v_0 sen\theta\, t - \frac{1}{2}t^2 = 0 \Rightarrow \qquad t'=0, \quad t''=\frac{2v_0 sen\theta}{g}$$

Il tempo t' corrisponde all'istante iniziale (che corrisponde anch'esso alla condizione $y = 0$) mentre il tempo t'' è quello cercato: $t_R = t''$.

Lo spazio R è pertanto, usando la seconda delle 7.1:

$$R = x_M = x(t_R) \Rightarrow R = v_0 \cos\theta\left(\frac{2v_0 sen\theta}{g}\right) = \frac{2v_0^2 sen\theta\cos\theta}{g} = \frac{v_0^2 sen2\theta}{g}$$

(dove si è usata l'uguaglianza $2sen\theta\cos\theta = sen2\theta$)

Si noti che la gittata massima si ha per un angolo di lancio di 45° e vale v_0^2 / g

c) Massima altezza y_M raggiunta durante il moto.
Essa è determinata solo dal moto lungo y e sarà raggiunta nell'istante di tempo t_M in cui:

$$v_y(t)=0 \Rightarrow v_0 sen\theta - gt_M = 0 \Rightarrow t_M = \frac{v_0 sen\theta}{g}$$

Il questo tempo, lo spazio percorso lungo y ovvero y_M è:

$$y_M = y(t_M) \Rightarrow y_M = v_0 sen\theta\left(\frac{v_0 sen\theta}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 sen\theta}{g}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{v_0^2 sen^2\theta}{g}.$$

d) La posizione lungo x ovvero x_M in cui è raggiunta y_M.
Essa è determinata solo dal moto lungo x e sarà raggiunta nell'istante di tempo t_M. Il questo tempo, lo spazio percorso lungo x ovvero x_M è:

$$x_M = v(t_M) \Rightarrow x_M = v_0 \cos\theta\left(\frac{v_0 sen\theta}{g}\right) = \frac{v_0^2 sen\theta\cos\theta}{g} = \frac{R}{2}.$$

Si sottolinea che le formule precedenti per R, y_M, x_M sono valide solo per un lancio dell'oggetto dall'origine del sistema e per una caduta sul piano orizzontale (asse x). Se la situazione è diversa, bisogna scrivere correttamente le condizioni iniziali, procedere come sopra e si giunge ad espressioni diverse. Per esempio, le situazioni in fig. 15 hanno le condizioni iniziali specificate in tabella e risulta $R \neq D_a \neq D_b$.

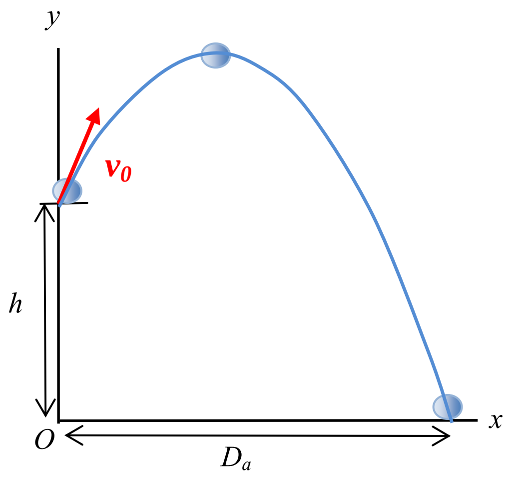


Fig 15a

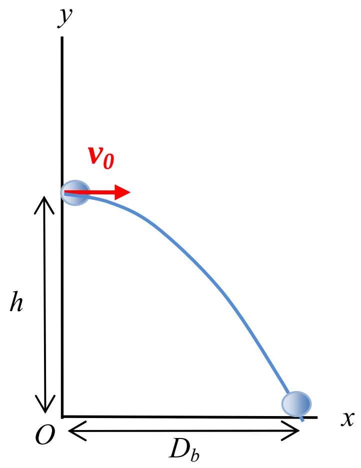


Fig 15b

per il moto	caso in fig *15a*	caso in fig *15b*
lungo x	$x_0 = 0,\ \ v_{ox} = v_0 cos\theta,\ \ a_x = 0$	$x_0 = 0,\ \ v_{ox} = v_0,\ \ a_x = 0$
lungo y	$y_0 = h,\ \ v_{oy} = v_0 sen\theta,\ \ a_y = -g$	$y_0 = h,\ \ v_{oy} = 0,\ \ a_y = -g$

8) Il moto circolare uniforme

Un moto piano particolarmente interessante è il moto lungo una circonferenza con *velocità in modulo costante*: $|\vec{v}(t)| = cost$ detto *moto circolare uniforme*. Il vettore $\vec{v}(t)$, essendo istantaneamente tangente alla circonferenza, varia sempre in direzione e verso e quindi per un tempo di osservazione $\Delta t = t_1 - t_0$ ci sarà una $\Delta\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_0 \neq 0 \Rightarrow \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \neq 0 \Rightarrow a_m \neq 0$.

Il moto è quindi accelerato; vogliano ora valutare questa accelerazione.

Con riferimento alla fig. 16a, sia A la posizione del punto in moto a t_0 e B quella a t_1, con $t_1 > t_0$.

Come è evidente in fig. 16a, i raggi che individuano le posizioni A e B agl'istanti di tempo t_0 e t_1 e le direzioni delle velocità negli stessi istanti di tempo formano un quadrilatero $OAQB$ avente angoli retti ai vertici A e B; di conseguenza $\theta + \alpha = \pi$. Per costruzione, $\alpha + \beta = \pi$ e quindi $\theta = \beta$ ossia, *dati due istanti di tempo, l'angolo compreso fra i raggi che individuano le relative posizioni è pari all'angolo compreso fra le direzioni delle rispettive velocità.* Pertanto i due triangoli in fig. 16b sono simili: $\Rightarrow \dfrac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \dfrac{\Delta v}{v} \Rightarrow \dfrac{\overline{AB}}{r} = \dfrac{\Delta v}{v}$ con $\overline{AB} < \widehat{AB} = v\Delta t$.

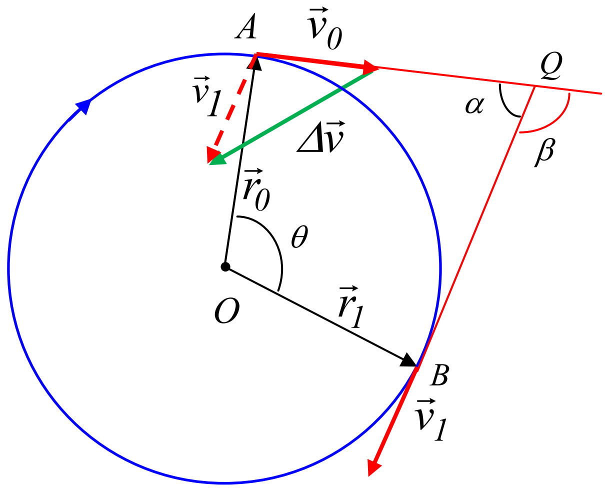


Fig. 16a

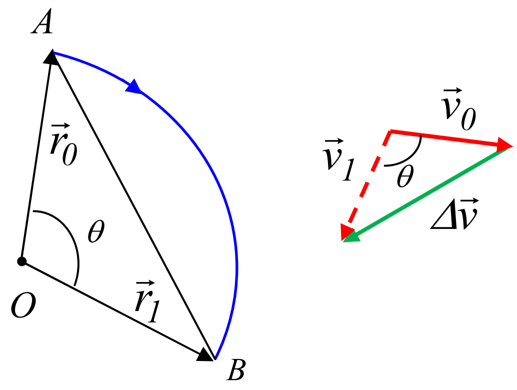


Fig 16b

Siamo interessati al calcolo dell'accelerazione istantanea ovvero quando $\Delta t \to 0$, in queste condizioni (vedi fig.17) la lunghezza del segmento $\overline{AB}$ può essere approssimata dalla lunghezza del corrispondente arco $\Rightarrow$

$$\overline{AB} \approx \widehat{AB} = v\Delta t \quad \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{r} \approx \frac{v\Delta t}{r} = \frac{\Delta v}{v} \Rightarrow \frac{\Delta v}{\Delta t} \approx \frac{v^2}{r} \Rightarrow a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r} \Rightarrow$$

8.1 $$a = \frac{v^2}{r}.$$

Si nota che la grandezza v^2/r ha effettivamente le dimensioni di una accelerazione: $\frac{(m/s)^2}{m} = \frac{m}{s^2}$

La relazione 8.1 fornisce il modulo del vettore accelerazione istantanea. Per individuare invece la sua direzione e verso procede graficamente come mostrato in fig. 17, vedendo il comportamento dei vettori coinvolti per intervalli di tempo sempre più piccoli (al limite $\Delta t \to 0$).

Risulta che: $\begin{cases} \Delta\vec{v} \,//\, \vec{a} \\ \Delta\vec{v} \perp \vec{v} \\ \vec{r} \perp \vec{v} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{a} \perp \vec{v} \\ \vec{r} \perp \vec{v} \end{cases} \Rightarrow \vec{a} \,//\, \vec{r}$

ossia: la direzione dell'accelerazione in un punto è parallela alla direzione del raggio condotto per il punto stesso.

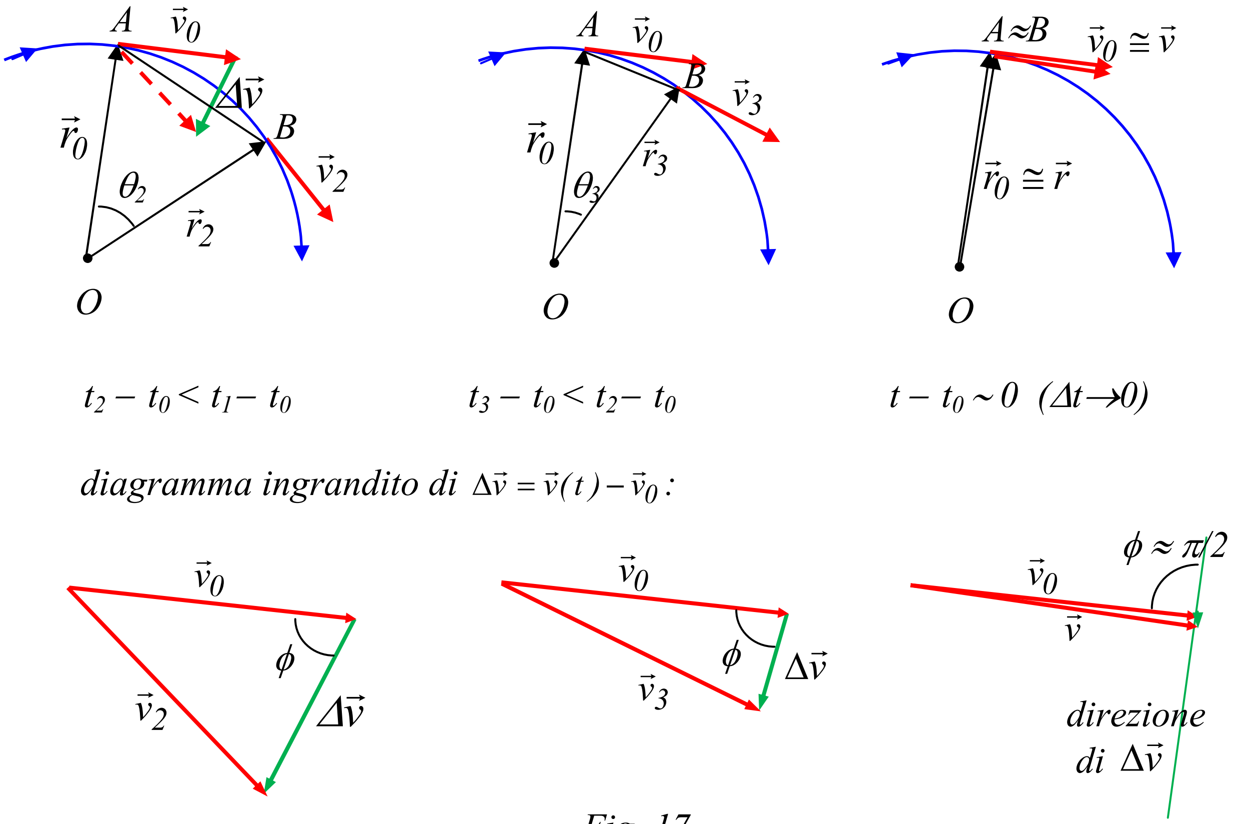


Fig. 17

Possiamo concludere dicendo che un moto circolare uniforme è caratterizzato da un'accelerazione:

a) avente sempre direzione radiale (e perpendicolare alla velocità),
b) con verso che punta al centro della circonferenza,
c) con modulo funzione di v ed r tramite la relazione $a = v^2/r$.

che chiameremo ***accelerazione centripeta***, non intendendo con ciò un nuovo tipo di accelerazione ma solo un modo sintetico per riferirci ad una accelerazione caratterizzata dalle tre proprietà suddette.

9) L'accelerazione nel moto curvilineo non uniforme.

In un moto curvilineo non uniforme, $\vec{v}$ è tangente alla traiettoria, mentre $\vec{a}$ punta all'interno della traiettoria (fig. 18a) e quindi possiamo scomporla in una componente $\vec{a}_t$ tangente alla traiettoria (e quindi parallela a $\vec{v}$) e in una componente $\vec{a}_n$ normale a $\vec{v} \Rightarrow$ $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$

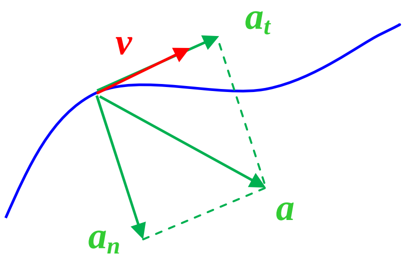


Fig. 18a

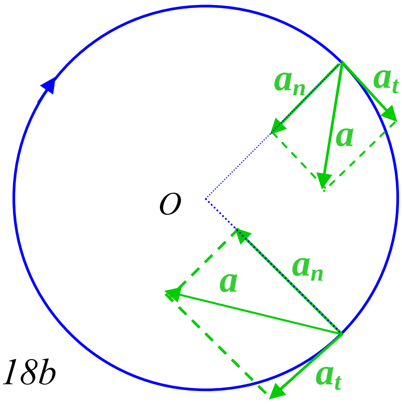


Fig. 18b

Ricordiamo che $\vec{v}$ e $\vec{a}$ in un moto rettilineo vario hanno modulo che varia (vedi par. 2) mentre la loro direzione coincide sempre con quella della retta del moto (ossia $\vec{v}$ e $\vec{a}$ sono parallele). Di conseguenza, in un moto rettilineo uniformemente accelerato si ha che:

a) la velocità *varia in modulo ma non in direzione* e si osserva che $\vec{a} // \vec{v}$

mentre nel moto circolare uniforme si ha che;

b) la velocità *varia in direzione ma non in modulo* e si osserva che $\vec{a} \perp \vec{v}$.

Leggendo all'inverso le precedenti implicazioni possiamo dire che: *una accelerazione parallela alla velocità causa variazione solo del modulo della velocità, mentre una accelerazione perpendicolare causa solo variazioni in direzione della velocità.*

Ad esempio in un moto circolare vario, posto r il raggio della circonferenza e $\vec{v}$ la generica velocità, l'accelerazione $\vec{a}$ non punta verso il centro della conferenza (vedi fig. 18b) ma solo la sua componente $\vec{a}_n$ è radiale e costituisce accelerazione centripeta $a_n = a_c = v^2/r$ che fa cambiare la direzione mentre la componente $\vec{a}_t$, tangenziale, fa variare solo il modulo di $\vec{v}$.

Generalizzando quanto detto, concludiamo osservando che in moto vario lungo una generica curva piana, in un punto P (vedi fig. 18a), si ha che $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$ con:

a_t	che determinata la variazione in modulo di $\vec{v}$ in *P*,
$a_n = \dfrac{v^2}{R}$	che determinata la variazione in direzione di $\vec{v}$ in *P*
	(con *R* *raggio di curvatura** in *P*)

* Per una generica curva piana, il raggio di curvatura varia da punto a punto e in un punto è definito come il raggio del (unico) cerchio tangente alla curva nel punto. Se la curva è quasi diritta il raggio di curvatura è grande, mentre raggi di curvatura piccoli si hanno in punti in cui ci sono forti cambiamenti di direzione.

In seguito (par. 11) sarà data una espressione per il calcolo di a_t.

10) Moti relativi

Abbiamo detto (vedi par. 1) che la descrizione del moto dipende dal sistema di riferimento e quindi per lo stesso moto possiamo avere descrizioni *esatte* ma diverse in relazione al sistema di riferimento scelto. Esempio: se siete su un treno che viaggia, il vostro amico seduto al vostro fianco *è fermo* rispetto a voi, ma *è in moto* rispetto ad un osservatore solidale con i binari.

Dobbiamo trovare una relazione che permetta di collegare fra loro le descrizioni del moto relative a sistemi di riferimento diversi.

Sia *S* un sistema di riferimento fermo ed *S'* un sistema di riferimento in moto rispetto ad *S* con una velocità $\vec{v}_{tr}$ (detta *velocità di trascinamento*) e consideriamo un punto materiale in moto in entrambi i sistemi. Se all'istante t_0 il punto materiale occupa la posizione *P* in *S*, coincidente con la posizione *P'* in *S'* (fig 19a), in un istante t_1 successivo si ha che il punto si sarà spostato di $\vec{s}$ (da *P* a *Q*) nel sistema S e di $\vec{s}'$ (da *P'* a *Q'*) nel sistema *S'*, mentre il sistema *S'*, assumendo che $\Delta t = t_1 - t_0$ sia sufficientemente piccolo da poter considerare in esso $\vec{v}_{tr}$ costante, si sarà spostato di $\vec{v}_{tr}\Delta t$ rispetto ad *S*.

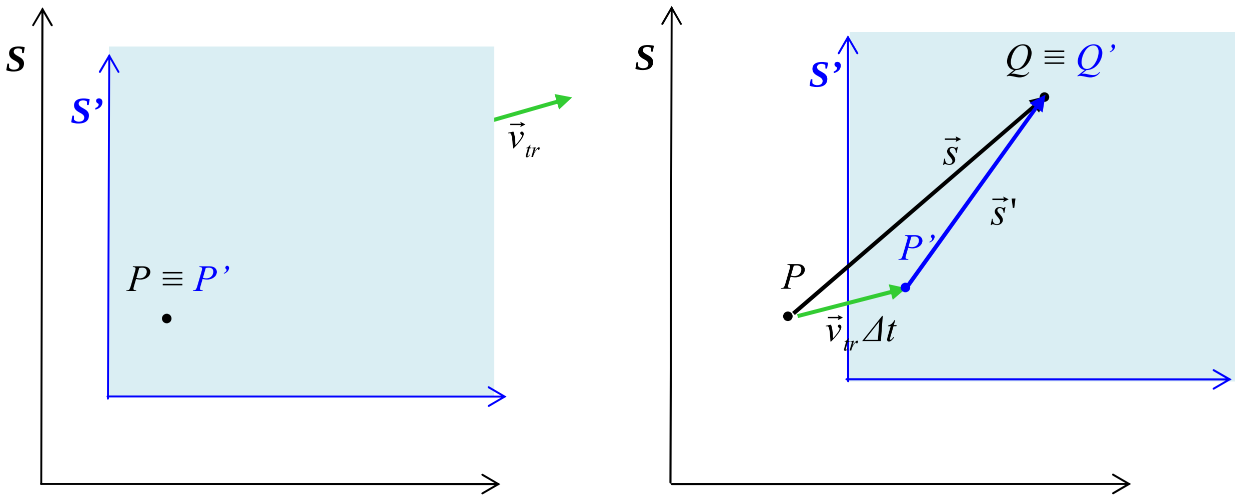


Fig. 19a *Fig. 19b*

Come è evidente dalla fig. 19b, i diversi spostamenti non sono indipendenti ma si ha:

$\vec{s} = \vec{s}' + \vec{v}_{tr}\Delta t$

Considerando ora il caso in cui $\vec{v}_{tr} = cost$ e ricordando la definizione di velocità vettoriale abbiamo :

$$\frac{\vec{s}}{\Delta t} = \frac{\vec{s}' + \vec{v}_{tr}\Delta t}{\Delta t} = \frac{\vec{s}'}{\Delta t} + \frac{\vec{v}_{tr}\Delta t}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\vec{s}}{\Delta t} = \frac{\vec{s}'}{\Delta t} + \vec{v}_{tr}$$ che al limite per $\Delta t \to 0$ diviene:

10.1 $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{tr}$ detta legge della composizione delle velocità di Galileo*

ossia la velocità $\vec{v}$ di un punto nel sistema fisso è somma della sua velocità nel sistema mobile $\vec{v}'$ e della velocità $\vec{v}_{tr}$ del sistema mobile rispetto al sistema fisso.

*La relazione 10.1 vale sono in meccanica classica ovvero quando le velocità in gioco sono molto minori della velocità della luce ($\sim 3 \cdot 10^8$ m/s)

Ricordando la definizione di accelerazione vettoriale abbiamo : $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{v}_{tr}}{dt} \Rightarrow$

10.2 $\vec{a} = \vec{a}'$ ossia *l'accelerazione è la stessa nei due sistemi* di riferimento.

Ricordando che la relazione 10.2 è stata ottenuta per $\vec{v}_{tr} = cost$ possiamo dire, generalizzando, che *in tutti i sistemi che si muovono l'uno rispetto all'altro di moto rettilineo uniforme si misura la stessa accelerazione*. Tali sistemi sono denominati ***sistemi inerziali***.

Poiché vedremo che le leggi fondamentali della dinamica dipendono solo dall'accelerazione, ne segue che esse sono valide e hanno la stessa forma per tutti gli osservatori in movimento rettilineo uniforme ossia in tutti i riferimenti inerziali i quali saranno di conseguenza indistinguibili.

Per illustrare la relazione 10.1 consideriamo il caso in cui si voglia attraversare un canale largo d in cui scorre acqua con velocità $\vec{v}_c$ costante ed uniforme dovunque con una barca in grado di muoversi rispetto all'acqua ferma con una velocità $\vec{v}_b$.

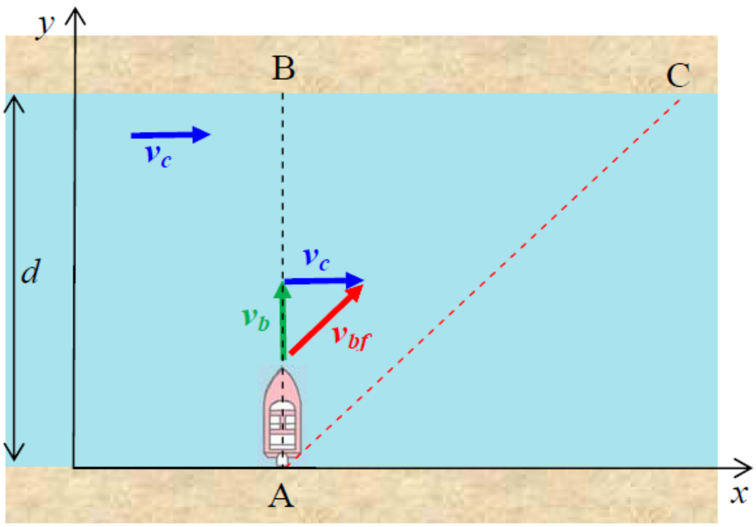


Fig. 20 a

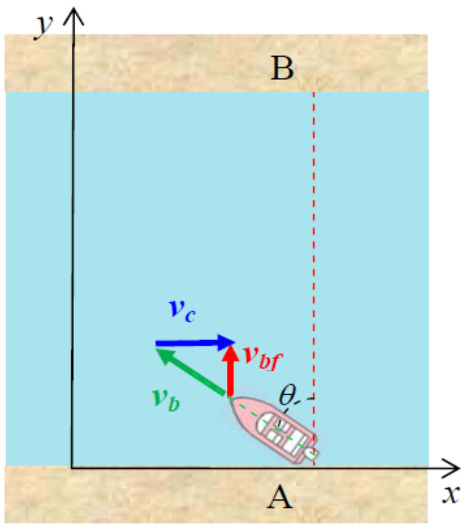


Fig. 20b

Partiamo da un punto A e puntiamo la barca perpendicolarmente alla sponda ($\vec{v}_b$ parallelo all'asse y, fig 20a). Il sistema solidale con l'acqua è il sistema mobile S' che si muove con velocità $\vec{v}_t = \vec{v}_c = v_c\hat{i}$ rispetto al sistema solidale con la sponda ovvero il sistema fisso S. Considerato che la velocità della barca nel sistema mobile S', ovvero rispetto all'acqua, è $\vec{v}' = \vec{v}_b = v_b\hat{j}$, la velocità nel sistema fisso S, ovvero rispetto alla sponda, è $\vec{v}_{bf} = \vec{v}' + \vec{v}_t = \vec{v}_b + \vec{v}_c = v_c\hat{i} + v_b\hat{j}$.

Il moto rispetto a S sarà in direzione obliqua rispetto ad x e la barca toccherà l'altra sponda nel punto C, ovvero spostata nel verso del moto dell'acqua di un tratto $\overline{BC}$. Il tempo t_a necessario per l'attraversamento è fissato solo dalla componente y di $\vec{v}_{bf}$:

$t_a = \dfrac{d}{v_y} = \dfrac{d}{v_b}$ con il tratto $\overline{BC} = v_x t_a = v_c t_a$.

Se, partendo da un punto A, vogliamo giungere sull'altra sponda esattamente di fronte (nel punto B in è fig *20b*) la velocità $\vec{v}_{bf}$ della barca in S deve parallela all'asse y ossia la direzione della velocità $\vec{v}'$ della barca in S' deve essere inclinata di un angolo θ rispetto all'asse y in modo tale da annullare la velocità della corrente lungo x: $v_b sen\theta - v_c = 0$ e di conseguenza $v_{bf} = v_b \cos\theta$. La velocità nel sistema fisso S è quindi: $\vec{v}_{bf} = \vec{v}' + \vec{v}_t = v_b \cos\theta\ \hat{j}$.

Il tempo t_a necessario per l'attraversamento è sempre determinato dalla componente y di $\vec{v}_{bf}$: $t'_a = \dfrac{d}{v_y} = \dfrac{d}{v_b \cos\theta}$.

Si osservi che risulta: $t'_a > t_a$.