Cinematica – III°

11) Cinematica Rotazionale

Abbiamo già trattato il moto circolare uniforme come moto piano (par. 8) introducendo la velocità lineare $\vec{v}$ e l'accelerazione lineare $\vec{a}$, ma se siamo interessati solo al moto lungo una circonferenza di dato raggio r è più comodo riferirsi alle coordinate polari $P(r,\theta)$ (vedi fig. 21) in quando solo $\theta = \theta(t)$ e lo studio del moto diviene un problema unidimensionale. Si parla allora di ***cinematica rotazionale.***

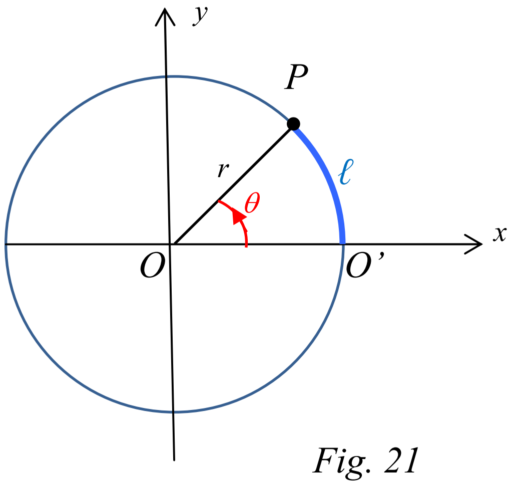

Fig. 21

Detta ℓ la lunghezza dell'arco $\overset{\frown}{O'P}$ ovvero la coordinata curvilinea del punto P rispetto a O', è per definizione:

$$\theta \text{ (in radianti)} = \frac{\ell}{r}$$

Convenzione: $\theta > 0$ per rotazioni antiorarie rispetto al semiasse x positivo.

Se P è in moto, esso sarà in una posizione A al tempo t_0 e una posizione B a un tempo t_1; nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_1 - t_0$ si avrà una corrispondente variazione della posizione angolare $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_0$ (*Fig. 21*). Osservazioni:

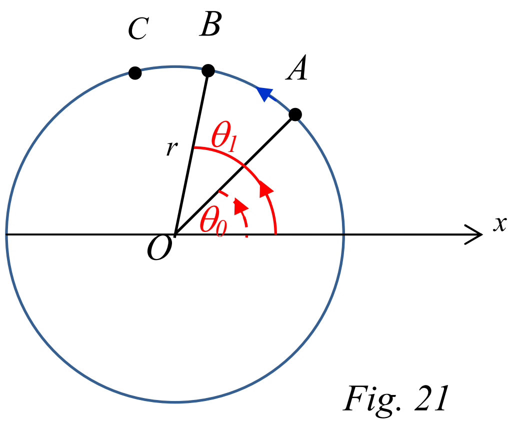

Fig. 21

1) $\Delta\theta$ non dipende dal percorso del punto nell'intervallo Δt infatti si ha lo stesso $\Delta\theta$ sia se, nell'intervallo Δt, il punto P va direttamente da A a B sia se, per esempio, raggiunge un altro punto C e poi torna indietro in B.

2) $\Delta\theta$ può essere maggiore, minore (o uguale) di zero in relazione alla convenzione sul segno di θ. Nel nostro caso: è positivo per moto in verso antiorario, negativo per moto in verso orario.

La variazione di posizione angolare $\Delta\theta$ relativa all'intervallo di tempo Δt, permette di caratterizzare il moto introducendo la grandezza ***velocità angolare media*** ω_m.

11.1 $$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_1 - \theta_0}{t_1 - t_0} \qquad \left(\textit{unità di misura} = \frac{rad}{s} \right)$$

In un moto con ω_m maggiore di un altro, si avrà una maggiore variazione della posizione angolare nello stesso intervallo di tempo di osservazione.

Osservato che $\Delta t > 0$ sempre, per quanto detto nell'osservazione 2, segue che ω_m può essere sia positiva che negativa (e ovviamente anche nulla). Essa, con la nostra convenzione per il segno di θ, sarà positiva se il moto è nel verso antiorario, negativa se il moto è nel verso orario. Invertendo la convenzione per θ, lo stesso moto avrà ω_m di segno opposto. (Si era già detto che la descrizione del moto dipende dal sistema di riferimento).

Anche ω_m, come v_m (vedi par. 1) fornisce una non completa caratterizzazione dello stato di moto; se si è interessati alla velocità angolare a un "istante di tempo" t ovvero alla ***velocità angolare istantanea*** ciò che possiamo eventualmente fare è calcolare ω_m relativamente ad un intervallo di tempo piccolissimo Δt intorno a t, al limite tendente a zero. Dal punto di vista formale (vedi par 1):

11.2 $$\omega_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \omega_i = \frac{d\theta}{dt}$$

Ossia la velocità angolare istantanea è la rapidità di variazione della posizione angolare occupata dal punto con il tempo, ovvero la derivata prima rispetto al tempo della posizione angolare $\theta(t)$.

Di seguito quando diremo velocità ω intenderemo riferirci alla ω_i $(\omega \equiv \omega_i)$.

Ora possiamo definire la velocità angolare ω_0 all'istante di tempo t_0 e la velocità angolare ω_1 all'istante di tempo t_1. In generale dobbiamo aspettarci che sia $\omega = \omega(t)$ cioè $\omega_1 \neq \omega_0$ e quindi in corrispondenza dell'intervallo di tempo di osservazione $\Delta t = t_1 - t_0$ riscontriamo una variazione di velocità angolare $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_0$. La variazione $\Delta\omega$ relativa all'intervallo di tempo Δt, permette un'ulteriore caratterizzazione del moto introducendo la grandezza ***accelerazione angolare media*** α_m.

11.3 $$\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_1 - \omega_0}{t_1 - t_0} \qquad \left(\textit{unità di misura} = \frac{rad}{s^2} \right)$$

In un moto con ω_m maggiore di un altro si avrà una maggiore variazione della velocità angolare nello stesso intervallo di tempo di osservazione.

Osservato che $\Delta t > 0$ e che ΔV può essere sia positiva che negativa (e ovviamente anche nulla) segue che anche α_m può essere sia positiva che negativa (e ovviamente anche nulla). Il suo segno non è direttamente correlato al verso del moto, ma sarà positiva se la velocità aumenta, negativa se la velocità diminuisce.

Si è generalmente interessati all'accelerazione angolare a un "istante di tempo" t ovvero ***l'accelerazione angolare istantanea*** come l'accelerazione angolare media relativa a un intervallo di tempo piccolissimo Δt intorno a t, al limite tendente a zero, ovvero:

11.4 $$\alpha_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \alpha_i = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow$$

Ossia l'accelerazione angolare istantanea è la rapidità di variazione della velocità angolare con il tempo, ovvero la derivata prima rispetto al tempo della velocità angolare $\omega(t)$.

Di seguito quando diremo accelerazione α intenderemo riferirci alla α_i $(\alpha \equiv \alpha_i)$.

Il moto rotazionale di un punto materiale è quindi caratterizzato dalla sua velocità angolare ω e dalla sua accelerazione angolare α; in particolare se $\alpha = \alpha(t)$ il moto è detto *rotatorio vario*, se $\alpha = cost$ il moto è detto *rotatorio uniformemente accelerato* e in particolare se $\alpha = cost = 0$ il moto è *detto rotatorio uniforme.*

Nel caso di $\alpha = \alpha(t)$, non c'è un'espressione semplice per l'equazione del moto $\theta = \theta(t)$ in quanto essa dipende esplicitamente dall'espressione di α, mentre è possibile scrivere l'equazione del moto nel caso di $\alpha = cost$.

Se confrontiamo le definizioni di θ, ω, α qui date con le relazioni di x, v, a per il moto unidimensionale (par. 2) vediamo che esse sono formalmente identiche se sostituiamo θ con x, ω con v e α con a; di conseguenza possiamo sostituire i simboli x, v, a con θ, ω, α nei calcoli del par. 3 ottenendo, con ovvio significato dei simboli, per il moto rotatorio uniformemente accelerato le seguenti relazioni:

11.5 $$\alpha = cost, \qquad \omega(t) = \omega_0 + \alpha t, \qquad \theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Le grandezze rotazionali θ, ω, α sono ovviamente correlate alle grandezze lineari ℓ, v, a. Infatti, dato un in intervallo di osservazione $\Delta t = t_1 - t_0$ e vista la definizione di

θ, la variazione della coordinata curvilinea $\Delta\ell$ (ovvero lo spostamento lungo la circonferenza) è data da: $\Delta\ell = \ell_1 - \ell_0 = r\theta_1 - r\theta_0 = r(\theta_1 - \theta_0) = r\Delta\theta \Rightarrow \Delta\ell = r\Delta\theta$.

Essendo r costante $\Rightarrow \dfrac{\Delta\ell}{\Delta t} = r\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} \Rightarrow \dfrac{d\ell}{dt} = r\dfrac{d\theta}{dt} \Rightarrow v = r\omega$ con v modulo della velocità lineare. Derivando quest'ultima relazione abbiamo:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d(r\omega)}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow a_t = r\omega$$

Notiamo che nella relazione precedente dv/dt è relativa alla sola variazione del modulo di $\vec{v}$ e, per quando visto nel par. 9, questa è legata alla sola componente tangenziale dell'accelerazione lineare.

Le relazioni che legano le variabili lineare a quelle rotazionali sono:

11.6 $\Delta\ell = r\Delta\theta, \quad v = r\omega, \quad a_t = r\alpha$

Osservazione.

Per la 11.5, in un moto circolare uniforme (ossia con $\omega_0 = cost$ e $\alpha = 0$) lo spostamento angolare $\Delta\theta$ in un intervallo Δt è dato da $\Delta\theta = \omega_0 \Delta t$.

Se indichiamo con T l'intervallo di tempo necessario a compiere un giro completo (ossia per avere $\Delta\theta = 2\pi$) si ha: $2\pi = \omega_0 T \Rightarrow T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$.

Il tempo T è detto ***periodo*** e il suo inverso $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$ detto ***frequenza*** (misurata in $Hz = s^{-1}$) rappresenta *il numero di giri effettuati nell'unità di tempo*.

Segue che: $\omega = 2\pi f$.

Un esempio importante: Il cambio

Consideriamo (vedi fig. 22) due moti circolari lungo circonferenze di raggi r_1 ed r_2 , con $r_1 > r_2$, vincolati in modo da avere lo stesso spostamento lineare (ossia misurato lungo le rispettive circonferenze) $\Delta\ell_1$ e $\Delta\ell_2$ in un intervallo di tempo Δt. Segue, con ovvio significato dei simboli, che:

$$\Delta\ell_1 = \Delta\ell_2 \Rightarrow \Delta\theta_1 r_1 = \Delta\theta_2 r_2 \Rightarrow \frac{\Delta\theta_1}{\Delta t} r_1 = \frac{\Delta\theta_2}{\Delta t} r_2 \Rightarrow \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{r_1}{r_2}\omega_1$$

ovvero se fissiamo la velocità angolare del moto 1, la velocità angolare del moto 2 dipende dal rapporto r_1/r_2, in questo esempio $\omega_2 > \omega_1$.

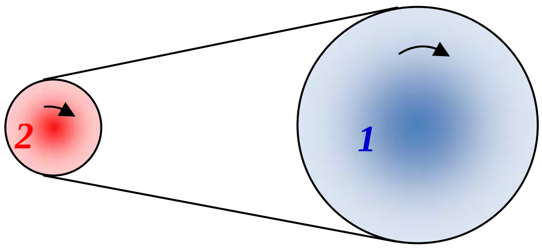

Fig 22a

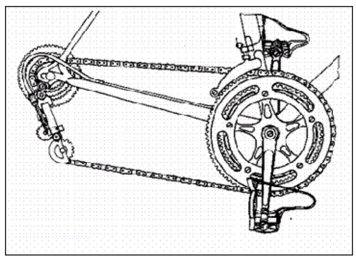

Fig. 22b

Questa situazione si realizza su una bicicletta (vedi fig. 22b) dove il moto 1 è quello di un punto periferico della *moltiplica* e il moto 2 quello di un punto periferico del *rapporto* solidale con la ruota, mentre la condizione di stesso spostamento lineare è imposta dalla catena che vincola il moto della moltiplica e quello dei rapporti. Il sistema costituisce *"un cambio"* ossia un dispositivo che permette, tramite la relazione precedente, di cambiare la velocità angolare della ruota, mantenendo costante la velocità di rotazione della moltiplica scegliendo un opportuno rapporto r_1/r_2.

12) Moto armonico

Il moto armonico è un moto unidimensionale (assumiamo lungo l'asse x) la cui equazione oraria è:

12.1 $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$.

La grandezza $(\omega t + \phi)$ è detta ***fase*** del moto armonico. La sua analisi dimensionale dice che A è una lunghezza (m), ω è un angolo/tempo (rad/s) e ϕ è un angolo (rad). Vediamone il significato fisico:

a) Significato di A (detta ***ampiezza***): poiché la quantità $\cos(\omega t + \phi)$ è limitata fra i valori ± 1, durante il moto armonico x può assumere solo valori compresi fra $\pm A$ ossia: $-A < x(t) < A$ quindi il moto armonico è un moto limitato nello spazio e A rappresenta *la massima distanza dal punto centrale* ($x = 0$) che è possibile raggiunge. Un percorso completo (da un punto x_i ad $+A$, quindi da $+A$ a $-A$ e infine da $-A$ a x_i) è detto *oscillazione completa.*

b) Significato di ω (detta ***pulsazione***): poiché ω ha le dimensioni di rad/s la quantità $T = 2\pi/\omega$ è un tempo (s). Calcoliamo la posizione di un punto in moto armonico a un tempo T dopo un generico istante t:

$$x(t+T) = A\cos\big(\omega(T+t)+\phi\big) = A\cos\left(\omega\frac{2\pi}{\omega}+\omega t+\phi\right) = A\cos\big(2\pi+\omega t+\phi\big) \Rightarrow$$

$$x(t+T) = A\cos\big(\omega t+\phi\big) = x(t)$$

Risulta: $x(t+T) = x(t)$ ossia dopo un tempo T il punto si ritrova nella stessa posizione quindi T è *il tempo necessario a compiere una oscillazione completa*.

T è detto ***periodo*** e il suo inverso $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ detto ***frequenza*** (misurata in $Hz = s^{-1}$) rappresenta *il numero di oscillazioni complete nell'unità di tempo*.

Il significato di ω è nella definizione di T.

c) Significato di ϕ (detta ***fase iniziale***): In fig. 23 è riportato, per $A = 0.6$ e $\phi = 0°,90°,45°$ il grafico di $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$. E' evidente che valori diversi di ϕ portano solo ad una traslazione della curva con conseguente cambio del valore di x a un fissato t. In particolare a $t = 0$ si ha $x(0) = 0,6;\ 0;\ 0,42$ rispettivamente per $\phi = 0°, 90°, 45°$ quindi l'angolo ϕ *specifica la posizione iniziale del moto* ossia $x_0 = x(t=0) = A\cos\phi$.

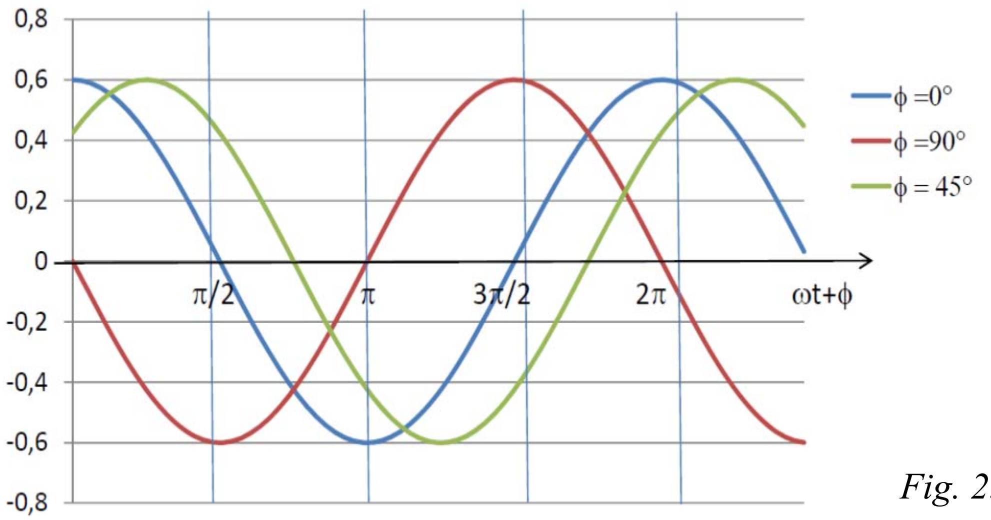

Fig. 23

L'equazione oraria permette in calcolo della velocità *v(t)* e della accelerazione *a(t):*

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$
$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A\cos(\omega t + \phi)\right) = -\omega A sen(\omega s + \varphi)$$
$$a(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\omega A sen(\omega t + \phi)\right) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 Ax(t)$$

Si nota (vedi anche fig. 24) che *v(t)* e *a(t)* variano con la stessa pulsazione, ma non sono in fase fra loro, e si ha, in modulo, $v_{Max} = \omega A$ e $a_{Max} = \omega^2 A$.

E' importante notare che ha:

12.2 $a(t) = -\omega^2 x(t)$

ossia l'accelerazione è direttamente proporzionale all'opposto dello spostamento e la costante di proporzionalità è il quadrato della pulsazione. Useremo in seguito questa proprietà per riconoscere come armonico il moto di un sistema.

Per capire meglio *v(t)* e *a(t)* riportiamo in fig. 24 il loro andamento in funzione della fase $\omega t + \phi$ per $\phi = 0$ *rad*, $\omega = 0,7$ *rad/s* ed $A = 10$ *cm.*

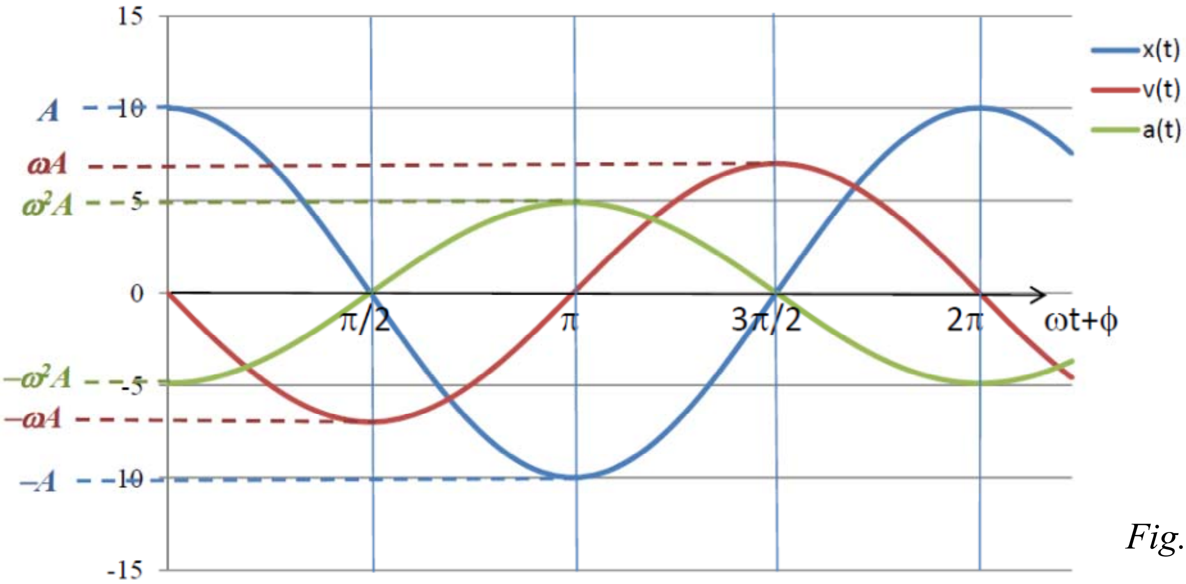

Fig. 24

E' evidente, come rappresentato anche in fig. 25, che agli estremi del moto, quando lo spostamento è massimo, è nulla la velocità ed è massima l'accelerazione; al centro dell'oscillazione, ossia quando lo spostamento è nullo, è massima la velocità e nulla l'accelerazione. Questo comportamento sarà rivelante quando si discuteranno gli aspetti energetici connessi al moto armonico.

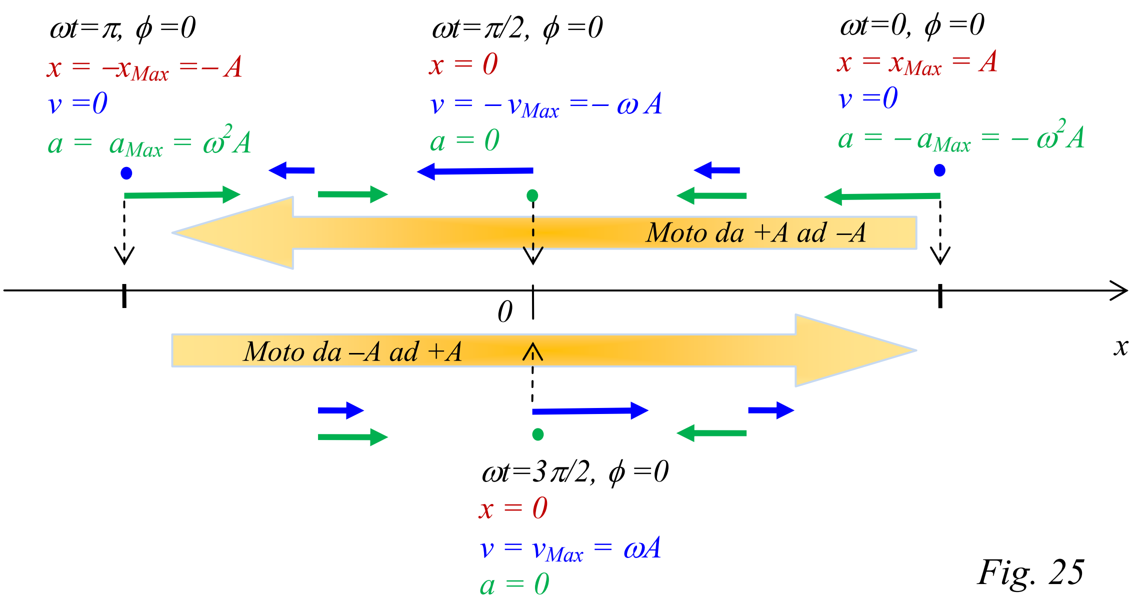

Fig. 25