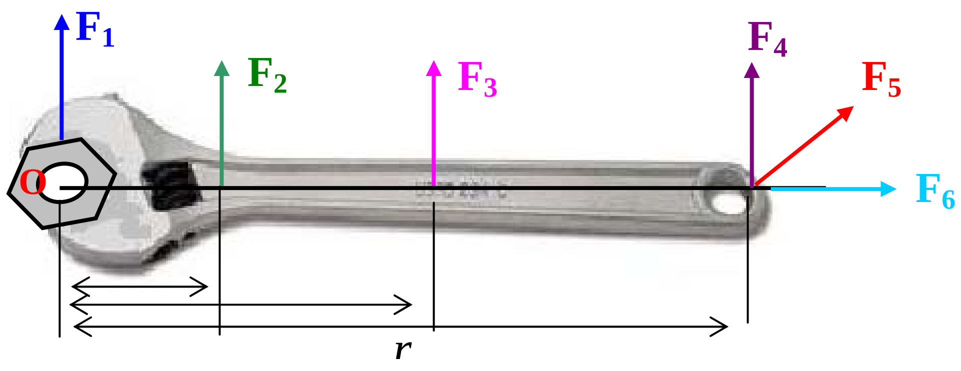
Cosa è necessario per avere una rotazione?

Supponiamo di voler ruotare il sistema in figura intorno al bullone, ovvero intorno all'asse verticale passante per O, usando forze nel piano orizzontale aventi tutte lo stesso modulo ma direzione e punto di applicazione diversi.



Osserviamo che:

a) la forza $\boldsymbol{F_1}$ non genera rotazione
b) la forza $\boldsymbol{F_2}$ fa ruotare il sistema,
c) la forza $\boldsymbol{F_3}$ fa ruotare il sistema ma più facilmente che nel caso *b*
d) la forza $\boldsymbol{F_4}$ fa ruotare il sistema ma più facilmente che nel caso *c*
e) la forza $\boldsymbol{F_5}$ fa ruotare il sistema ma più difficilmente che nel caso *d*,
f) la forza $\boldsymbol{F_6}$ non genera rotazione

Cosa cambia fra i casi a,b,c,d? ⇒ la distanza (*r*) fra il punto di applicazione della forza ed il punto intorno al quale il sistema può ruotare. Se $r=0$ (caso a) non c'è rotazione

Cosa cambia fra i casi d,e,f? ⇒ la direzione della forza rispetto all'asse delle distanze. Se la forza è parallela all'asse (caso *f*) non c'è rotazione.

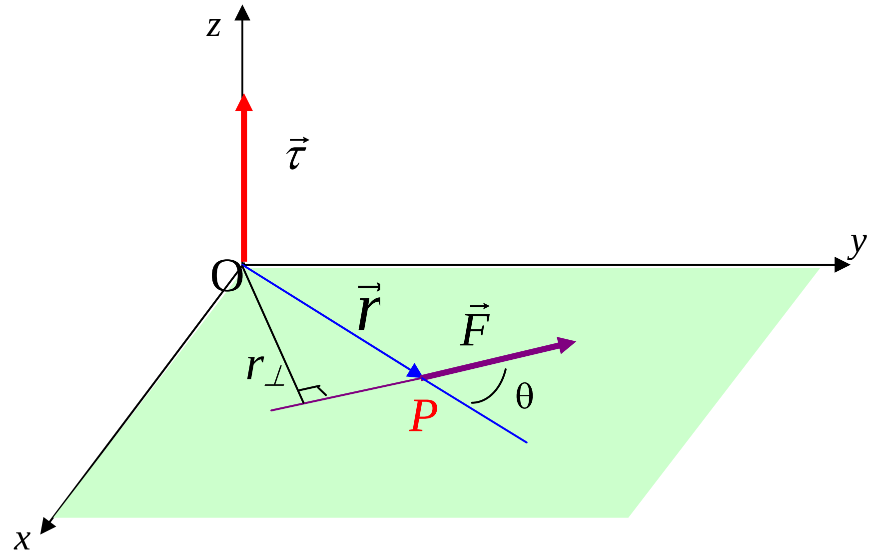
Per avere le rotazioni sono importanti,:

a) l'intensità della forza,
b) la distanza fra il punto di applicazione e il punto *O*
c) la direzione della forza

in una specifica combinazione che prende il nome *di momento di una forza.*

Definizione di momento di una forza

Data una forza $\vec{F}$ applicata in un punto P, detto $\vec{r}$ il vettore posizione di *P* rispetto al punto fisso *O*, si definisce momento della $\vec{F}$ rispetto al punto *O* il vettore $\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}}$

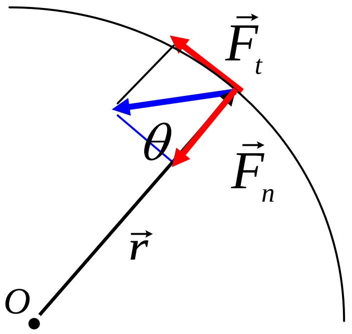


$\tau = rFsen\theta = (rsen\theta)F = r_\perp F$

Si sottolinea che se $\vec{F} // \vec{r} \Rightarrow \vec{\tau} = 0$

Equazione della dinamica di rotazione di un punto materiale.

Consideriamo un punto materiale di massa *m* in moto circolare lungo una circonferenza di raggio *r* e centro *O*. Se vogliamo variare il modulo della velocità di *m*, dobbiamo agire con una forza $\vec{F}$ che abbia una componente tangente alla traiettoria $F_t = Fsen\theta$.



Per la legge della dinamica del punto:

$F_t = ma_t$ con $a_t = \alpha \cdot r \Rightarrow F_t = m\alpha \cdot r \Rightarrow$

$Fsen\theta = m\alpha \cdot r \Rightarrow$

moltiplicando per *r* $rFsen\theta = m\alpha \cdot r^2$

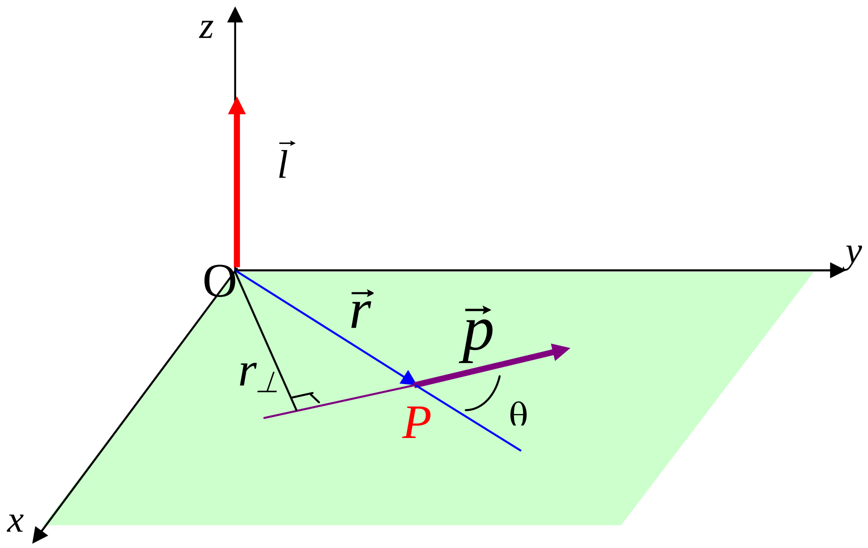
Ricordando che $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow \tau = rFsen\theta$

Segue $\tau = mr^2 \cdot \alpha$ ossia il momento della forza, rispetto ad *O*, applicato a *m* è effettivamente responsabile della sua accelerazione angolare. (*equazione della dinamica di rotazione di un punto*).

Per proseguire è necessario definire il momento della quantità di moto.

Definizione di momento della quantità di moto

Dato un punto materiale di massa *m* e velocità $\vec{v}$, posto in un punto P, e detto $\vec{r}$ il vettore posizione di *P* rispetto al punto fisso *O*, si definisce momento della quantità di moto di *m*, rispetto al punto fisso O, il vettore $\boxed{\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}}$ con $\vec{p} = m\vec{v}$.



$l = rpsen\theta = (rsen\theta)\,p = r_\perp p$

si sottolinea che se $\vec{p} // \vec{r} \Rightarrow \vec{l} = 0$

Relazioni fra $\vec{\tau}$ ed $\vec{l}$ per un punto materiale.

Se su un punto materiale di massa *m* agisce una forza $\vec{F}$, la velocità $\vec{v}$ della massa cambia e quindi cambia la sua quantità di moto $\vec{p}$ (secondo la relazione $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$); di conseguenza anche il momento della quantità di moto $\vec{l}$; ma cosa è responsabile delle variazioni di $\vec{l}$ nel tempo?

$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$ con $\vec{p} = m\vec{v}$, derivando rispetto a *t* $\Rightarrow$

$\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$ dove si osserva che $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ e $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \Rightarrow$

$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F}$.

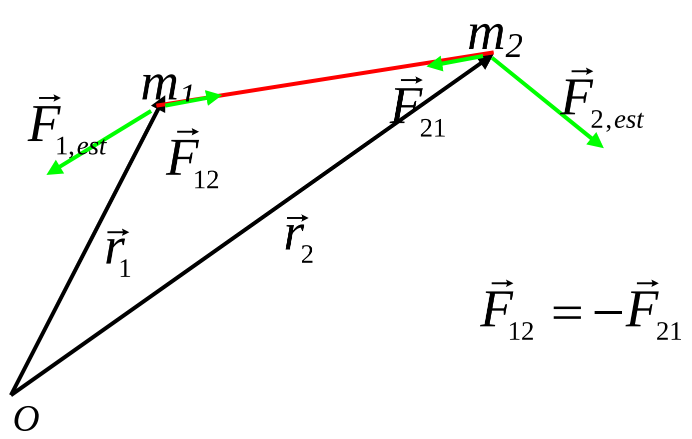
Osservando che $\vec{v} \times \vec{p} = \vec{v} \times m\vec{v} = 0$ perché $\vec{v}$ e $m\vec{v}$ sono due vettori paralleli e che $\vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$ abbiamo che:

(1) $\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{\tau}$ ossia le *variazioni di $\vec{l}$ per un punto materiale sono determinate da $\vec{\tau}$, momento delle forze agenti su esso.*

Momento angolare totale di un sistema e sue variazioni nel tempo

Dato un sistema di N punti materiali, il momento angolare totale $\vec{L}$ è definito come: $\vec{L} = \sum_N \vec{l}_i$. Vogliamo capire cosa determina le variazioni di $\vec{L}$ nel tempo.

Consideriamo il sistema minimo: due particelle, m_1 ed m_2, interagenti fra loro e con il moto esterno.



Il momento angolare totale $\vec{L}$ è $\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{l}_1}{dt} + \frac{d\vec{l}_2}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2$$

ma $\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{1,est} + \vec{r}_1 \times \vec{F}_{1,2}$ e $\vec{\tau}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_{2,est} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21}$ ossia

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{1,est} + \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{2,est} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21}$$

quindi ricordando $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ e posto $\vec{\tau}^{R}_{est} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{1,est} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{2,est}$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}^{R}_{est} + (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12}$$

dove il secondo termine è il prodotto vettoriale fra vettori paralleli, pertanto nullo.

Generalizzando, per un sistema di N punti materiali, abbiamo che $\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}^{R}_{est}$ ovvero:

il momento angolare totale $\vec{L}$ di un sistema di punti materiali, rispetto ad un punto fisso O, varia solo per azione del momento risultante delle forze esterne, $\vec{\tau}^{R}_{est}$, calcolato rispetto ad O.

Conservazione del momento della quantità di moto

Se su un sistema $\vec{\tau}^{R}_{est} = 0, \Rightarrow \dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}^{R}_{est} = 0 \Rightarrow \vec{L} = cost$

Legge di conservazione della quantità di moto: se la risultante dei momenti esterni agente sul sistema è nulla, il momento della quantità di moto resta costante.

$$\boxed{\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \vec{l}_3 + \ldots\ldots = cost \quad \text{se} \quad \vec{\tau}^{R}_{est} = 0}$$

Singoli $\vec{l}_i$ possono variare ma in modo che $\vec{L}_{tot}$ rimanga costante

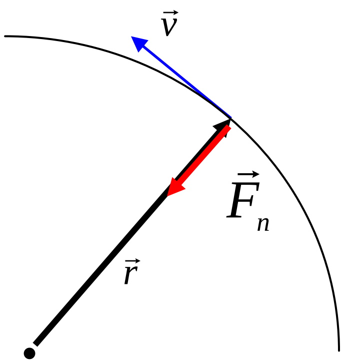
(n.b. deve essere $\vec{\tau}^{R}_{est} = 0$, ma non necessariamente $\vec{F}_{est} = 0$)

Una conseguenza importante della conservazione di $\vec{L}_{tot}$

Il moto di un corpo soggetto ad una forza centripeta si svolge su un'orbita piana.

Infatti consideriamo il moto 1) di una massa *m* legata con una corda
2) e/o moto di un pianeta

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$, essendo $\vec{r} \perp \vec{v}$ si ha $L=mvr$ con direzione perpendicolare al piano individuato da $\vec{r}$ e $\vec{v}$.



Le forze in gioco sono:

1) $F_n = T$ (tensione della corda)

2) $F_n = \dfrac{GmM}{r^2}$

$\vec{\tau}_{est} = \vec{r} \times \vec{F}$, ma $\vec{r}$ è parallelo ad $\vec{F} \Rightarrow \vec{\tau}_{est} = 0 \Rightarrow \vec{L} = cost$

in modulo $\Rightarrow$ *$L= mvr$ = costante*
in direzione e verso $\Rightarrow$ *il piano Π che contiene $\vec{r}$ e $\vec{F}$ non può cambiare $\Rightarrow$*
$\vec{v}$ deve restare nel piano Π $\Rightarrow$ orbita piana