Conservazione della quantità di moto di un sistema di punti materiali.

Se su un sistema non agiscono forze esterne ovvero se la risultante delle forze esterne che agiscono è nulla $\vec{F}_e^R = 0$ (e diremo il **sistema isolato**) abbiamo:

$$\frac{d\vec{P}_T}{dt} = \vec{F}_e^R = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{P}_T}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{P}_T = cost$$

In un sistema isolato la quantità di moto totale deve restare costante (**Principio di conservazione della quantità di moto**)

Sottolineiamo che dire $\vec{P}_T = \sum \vec{p}_i = cost$ non significa che il sistema non evolve ma solo che le singole $\vec{p}_i$ possono variare in modo che le variazioni di alcune $\vec{p}_i$ debbano essere compensate dalle variazioni di altre, in modo che la somma resti costante.

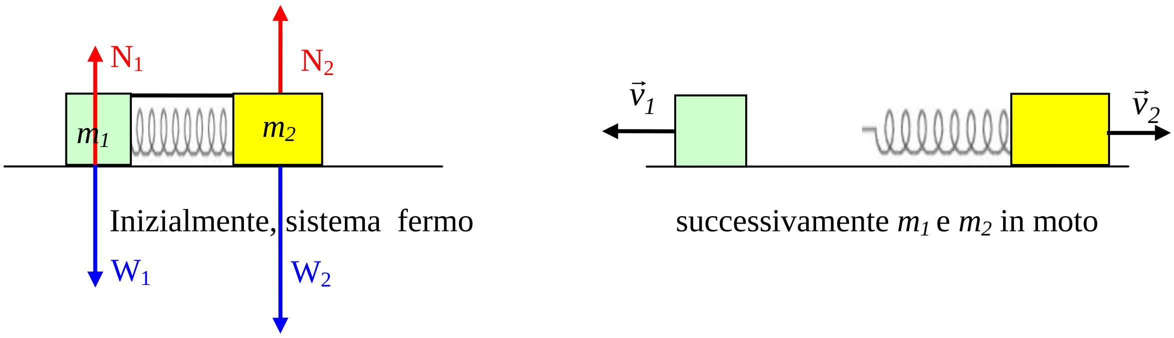
Ricordiamo che:

$$\frac{d\vec{P}_T}{dt} = \vec{F}_e^R \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{dP_{T,x}}{dt} = F_{e,x}^R \\ \dfrac{dP_{T,y}}{dt} = F_{e,y}^R \\ \dfrac{dP_{T,z}}{dt} = F_{e,z}^R \end{cases}$$

Queste relazioni permettono di applicare la conservazione della quantità di moto separatamente per le singole componenti ovvero anche ad una singola componente.
Ad esempio, se solo la componete x di $\vec{F}_e^R$ è nulla, $\left(F_{e,x}^R = 0 \right)$, solo la componente x di $\vec{P}_T$ si conserverà: $\dfrac{dP_{T,x}}{dt} = F_{e,x}^R = 0 \Rightarrow \dfrac{dP_{T,x}}{dt} = 0 \Rightarrow P_{T,x} = cost$

Conseguenza della conservazione di quantità di moto.

Consideriamo un sistema costituito da due masse (m_1 e m_2) tenute da una fune ideale e recante fra esse una molla ideale compressa. Le masse sono poggiate su un piano orizzontale senza attrito. Il sistema è fermo e quindi $\vec{P}_{T,iniziale} = 0$. Le forze generate dalla molla e dalla fune sono interne, mentre le forze esterne ($\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{W}_1, \vec{W}_2$) hanno risultante nulla: $\vec{F}_e^R = \vec{W}_1 + \vec{N}_1 + \vec{W}_2 + \vec{N}_2 = 0$.



Inizialmente, sistema fermo

successivamente m_1 e m_2 in moto

Supponiamo che la fune si rompa; le masse spinte dalla forza elastica si muovono ma essendo $\vec{F}_e^R = 0$ la quantità di moto totale del sistema non può cambiare: $\vec{P}_{T,iniziale} = \vec{P}_{T,finale} = 0$.

Ma: $\vec{P}_{T,finale} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = 0 \Rightarrow m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = 0 \Rightarrow m_1\vec{v}_1 = -m_2\vec{v}_2 \Rightarrow \vec{v}_1 = -\dfrac{m_2}{m_1}\vec{v}_2$

1) Le masse acquistano velocità nella stessa direzione ma verso opposto.
2) La massa più leggera acquista una velocità maggiore

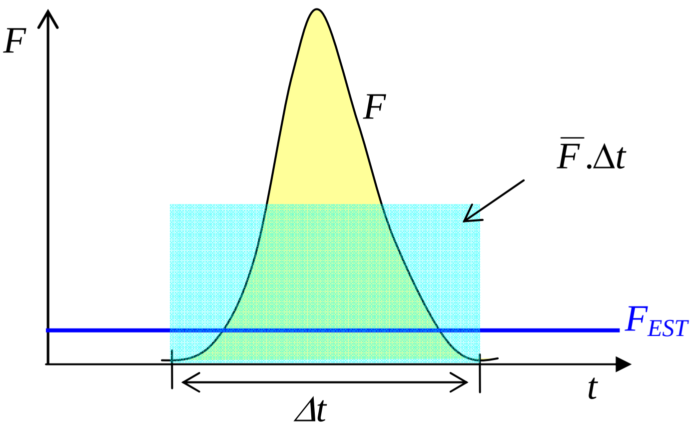
Conclusione: è impossibile in un sistema isolato imprimere una quantità di moto in un verso ad un corpo senza che un altro corpo acquisti una stessa quantità di moto in verso opposto.

Forze impulsive ed urti

La conservazione della quantità di moto può essere applicata, con buona approssimazione, quando si verifica che le forze interne $\vec{F}_{INT}$ sono molto più intense delle forze esterne $\vec{F}_{EST}$ nell'intervallo Δt in cui avviene l'interazione.

Le forze $\vec{F}$ caratterizzate da essere molto intense e di agire solo in un breve intervallo $\Delta t = t_f - t_{fi}$ sono dette **forze impulsive.**

Ricordiamo che $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow d\vec{p} = \vec{F}dt \Rightarrow$ nella direzione di $\vec{F}$ $\quad \Delta p = \int_i^f F dt \approx \overline{F} \cdot \Delta t$ con $\overline{F}$ valore medio di F in Δt.



Spesso F e Δt per le forze impulsive non sono misurabili separatamente, ma essendo la variazione della quantità di moto collegata ad entrambe, se definiamo **impulso** ***I*** la quantità $I = \int_i^f F dt \approx \overline{F} \cdot \Delta t$, (si misura in Ns), abbiamo che $\Delta p = I$ nella direzione in cui agisce la forza, ovvero: L'impulso è uguale alla variazione di quantità di moto prodotta dalla forza.

Se nelle interazioni fra punti materiali, le forze interne che agiscono sono impulsive avviene facilmente che $F_{INT} >> F_{EST}$ nell'intervallo dell'interazione $\Delta t = t_f - t_{fi}$ .Ignorando gli effetti delle forze esterne avvero assumendo $\vec{F}_{EST}^{R} \cong 0$ nell'intervallo di interazione si può applicare il principio di conservazione della quantità di moto fra gli istanti di tempo t_f e $t_i \Rightarrow \vec{P}_{T,iniziale} = \vec{P}_{T,finale}$

I fenomeni che verificano queste condizioni sono detti **urti** e le forze in gioco, generalmente di natura elastica in meccanica, hanno un andamento temporale come quello in figura.

Gli urti sono fenomeni di interazione fra corpi dominati da forze interne molto intense ma attive per tempi molto brevi per i quali la quantità di moto del sistema immediatamente prima dell'interazione è pari a quella immediatamente dopo.

Esempio 1) Urto fra una massa m in moto con velocità $\vec{v}$ ed una di massa M ferma. In seguito all'urto le masse restano unite.

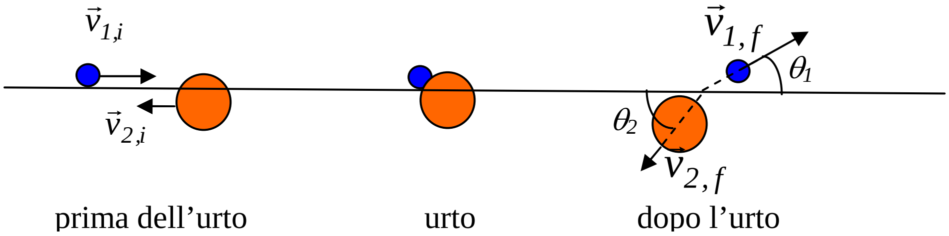
prima dell'urto dopo l'urto

quantità di moto iniziale: $\vec{P}_i = m\vec{v}_{m,i}$, quantità di moto finale: $\vec{P}_f = (M+m)\vec{v}_f$

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \Rightarrow m\vec{v}_{m,i} = (M+m)\vec{v}_f \Rightarrow \vec{v}_f = \frac{m}{m+M}\vec{v}_{m,i}$$

Velocità finale ha la stessa direzione e verso di quella iniziale ma in modulo minore.

Esempio 2) Urto fra due masse m_1 e m_2 in moto con velocità $\vec{v}_{1,i}$ e $\vec{v}_{2,i}$ che proseguono separatamente dopo l'urto.



quantità di moto iniziale: $\vec{P}_i = m_1\vec{v}_{1,i} + m_2\vec{v}_{2,i}$, quantità di moto finale: $\vec{P}_f = m_1\vec{v}_{1,f} + m_2\vec{v}_{2,f}$

a) $\vec{P}_i = \vec{P}_f \Rightarrow m_1\vec{v}_{1,i} + m_2\vec{v}_{2,i} = m_1\vec{v}_{1,f} + m_2\vec{v}_{2,f}$

Se negli urti si conserva anche l'energia cinetica essi sono detti **urti elastici**, altrimenti sono detti anelatici.

Se urto dell'esempio precedente è elastico, vale anche che:

b) $K_i = K_f \Rightarrow \frac{1}{2}m_1v_{1,i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2,i}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1,f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2,f}^2$

Le equazioni *a* e *b* permettono, nel caso l'urto avvenga con le velocità delle masse, sia prima che dopo l'urto, lungo la stessa direzione, di calcolare le velocità finali conoscendo quelle iniziali. Nel caso più generale di urto nello spazio per poter calcolare le velocità finali servono anche gli angoli di deviazione θ_1 e θ_2.