La dinamica del punto

1) Introduzione

La dinamica si occupa dello studio delle cause del moto o, in termini più concreti, delle circostanze che lo determinano e lo modificano.

L'esperienza comune ci dice che per muovere un oggetto, per variarne la sua velocità ovvero per cambiare il suo stato di moto dobbiamo agire su esso e chiameremo ***forza*** *l'azione in grado di variare lo stato di moto di un corpo*.

Ci serviremo inizialmente di un'entità astratta, dotata di massa ma con dimensioni trascurabili: ***il punto materiale***. Vedremo in seguito la validità di questa semplificazione e come tutte le leggi riferite al punto materiale possano essere poi estese ai corpi reali (dotati di massa e di dimensioni finite) interpretati come *sistemi di più (molti) punti materiali*.

2) Il primo principio della dinamica

Proviamo a spostare un oggetto posto su un piano reale orizzontale. L'oggetto si muove se applichiamo una *forza* ma appena smettiamo di agire su di esso, il corpo generalmente si ferma. Ciò può portare all'erronea conclusione, contenuta fra l'altro nella teoria del moto di Aristotele e sopravvissuta fino ai tempi di Galileo, che per avere il moto di un corpo bisogna agire continuamente su esso.

Per capire quanto in realtà succede, immaginiamo di eseguire le seguenti osservazioni sperimentali: lasciamo una massa M da ferma all'estremo superiore di un piano inclinato, usando *sempre* la stessa massa e lo stesso piano inclinato e seguiamo il successivo moto di M lungo un piano orizzontale (vedi fig. 1).

Osserviamo che, mentre la velocità v_f con cui M giunge sul piano orizzontale è sempre la stessa, la distanza d da essa percorsa sul piano orizzontale, prima di fermarsi, dipende dalle caratteristiche del piano. Più il piano è liscio e levigato, più grande è d; al limite, estrapolando, per un piano perfetto (ideale) d diviene ∞.

Quest' ultima estrapolazione, dovuta a Galileo immaginando un *esperimento ideale*, permette di enunciare il principio di inerzia ovvero ***il primo principio della dinamica***:

Un corpo permane nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme a meno che non intervenga una causa esterna (detta forza) a modificare tale stato.

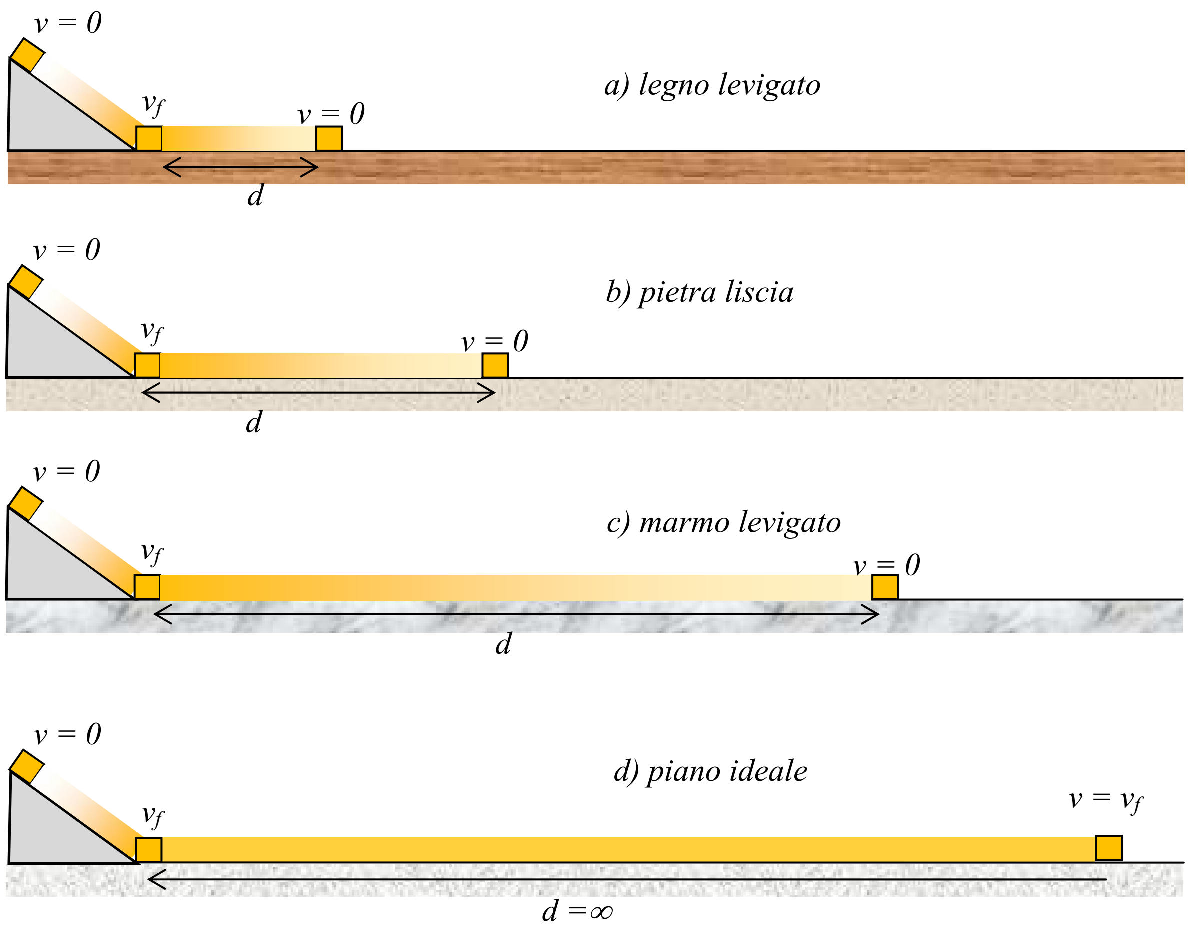


Fig. 1

2) Definizione operativa di forza

Consideriamo una massa *M* posta su un piano ideale orizzontale e ad essa sia unita una molla elastica di lunghezza a riposo ℓ. Con la mano tendiamo la molla, come in fig. 2 e osserviamo che:

a) se la molla non è allungata, M resta ferma: la molla a riposo non esercita azioni (forze) su M,
b) se la molla è allungata, M cambia lo stato di moto: la molla allungata esercita azioni (forze) su M.

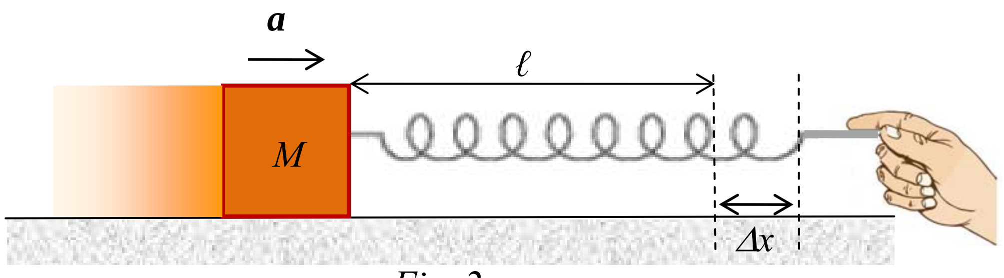


Fig. 2

Quindi *una molla è un sistema in grado di generare delle forze* e resta ovvio che se tendiamo la molla, curando che sia Δx = *cost*, esercitiamo una forza costante su M e che per differenti valori di Δx = *cost* otteniamo forze diverse fra loro ma costanti.

La forza è un vettore?

Se proviamo (vedi fig. 3) a sommare due forze F uguali (stessa molla e stesso Δx) una applicata lungo x, l'altra lungo y su un piano orizzontale ideale osserviamo che il cambiamento dello stato di moto avviene nella direzione a 45° rispetto ad x.
Questo vuol dire che le forze si sommano come vettori e non come scalari e quindi ***la forza è un vettore***.

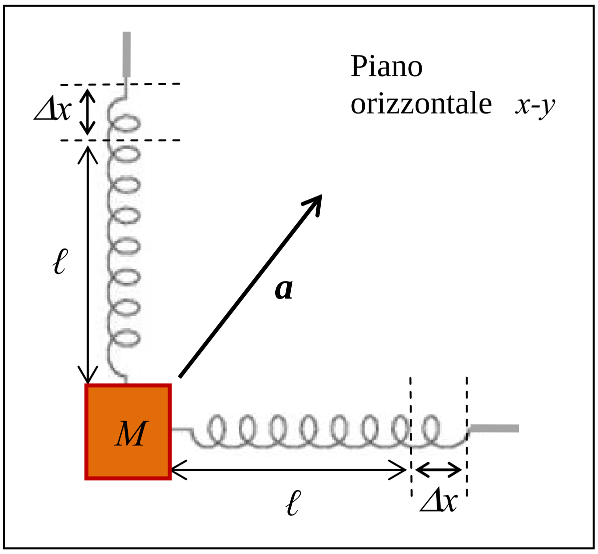


Fig. 3

Se su una massa agiscono più forze $\vec{F}_i$, chiameremo *risultante delle forze* applicata alla massa il vettore $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$.

Si osserva che se agiamo con una forza $\vec{F} = cost$ su una massa M, questa acquista una accelerazione $\vec{a} = cost$ nella direzione e verso in cui è applicata la forza ossia $\vec{a}$ è parallela ad $\vec{F}$. Ciò ci permette di introdurre *l'unità di misura per la forza* detta **Newton** (*N*) come *la quantità di forza necessaria per accelerare, nella stessa direzione e verso, la massa campione di 1 Kg di un metro al secondo quadrato.*

$$1\ Newton = 1N = 1\ Kg \frac{1\ m}{1\ s^2} = Kg \cdot m / s^2 .$$

4)Il secondo principio della dinamica

Come detto nel par. precedente, con molle allungate di opportuni Δx siamo in grado di ottenere forze costanti di varia entità. Supponiamo di agire lungo una sola direzione in modo da non considerare la natura vettoriale della forza e della accelerazione e facciamo le seguenti prove sperimentali.

a) Agiamo con forze diverse e costanti F_1, F_2, F_3, … sulla stessa massa campione m_0. Per ognuna di esse vediamo la massa accelerare rispettivamente con una accelerazione a_1, a_2, a_3, ….. Si trova che:

$$\frac{m_0 a_1}{m_0 a_2} = \frac{F_1}{F_2}; \quad \frac{m_0 a_1}{m_0 a_3} = \frac{F_1}{F_3}; \quad \frac{m_0 a_2}{m_0 a_3} = \frac{F_2}{F_3}; ....$$

b) Agiamo con una forza costante F su massa diverse $m_0, m_1, m_2, m_3, m_x, ...$Vediamo le masse accelerare rispettivamente con accelerazione a_0, a_1, a_2, a_3, a_x,….. e si trova che:

$$m_0 a_0 = m_1 a_1 = m_2 a_2 = m_3 a_3 = m_x a_x$$

L'osservazione *b* dice che, a parità di forza, il prodotto massa per accelerazione è costante, mentre l'osservazione *a* dice che tale prodotto varia linearmente con la forza: entrambe sono consistenti fra loro se si assume $\boldsymbol{F \propto ma}$**.**

Si impone che sia:

(1) $\boldsymbol{F = ma}$

definendo la massa m (detta ***massa inerziale***) come la costante di proporzionalità fra forza ed accelerazione. L'osservazione *b* permette quindi di *misurare* una massa generica in termini della massa campione m_0:

(2) $m_0 a_0 = m_x a_x \Rightarrow m_x = m_0 \dfrac{a_0}{a_1}$.

Si può vedere, sempre sperimentalmente, che la relazione (1) vale anche in forma vettoriale. Se sulla massa m agiscono più forze $\vec{F}_i$, posto $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$ si ha:

(3) $\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$ ***seconda legge della dinamica.***

La relazione 3 dice che *l'accelerazione di un corpo è direttamente proporzionala alla forza applicata ad esso con la massa del corpo come costante di proporzionalità.*
La massa resta operativamente definita con la relazione (2) e la seconda legge della dinamica è quindi la definizione formale di ***forza*** come una azione capace di cambiare lo stato di moto di una massa.

Osservazioni:

a) la prima legge del moto è automaticamente inclusa nella seconda, infatti se $\vec{F} = 0$ si ha $\vec{a} = 0$ e quindi il moto è rettilineo uniforme.

b) la relazione 3 è una relazione vettoriale e quindi corrisponde a tre relazioni scalari:

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} F_x = ma_x \\ F_y = ma_y \\ F_z = ma_z \end{cases}$$

Se una delle componenti della forza è nulla, la relativa componente dell'accelerazione è anche nulla e il moto lungo la corrispondente componente resta rettilineo uniforme. Ad esempio se $F_y = 0 \Rightarrow a_y = 0$ e il moto lungo y è rettilineo uniforme.

c) vale il principio di sovrapposizione ossia se su m agiscono più forze $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, ...$ e posto $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ si ha:
$\vec{F}_1 = m\vec{a}_1; \quad \vec{F}_2 = m\vec{a}_2; \quad \vec{F}_3 = m\vec{a}_3; \quad \vec{F} = m\vec{a}$ con $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3$.

5) Il terzo principio della dinamica

Si osserva che tutte le forze in natura nascono dall'interazione fra corpi. Se su un corpo A si sente un'azione, essa sarà dovuta all'interazione con un altro corpo B, che a sua volta sente un'azione conseguente all'interazione con il corpo A. Le due azioni sono dette *coppia di forze di interazione* e, posto $\vec{F}_{AB}$ la forza applicata ad A per interazione con B e $\vec{F}_{BA}$ la forza applicata a B per interazione con A, sia ha che:

a) $\vec{F}_{AB}$ e $\vec{F}_{BA}$ hanno la stessa direzione (coincidente con la retta congiungente i corpi quando essi possono approssimarsi a punti materiali)
b) $\vec{F}_{AB}$ e $\vec{F}_{BA}$ hanno lo stesso modulo
c) $\vec{F}_{AB}$ e $\vec{F}_{BA}$ hanno verso opposto $\Rightarrow$

(4) $\boxed{\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}}$ ***terza legge della dinamica***

La terza legge della dinamica è spesso indicata come *principio di azione-reazione* e le forze della coppia di interazioni come *forze di azione e reazione*.

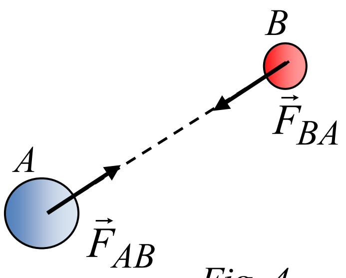


Fig. 4

NB: la situazione $\vec{F}_{AB} + \vec{F}_{BA} = 0$ non deve trarre in inganno, la loro azione non è nulla in quanto la forza di azione e quella di reazione *sono applicate a corpi diversi* e pertanto determinano la dinamica dei corpi cui sono applicate:

$\vec{F}_{AB}$ determina il moto di A,
$\vec{F}_{BA}$ determina il moto di B.

Un esempio tipico che si può fare è quello della semplice camminata: camminando imprimiamo una forza al suolo all'indietro tramite il piede, il suolo agisce con una forza uguale e contraria sul piede ed è questa forza che ci spinge in avanti (il suolo invece rimane fermo perché la massa inerziale della Terra è enorme e quindi è nulla l'accelerazione conseguente alla nostra azione).

6) La quantità di moto: riformulazione della seconda legge della dinamica.

Sappiamo che $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ quindi se la massa m del corpo è costante abbiamo: $\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$

Definita la ***quantità di moto*** come $\vec{p} = m\vec{v}$ (unita di misura: *Kgm/s*) si ha:

$$(5) \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

La relazione 5, equivalente alla relazione 3 in meccanica classica, dice che *la forza determina la variazione della quantità di moto di un corpo ovvero la forza è pari alla rapidità di variazione della quantità di moto di un corpo nel tempo*.

Quest'ultima formulazione della seconda legge della dinamica è più generale perché, come vedremo in seguito, molti fenomeni fisici non dipendono separatamente dalla massa e/o dalla velocità del corpo ma dallo "stato di moto" espresso dalla quantità di moto.

7) Le leggi delle forze

La relazione $\vec{F} = m\vec{a}$ definisce il modo in cui si manifesta ed agisce una generica forza, ma non va confusa con la definizione della specifica forza o interazione. Vedremo che ogni interazione ha una specifica legge, ad esempio:

- la forza peso: $\vec{W} = M\vec{g}$
- la forza elastica: $\vec{F}_{el} = -K\vec{x}$
- la forza di gravitazione: $\vec{F}_g = -G\frac{mM}{r^2}\hat{r}$
- la forza elettrica: $\vec{F}_E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2}\hat{r}$
- la forza magnetica: $\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$

7.1 La Forza peso

Ogni massa *M,* in prossimità della superficie terreste sente, se lasciata libera, l'accelerazione di gravità $\vec{g}$. Per la relazione 3, ciò equivale a dire che sulla massa è esercitata un forza $M\vec{g}$ che chiameremo ***forza peso*** (generalmente indicata con $\vec{W}$)

(6) $\vec{W} = M\vec{g}$

La forza peso è quindi diretta secondo la verticale del punto in cui è posta la massa *M* e punta verso il centro della Terra.

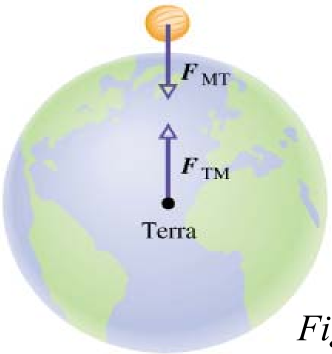


Fig. 5

La forza peso di *M*, applicata ad *M*, nasce dalla sua interazione con la Terra ($\vec{W} = \vec{F}_{MT}$) e quindi la relativa forza di reazione $\vec{F}_{TM}$, con $\vec{F}_{MT} = -\vec{F}_{TM}$, sarà applicata alla Terra. La Terra, avendo una massa inerziale enorme, non mostra nessuna accelerazione. (tralasceremo d'ora in poi $\vec{F}_{TM}$)

Osservazioni:

a) la forza peso di *M* dipende dalla sua interazione con la Terra; se la stessa massa è portata su un altro pianeta, la forza peso, ovvero l'interazione con il pianeta, sarà diversa ma non la massa.

b) la forza peso (vettore) non va confusa con il termine *peso* usato nel linguaggio comune, infatti ciò che si intende per *peso* (scalare) coincide generalmente con il concetto fisico di massa.

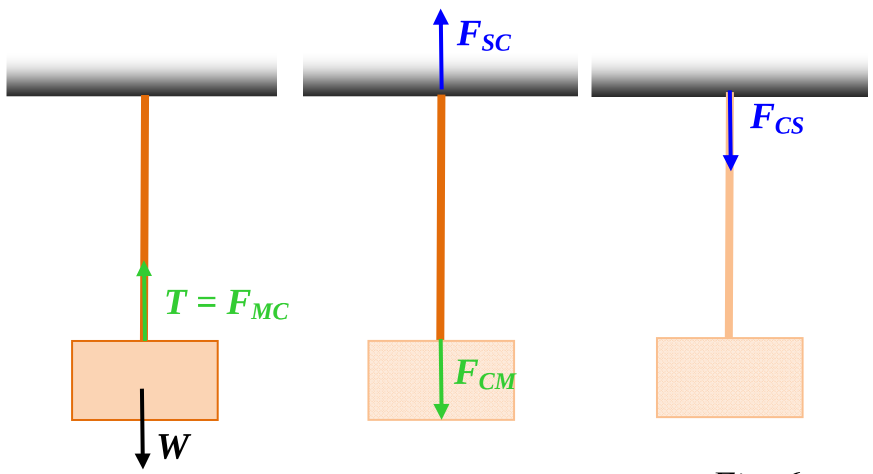
7.2 La tensione di una corda

b) caso statico

Consideriamo una massa M sospesa con una corda ideale (ossia inestensibile e di massa trascurabile) al soffitto. La massa M è ferma nonostante su essa agisca $\vec{W} = M\vec{g}$. Per non violare il secondo principio della dinamica, dobbiamo pensare che *la corda eserciti un'azione, detta* ***tensione T***, su M in modo che $\vec{W} + \vec{T} = M\vec{a} = 0$ $\Rightarrow \vec{a} = 0$ e quindi:

(7) $\vec{W} = -\vec{T}$.

Nonostante la relazione precedente, $\vec{W}$ e $\vec{T}$ non sono coppie di azione-reazione e sono applicate allo stesso corpo (la massa M). Poiché la tensione è applicata su M dalla corda ($\vec{T} = \vec{F}_{MC}$), la forza di reazione $\vec{F}_{CM}$ è esercitata sulla corda da M, con $\vec{T} = -\vec{F}_{CM}$. L'evidenza di $\vec{F}_{CM}$ è data dal fatto che una corda a cui si appende una massa, al primo istante, si tende per azione di tale forza.



Coppie di azione-reazione:

$\vec{T} = -\vec{F}_{CM}$

$\vec{F}_{CS} = -\vec{F}_{SC}$

Fig. 6

La rigidità della corda "*trasmette*" la forza $\vec{F}_{CM}$ applicata ad un suo estremo all'altro, creando qui una forza $\vec{F}_{SC}$ esercitata dalla corda sul soffitto. Per reazione, il soffitto esercita una forza sulla corda $\vec{F}_{CS}$ con $\vec{F}_{CS} = -\vec{F}_{SC}$. Essendo la corda e la massa ferme tutte le forze sono in modulo pari a T.

Commento: la 7 mette in evidenza che, data una corda, *T non ha un valore definito ma è tale da annullare la forza ad essa applicata*. Dire ad esempio che una corda può esercitare una tensione di *10 N* vuol dire che essa, prima di spezzarsi, è in grado di annullare una forza applicata di intensità fino a *10 N*. (se $M = 0{,}5\ Kg$ è $T = 4{,}9\ N$, per $M = 1\ Kg$ è $T = 9{,}8\ N$, se $M = 1{,}021\ Kg$ la forza applicata è $10{,}006\ N$ e la corda si spezza) *b) caso dinamico*

Tiriamo, tramite una corda ideale e una forza $\vec{F}_{ap}$ orizzontale una massa *M* posta su un piano orizzontale ideale. $\vec{F}_{ap}$ è esercitata sulla corda dalla mano; per reazione c'è una forza applicata sulla mano dalla corda $\vec{F}_{mC}$ con $\vec{F}_{ap} = -\vec{F}_{mC}$. La rigidità della corda "*trasmette*" la forza $\vec{F}_{ap}$ applicata ad un suo estremo all'altro, creando qui una forza $\vec{F}_{MC}$ esercitata sulla massa *M* dalla corda. Questa forza è in effetti la tensione $\vec{T}$ della corda: $\vec{T} = \vec{F}_{MC}$. Per reazione, c'è una forza $\vec{F}_{CM}$ esercitata sulla corda da *M*, con $\vec{F}_{CM} = -\vec{F}_{MC}$.

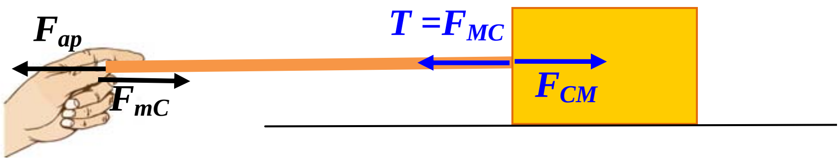


Fig. 7

Coppie di azione-reazione:

$$\vec{F}_{ap} = -\vec{F}_{mC}$$
$$\vec{F}_{MC} = -\vec{F}_{CM}$$

La dinamica dei corpi è determinata dalle sole forze esercitate su essi:

$T = Ma$, per la massa *M*

$F_{ap} - F_{CM} = ma$, per la corda posto *m* la sua massa.

Quest'ultima relazione sottolinea che $F_{ap} = F_{MC}$ $(= F_{CM} = T)$ solo se $m \sim 0$ ovvero se la corda è ideale: *una corda ideale esercita in ogni suo punto una tensione T costante.*

7.3 Il vincolo di un piano

Consideriamo una massa M poggiata su un piano rigido. La massa M è ferma, nonostante su essa agisca $\vec{W} = M\vec{g}$. Per non violare il secondo principio della dinamica, dobbiamo pensare che *il piano eserciti un'azione, detta* **vincolo N**, su M in modo che $\vec{W} + \vec{N} = M\vec{a} = 0 \;\Rightarrow \vec{a} = 0$ e quindi:

(8) $\vec{W} = -\vec{N}$.

Anche in questo caso, $\vec{W}$ e $\vec{N}$ non sono coppie di azione-reazione e sono applicate allo stesso corpo (la massa M). Poiché il vincolo è applicato dal piano su M ($\vec{N} = \vec{F}_{MP}$), la forza di reazione $\vec{F}_{PM}$ è esercitata sul piano da M, con $\vec{N} = -\vec{F}_{PM}$. L'evidenza di $\vec{F}_{PM}$ è data dal fatto che se il piano non è perfettamente rigido, esso si flette non appena poggiamo una massa. (A flettere il piano non può essere la forza peso, come si dice nel parlare comune, perché la forza peso è applicata alla massa e non al piano!)

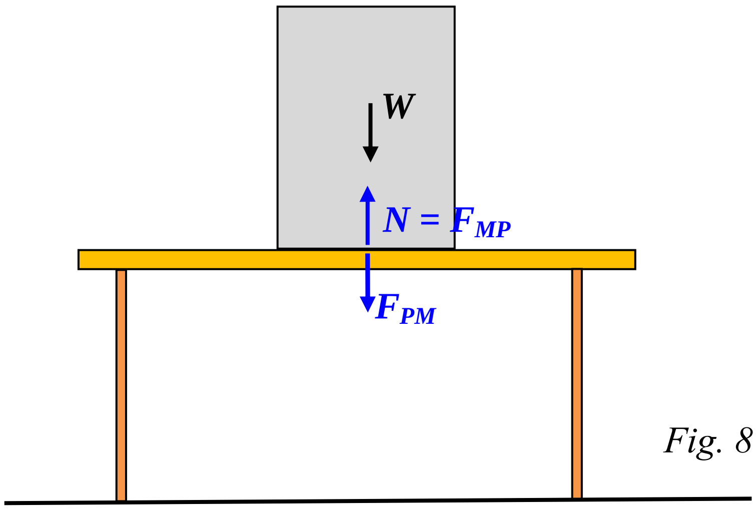


Fig. 8

Coppie di azione-reazione:

$\vec{N} = -\vec{F}_{PM}$

Commenti

a) la 8 mette in evidenza che, dato un piano, *N non ha un valore definito ma è tale da annullare la forza ad essa applicata.* Dire ad esempio che un piano può esercitare un vincolo di 10 N vuol dire, prima di rompersi, che esso è in grado di annullare una forza applicata fino a 10 N. (Se $M = 0{,}5\ Kg$ è $N = 4{,}9\ N$, per $M = 1\ Kg$ è $N = 9{,}8\ N$, se $M = 1{,}021\ Kg$ la forza applicata è $10{,}006\ N$ e il piano si rompe)

b) più in generale $\vec{N}$ è detto *vincolo normale* in quanto è sempre normale al piano ed è tale da annullare la componente normale delle forze applicate al piano.

7.4 La forza elastica

Abbiamo già detto (par. 2) che una molla allungata o compressa è in grado di esercitare una forza che chiameremo ***forza elastica*** $\boldsymbol{F_{el}}$.
Per definirla operativamente prendiamo una molla di lunghezza a riposo ℓ avente un estremo fissato (fig. 9); allunghiamola (o comprimiamola) di una quantità Δx e valutiamo il modulo della corrispondente forza elastica. Generalmente è conveniente far coincidere l'origine x_0 dell'asse x ($x_0 = 0$) con la posizione occupata dall'estremo libero della molla in condizioni di riposo in modo che $|\Delta x| = |x - x_0| = |x|$. Si ottiene il grafico in fig. 9.

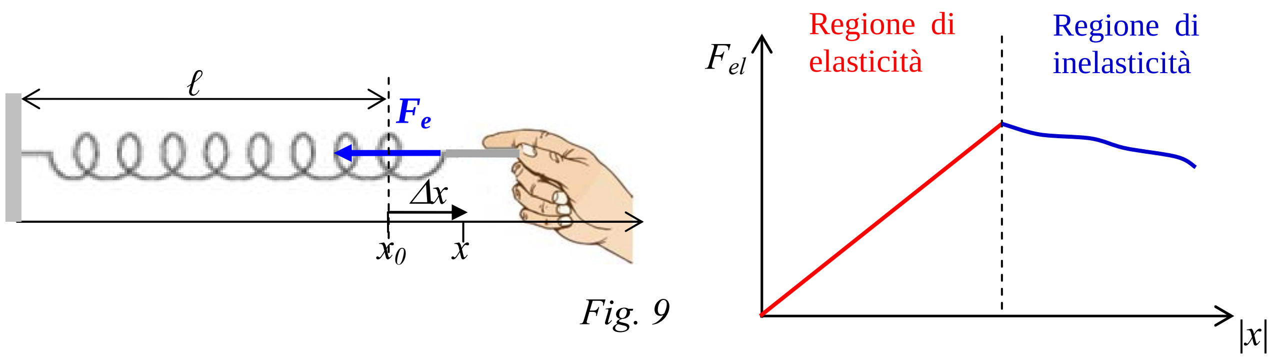


Fig. 9

C'è un intervallo di allungamento o compressione (*regione di elasticità*) in cui la forza elastica è direttamente proporzionale a $|x|$, in modulo $\Rightarrow$

$F_{el} = K|x|$ con K detta ***costante elastica*** della molla (misurata in N/m)

Per passare alla notazione vettoriale dobbiamo notare che:

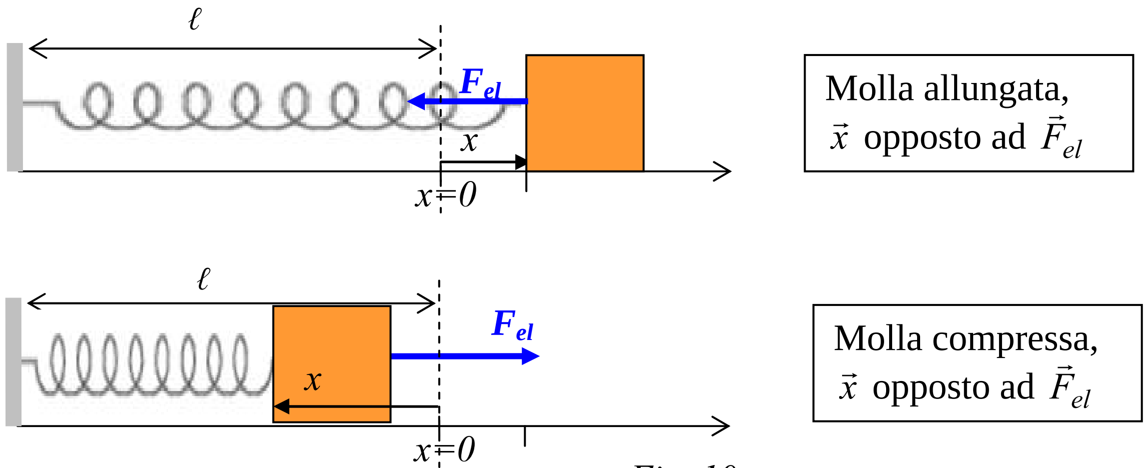


Fig. 10

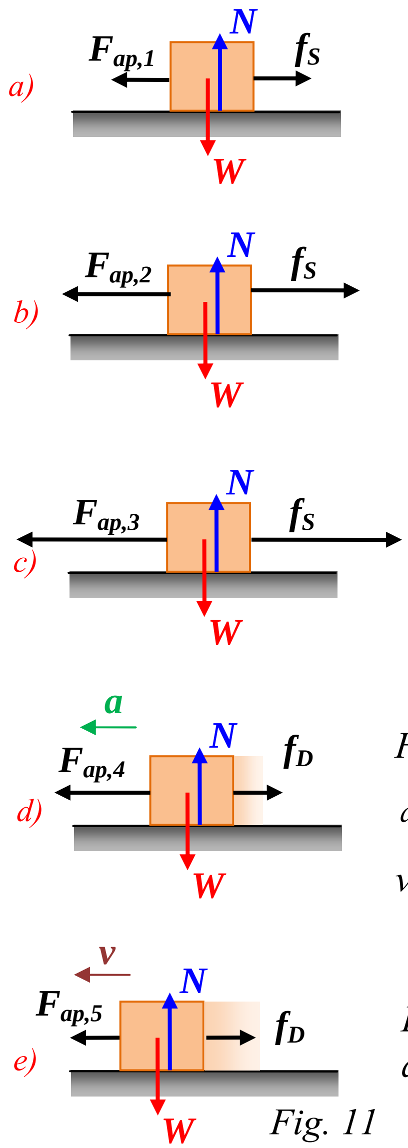
La forza è sempre opposta allo spostamento e quindi in conclusione nella regione di elasticità, dove noi ci troveremo sempre a operare in seguito, si ha:

(9) $\vec{F}_{el} = -K\,\vec{x}$

7.5 La forza di attrito

Abbiamo già detto (par. 1) che su un corpo che scivola su un piano orizzontale reale vengono esercitate dal piano delle azioni che tendono ad ostacolarne il moto. Queste azioni sono dette ***forze di attrito***. Esse nascono sia dalla rugosità delle superfici a contatto sia dalle forze fra gli atomi delle superfici a contatto. Trascurando le cause, diamo di questa forza una definizione operativa.

Consideriamo una massa M poggiata su un piano reale (che genera attrito) ed agiamo su essa con una forza $\vec{F}_{ap}$ parallela al piano. Può accadere che la massa M resti ferma, nonostante che su essa agisca una $\vec{F}_{ap}$. Per non violare il secondo principio della dinamica, dobbiamo pensare che *il piano esercita un'azione, detta* ***attrito f$_S$***, su M in modo che $\vec{F}_{ap} + \vec{f}_s = M\vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{a} = 0$ e quindi: $\vec{F}_{ap} = -\vec{f}_s$. Costatato che $\vec{f}_s$ è opposta ad $\vec{F}_{ap}$, vediamo cosa succede aumentando l'intensità di $\vec{F}_{ap}$.



a) $F_{ap,1} = f_{s,}$ $a=0,\ v=0$

b) $F_{ap,2} = f_s$, $a=0,\ v=0$

c) $F_{ap,3} = f_s$, $a=0,\ v=0$

d) $F_{ap,4} > f_d$, $a = \dfrac{F_{ap,4} - f_d}{M} \neq 0$, $v \neq 0$

e) $F_{ap,5} = f_d$, $a=0,\ v=cost \neq 0$

Fig. 11

Si trova sperimentalmente che fintanto che la $\vec{F}_{ap}$ è minore di un certo valore, la forza di attrito $\vec{f}_s$ riesce ad annullarla e quindi la massa resta ferma (casi *a,b,c*).

Se $\vec{F}_{ap}$ supera tale valore, la massa inizia a muoversi con una accelerazione che dipende da $\vec{F}_{ap}$ e dalla forza di attrito che indichiamo $\vec{f}_d$. Quest'ultima è diversa dalla $\vec{f}_s$ osservata quando il corpo resta fermo. Si ha che $f_d < f_s$.(caso *d*).

Si nota che quando la massa è in movimento la forza di attrito $\vec{f}_d$ è approssimativamente costante e non dipende da $\vec{F}_{ap}$; infatti si può avere un moto uniforme agendo con una opportuna forza costante: $\vec{F}_{ap} = cost = f_d$ (caso *e*).

Tutto questo è sintetizzato nel grafico in fig. 12:

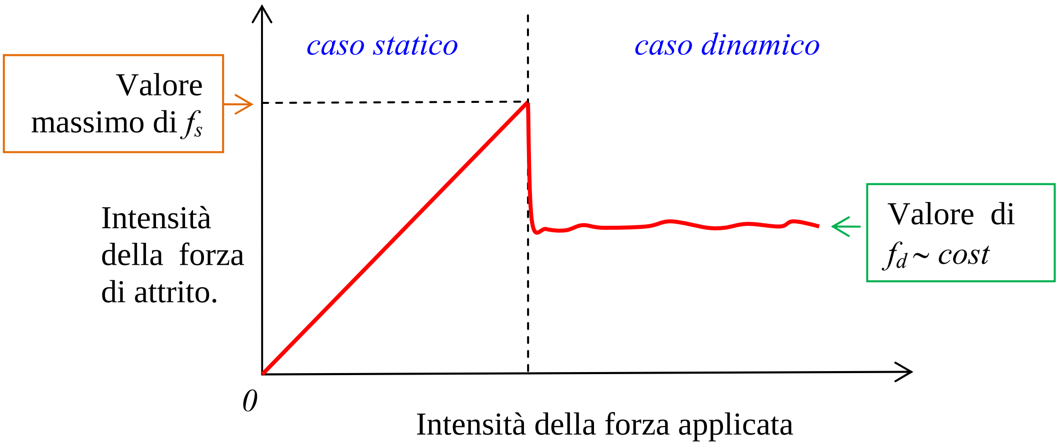


Fig. 12

Da quanto detto, risulta evidente la direzione di f_d (e f_s) è la stessa del moto (o del possibile modo) mentre il verso è sempre opposto.

Conclusione: un piano reale si oppone al moto di un corpo poggiato su esso, con una forza di attrito. Fintanto che il corpo resta fermo, si parla di attrito statico, caratterizzato da un valore massimo f_s; quando il corpo è in movimento si parla di attrito dinamico f_d, $= cost$, con $f_d < f_s$.

L'intensità delle forze di attrito può essere calcolata come:

(10) $f_s = \mu_S N \;\; e \;\; f_d = \mu_d N$

con N vincolo normale al piano, μ_S e μ_d rispettivamente *coefficiente di attrito statico* e *dinamico* con $\mu_d < \mu_s$. (Si noti che questi coefficienti sono adimensionali). Nell'esempio seguente vedremo come determinare sperimentalmente μ_S e μ_d.

8) Alcuni esempi importanti.

Premettiamo che, per risolvere problemi di dinamica occorre:

a) definire il corpo di cui si vuole studiare il moto
b) individuare tutte le forze $\vec{F}_i$ che agiscono su esso
c) scegliere un opportuno sistema di riferimento
d) applicare la legge del moto: $\vec{F} = \sum \vec{F}_i = M\vec{a}$

8.1) Il piano inclinato

Vogliamo studiare la dinamica di una massa M posta su un piano inclinato. In fig. 13 sono indicate le forze nel caso di un piano con attrito e di M tenuta con una corda.

Nella scelta del sistema di riferimento, è evidente che è più conveniente porre l'asse x parallelo al piano inclinato, come in fig. 13, perché in tal caso il moto è un moto rettilineo lungo x.

Affrontiamo i seguenti casi:

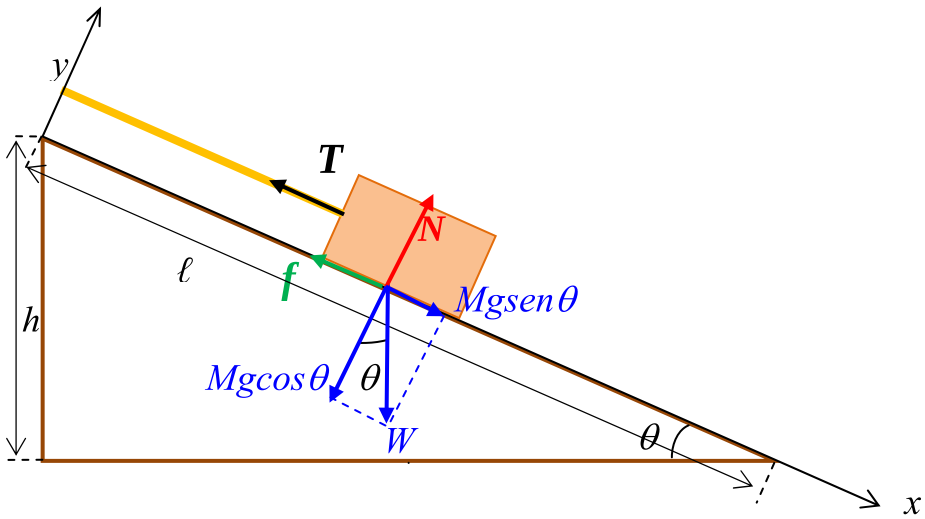


Fig. 13

a) *massa tenuta ferma con una corda ($T \neq 0$) e piano liscio ($f = 0$)*

Non c'è moto né lungo y né lungo x quindi:

$$F_y = Ma_y = 0 \Rightarrow F_y = 0 \Rightarrow N - Mg\cos\theta = 0 \Rightarrow \qquad N = Mg\cos\theta$$

$$F_x = Ma_x = 0 \Rightarrow F_x = 0 \Rightarrow Mgsen\theta - T = 0 \Rightarrow \qquad T = Mg\,sen\theta$$

b) *massa libera di muoversi (T = 0) e piano liscio (f = 0)*

Non c'è moto lungo y ma la massa scivola lungo x quindi:

$$F_y = Ma_y = 0 \Rightarrow F_y = 0 \Rightarrow N - Mg\cos\theta = 0 \Rightarrow \qquad N = Mg\cos\theta$$
$$F_x = Ma_x \text{ con } F_x = Mgsen\theta \Rightarrow Mgsen\theta = Ma_x \Rightarrow \qquad a_x = gsen\theta \qquad (a_x < g)$$

Il moto lungo x è quindi un moto rettilineo uniformemente accelerato con accelerazione $gsen\theta$.

Se vogliamo i dettagli del moto, dobbiamo procedere con le relazioni cinematiche. Ad esempio, supponiamo di lasciare la massa da ferma sulla sommità del piano inclinato e vogliamo calcolare il tempo t_f necessario a percorrere il piano inclinato e la velocità finale v_f.

$$\begin{cases} v_x(t) = a_x t \\ x(t) = \frac{1}{2} a_x t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_f = gsen\theta\, t_f \\ \ell = \frac{1}{2} gsen\theta\, t_f^2 \end{cases} \Rightarrow t_f = \sqrt{\frac{2\ell}{gsen\theta}}; \quad v_f = gsen\theta \sqrt{\frac{2\ell}{gsen\theta}} = \sqrt{2\ell g\, sen\theta} = \sqrt{2hg}$$

Si nota che v_f è indipendente dalla lunghezza ℓ del piano inclinato ma dipende solo dall'altezza h cui è lasciata la massa e pertanto v_f è la stessa che si ottiene per una caduta libera da altezza h. Il motivo di ciò sarà chiarito in seguito.

c) *massa tenuta ferma con una corda ($T \neq 0$) e piano con attrito ($f \neq 0$)*

Non c'è moto né lungo y né lungo x quindi:

$$F_y = Ma_y = 0 \Rightarrow F_y = 0 \Rightarrow N - Mg\cos\theta = 0 \Rightarrow \qquad N = Mg\cos\theta$$
$$F_x = Ma_x = 0 \Rightarrow F_x = 0 \Rightarrow Mgsen\theta - f_s - T = 0 \Rightarrow \qquad Mgsen\theta = f_s + T_s$$

d) *massa libera di muoversi (T = 0) ma ferma per attrito ($f \neq 0$)*

Non c'è moto né lungo y né lungo x quindi:

$$F_y = Ma_y = 0 \Rightarrow F = 0 \Rightarrow N - Mg\cos\theta = 0 \Rightarrow \qquad N = Mg\cos\theta$$
$$F_x = Ma_x = 0 \Rightarrow F_x = 0 \Rightarrow Mgsen\theta - f_s = 0 \Rightarrow \qquad Mgsen\theta - \mu_s N = 0$$
$$Mgsen\theta - \mu_s Mg\cos\theta = 0 \Rightarrow \mu_s = \frac{sen\theta}{\cos\vartheta} = tg\theta$$

Ciò fornisce una definizione operativa di μ_S.

e) *massa in moto (T=0) su piano con attrito ($f \neq 0$)*

Non c'è moto lungo y ma la massa scivola lungo x quindi:

$$F_y = Ma_y = 0 \Rightarrow F_y = 0 \Rightarrow N - Mg\cos\theta = 0 \Rightarrow \qquad N = Mg\cos\theta$$

$$F_x = Ma'_x \text{ con } F_x = Mgsen\theta - f_D \Rightarrow Mgsen\theta - \mu_d Mg\cos\theta = Ma'_x \Rightarrow$$

$$a'_x = g(sen\theta - \mu_D\cos\theta) \qquad (a'_x < a_x < g)$$

Il moto lungo x è quindi rettilineo uniformemente accelerato con accelerazione a'_x.

La precedente fornisce una definizione operativa di μ_D infatti: $\mu_D = \dfrac{a'_x - gsen\theta}{g\cos\theta}$.

8.2) La carrucola ideale

Consideriamo due masse, legate da una corda ideale posta a cavallo di una *carrucola ideale* (vedi fig. 14). La *carrucola ideale* serve solo a cambiare la direzione della corda e vedremo in seguito quando una carrucola può essere considerata ideale.

Fissato un sistema di riferimento verticale (asse y orientato come in fig. 14) la dinamica del sistema è descritta dalle equazioni del moto di m_1 e di m_2 rispettivamente:

$$\vec{T}_1 + \vec{W}_1 = m_1\vec{a}_1 \qquad \text{e} \qquad \vec{T}_2 + \vec{W}_2 = m_2\vec{a}_2$$

La corda ideale impone che la tensione sia la stessa in ogni suo punto

$(T_1 = T_2 = T)$

e che se m_1 si muove verso l'alto, m_2 deve muoversi verso il basso con

$|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = a$ ovvero $\vec{a}_1 = -\vec{a}_2$.

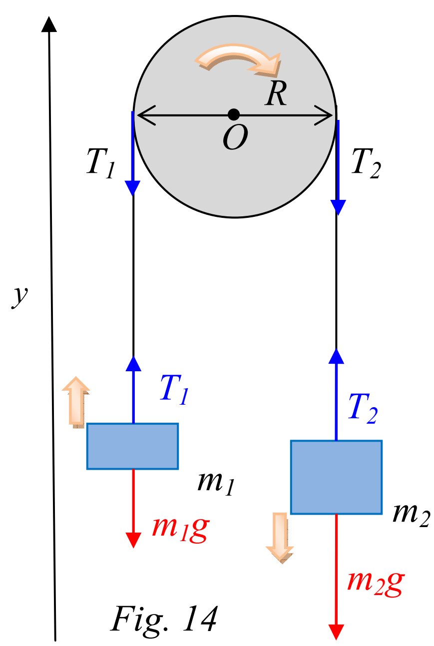


Fig. 14

Infatti: essendo la fune inestensibile se m_1 si sposta verso l'alto di un tratto Δx_1 in un tempo Δt, la massa m_2 si sposta verso il basso di un tratto Δx_2 con:

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 \Rightarrow \frac{\Delta x_1}{\Delta t} = \frac{\Delta x_2}{\Delta t} \Rightarrow v_1 = v_2 \Rightarrow \frac{\Delta v_1}{\Delta t} = \frac{\Delta v_2}{\Delta t} \Rightarrow a_1 = a_2$$

Quindi:

$$\begin{cases} T - m_1 g = m_1 a \\ \\ T - m_2 g = -m_2 a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = m_1 (g + a) \\ \\ T = m_2 (g - a) \end{cases} \Rightarrow a = \frac{(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2} g$$

Commenti:

a) il verso del moto è quello da noi scelto (con a positiva) se $m_1 < m_2$,
b) a è sempre minore di g
c) se $m_1 = m_2$ il sistema è fermo, ($a = 0$).

8.3) Il sistema massa-molla su un piano liscio orizzontale

Con riferimento alla fig. 10, sia la molla ideale ($m \sim 0$) e di costante elastica k, ed M la massa del blocco.

L'equazione del moto lungo l'asse x è:

$$F = Ma \Rightarrow \ -kx = Ma \Rightarrow \quad a = -\frac{k}{M} x \, .$$

Il moto è quindi un moto vario ma ricordando la relazione fra x e a in un moto armonico ($a = -\omega^2 x$) possiamo affermare che *il sistema massa-molla si muove di moto armonico* con pulsazione $\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$ ovvero con periodo $T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}}$.

L'equazione del moto sarà: $x(t) = A \cdot cos(\omega t + \varphi)$ con A e φ determinate dalle condizioni iniziali e ω fissata, come appena visto, solo e soltanto dalle proprietà del sistema (M e k).
Si sottolinea che agli estremi del moto ($x = \pm A$), dove è massima l'accelerazione, è massima l'intensità della forza elastica mentre al centro dell'oscillazione ($x = 0$) la forza è nulla.

9) La Forza centripeta

Abbiamo visto che un moto circolare uniforme è caratterizzato da una accelerazione centripeta $a_c = a_n = \frac{v^2}{r}$ (v = velocità, r = raggio della circonferenza).
Per il secondo principio della dinamica, la presenza di una accelerazione implica l'esistenza di una forza, che diremo ***forza centripeta***, $F_c = F_n = m\frac{v^2}{r}$ con m la massa del corpo in moto $\Rightarrow$ *un corpo è in moto circolare uniforme se su esso agisce una forza centripeta*

La forza centripeta non è un nuovo tipo di forza ma è solo un modo sintetico di dire che la forza in gioco:

a) è sempre perpendicolare alla velocità ossia ha la direzione radiale
b) ha verso che punta al centro della circonferenza
c) ha il modulo funzione di v ed r tramite la relazione $F_c = mv^2/r$.

La forza vera dipende dallo specifico caso fisico, ad esempio:

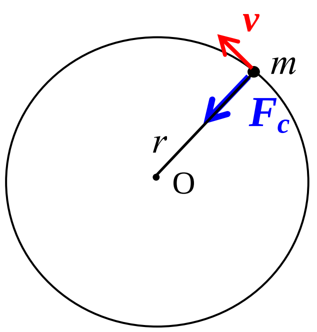


Fig. 15

a) massa legata con una corda

$$\Rightarrow T = F_c = m\frac{v^2}{r}$$

b) massa tenuta con una molla elastica allungata di x

$$\Rightarrow Kx = F_c = m\frac{v^2}{r}$$

c) satellite in orbita circolare intorno alla Terra:

$$\Rightarrow G\frac{mM_T}{r^2} = F_c = m\frac{v^2}{r}$$

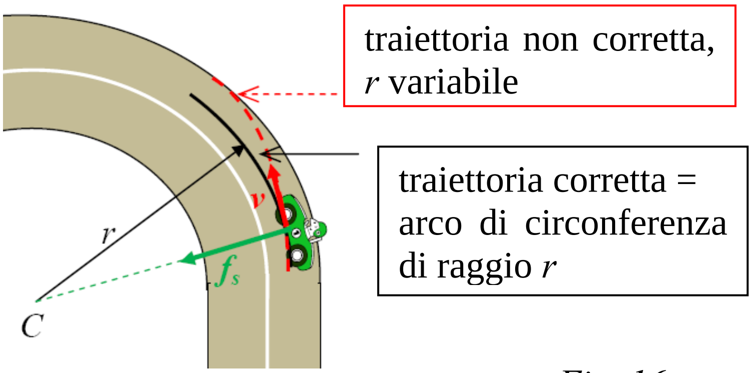
d) carica in campo magnetico

$$\Rightarrow qvB = F_c = m\frac{v^2}{r}$$

Se F_c diviene zero (per esempio la corda del caso *a)* si spezza) la massa diviene libera e inizia a muoversi di moto rettilineo uniforme, nella direzione della tangente alla circonferenza nel punto in cui si è avuto $F_c = 0$.

9.1) Il caso delle curve stradali

La traiettoria che si compie eseguendo una curva con un'auto che procede a velocità $\vec{v}$, di modulo costante, è un arco di circonferenza di raggio r. *La forza centripeta necessaria è fornita dalla forza di attrito statico* fra il battistrada delle ruote e il piano della curva, vedi fig 16. (NB: si tratta di attrito statico perché non deve esserci movimento in direzione radiale, mentre c'è movimento lungo la circonferenza!)



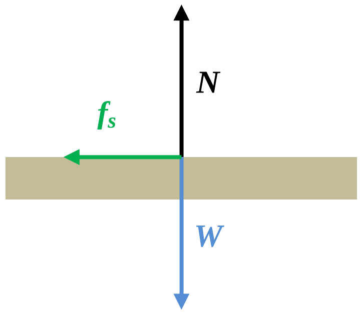


Fig. 16

$$N = mg \Rightarrow f_s = \mu_s N = \mu_s mg \Rightarrow \mu_s mg = F_c \Rightarrow \mu_s mg = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\mu_s gr}$$

La relazione precedente fissa la velocità massima con cui può essere affrontata una curva piana. Si vede che, fissato μ_s, curve strette o prese troppo velocemente faranno uscire di strada l'auto, ossia la traiettoria non sarà un arco di circonferenza, poiché la forza d'attrito non riuscirà a fornire la forza centripeta necessaria. Ad esempio, per $r = 150\ m$, $\mu_s \sim 0{,}16$ (valore tipico per una superficie asfaltata) la velocità con cui affrontare la curva è al più di $\sim 55\ Km/h$ che si riduce di molto in caso di superficie bagnata ($\mu_s < 0.16$).

Se vogliamo affrontare una curva più velocemente è necessario che la curva non sia piana. In tal caso, vedi fig. 17 , sarà la componente orizzontale del vincolo normale al piano a fornire la forza centripeta necessaria al cambio di direzione di $\vec{v}$. Tralasciando l'attrito, abbiamo:

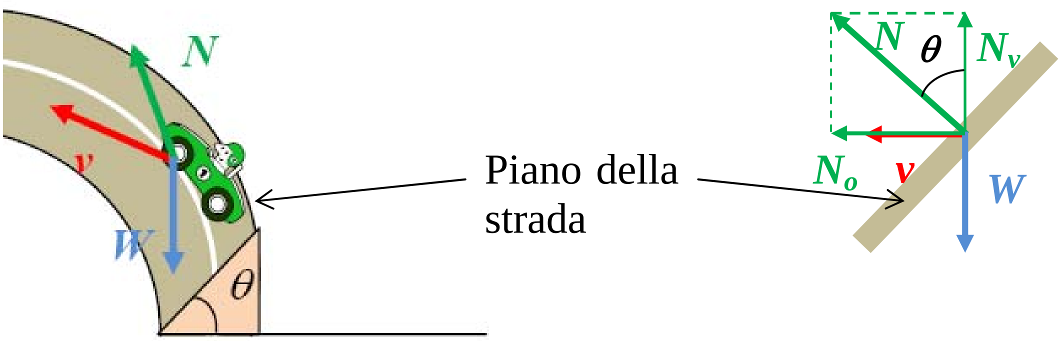


Fig. 17

$$N_v = N\cos\theta = mg \Rightarrow N = \frac{mg}{\cos\theta}; \quad N_o = N sen\theta = mg\frac{sen\theta}{\cos\theta} = mg\, tg\theta$$

$$mg\, tg\theta = F_c \Rightarrow mg\, tg\theta = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{gr\, tg\theta}$$

Già un piccolo valore di θ, rende la velocità con cui può essere affrontata una curva non piana molto più elevata rispetto a quella relativa ad una curva piana (facilmente $tg\theta > \mu_s$) infatti per $\theta = 25°$, $tg\theta = 46,6$ e la velocità con cui affrontare la curva è al più di $\sim 95\ Km/h$. Va a ciò aggiunta poi l'azione della forza di attrito. Si noti che, in entrambi i casi:

a) la velocità massima con cui affrontare una curva non dipende dalla massa,
b) la forza di attrito svolge un lavoro nullo.

8) Le forze nel moto curvilineo non uniforme.

Ricordiamo che in un moto curvilineo non uniforme, la velocità $\vec{v}$ varia in modulo e direzione e quindi c'è un'accelerazione $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$ con $\vec{a}_t \neq 0$ e $\vec{a}_n \neq 0$. Per il secondo principio della dinamica, la presenza di un'accelerazione implica l'esistenza di una forza $\vec{F} = \vec{F}_t + \vec{F}_n$. Se a muoversi è un punto materiale di massa *m,* si richiede che in un generico punto *P* della curva ci sia:

$F_t = ma_t$	forza tangenziale alla curva responsabile della variazione in modulo di $\vec{v}$ in *P,*
$F_n = ma_n = m\dfrac{v^2}{R}$	forza normale alla curva responsabile della variazione in direzione di $\vec{v}$ in *P* (con *R* raggio di curvatura in *P*)

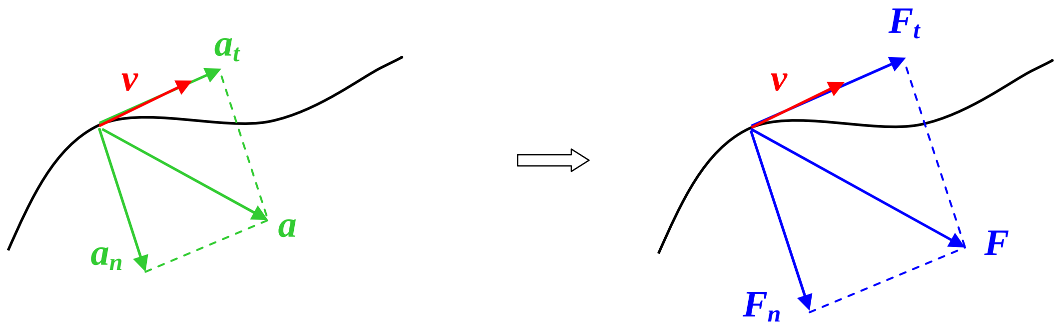


Fig. 18

Nel caso particolare di un moto circolare nel piano verticale di una massa m legata con una corda abbiamo:

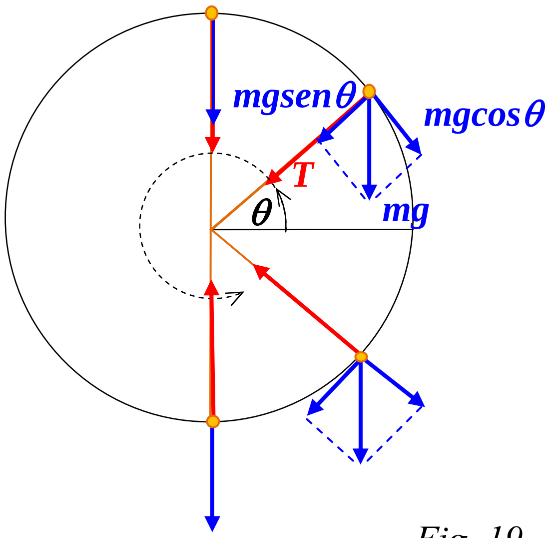


Fig. 19

nella direzione tangente,

$F_t = mgcos\theta \Rightarrow a_t = gcos\theta \Rightarrow$ moto vario ossia la velocità non è costante in modulo.

nella direzione radiale,

$$F_n = T + mgsen\theta = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow T = \frac{mv^2}{R} - mgsen\theta \Rightarrow T \text{ varia con } \theta.$$

Per $0 < \theta < \pi$ parte della forza centripeta è fornita dalla componente radiale della forza peso e quindi è richiesta una T meno intensa. Il valore minimo si ha nel punto più in alto con: $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow T = \frac{mv^2}{R} - mg$.

Per $\pi < \theta < 2\pi$ la tensione (essendo $sen\theta < 0$) deve fornire la forza centripeta necessaria e vincere la componente radiale della forza peso. T deve essere quindi più intensa ed il valore massimo si ha nel punto più in basso con $\theta = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow T = \frac{mv^2}{R} + mg$.