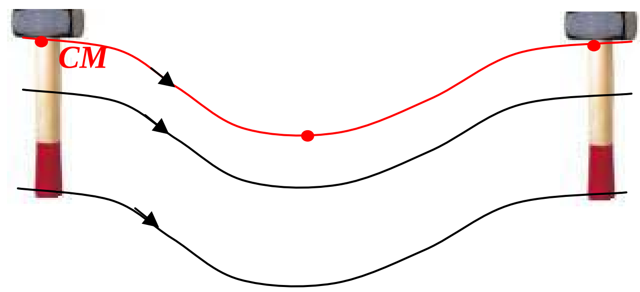
Dinamica del corpo rigido

Un corpo rigido è per definizione un corpo che non si deforma durante il movimento. Se non si deforma vorrà dire che la distanza $\vec{r}_{ij}$ fra due punti qualsiasi i e j del corpo resta costante: $\vec{r}_{ij} = cost$ per ogni i e j.

Il moto di un corpo rigido non vincolato può essere o di pura traslazione o di pura rotazione intorno ad un punto oppure generico. Quest'ultimo può essere visto come una combinazione del moto di traslazione e del moto di rotazione intorno al centro di massa (*CM*).

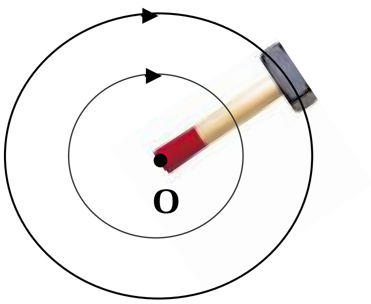
• Moto di traslazione ⇒ Tutti i punti, fra cui il *CM*, si muovono su traiettorie fra loro parallele.



☺ La dinamica può essere studiata riferendosi solo al moto di traslazione del *CM*, ricordando la legge:

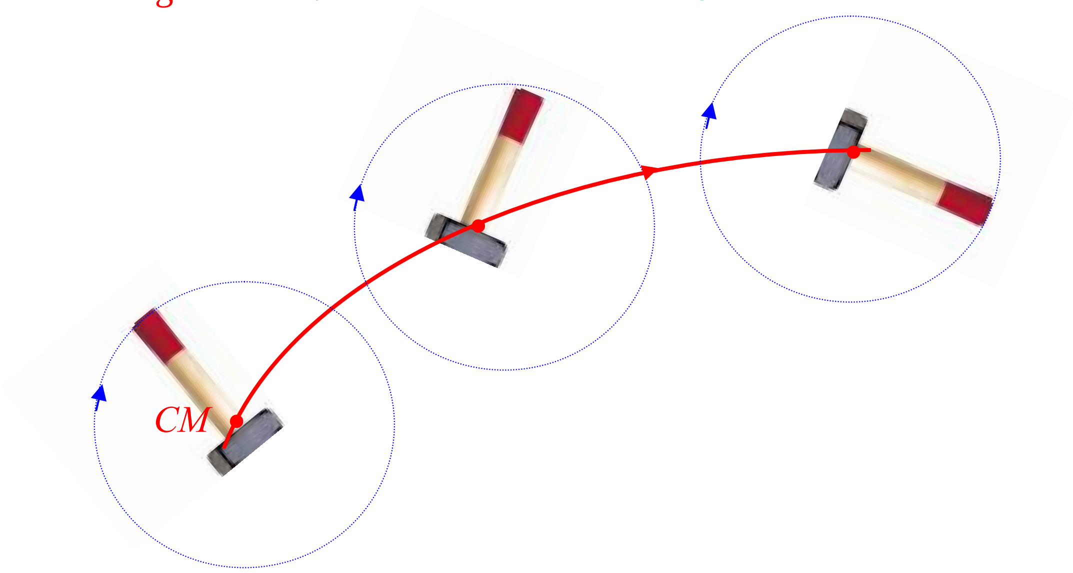
$$M \cdot \vec{a}_{CM} = \vec{F}^{R}_{est}$$

• Moto di rotazione intorno ad un punto O ⇒ i punti si muovono su traiettorie circolari concentriche con centro O.



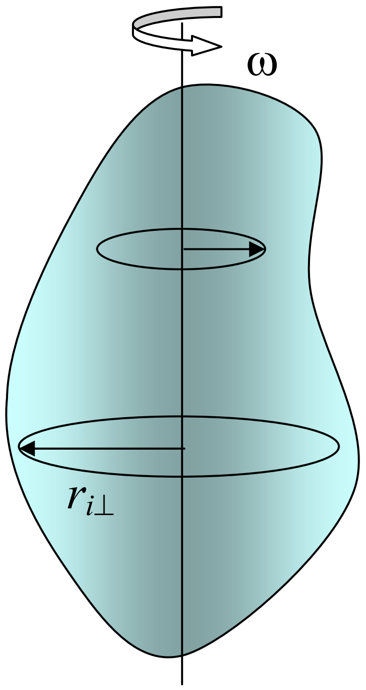
☹ Abbiamo già visto che le rotazione sono determinate dal momento delle forze, dobbiamo studiare qui di seguito, la dinamica di rotazione di un corpo

• Il moto generico ⇒ moto di traslazione del *CM* + rotazione intorno al *CM*



In effetti, non studieremo il caso generale della dinamica di un corpo rigido non vincolato, ma ci limiteremo solo al caso di un corpo rigido che può muoversi intorno ad un asse fisso che lo attraversi. In questo moto, essendo il corpo rigido ($\vec{r}_{ij}$= *cost* per ogni i e j) tutte le sue particelle (m_i) hanno la stessa velocità angolare ω, che è detta anche velocità di rotazione del corpo. (Infatti se ω non fosse la stessa, la distanza fra due particelle varierebbe nel tempo ossia $\vec{r}_{ij} \neq cost$)

Energia cinetica di un corpo rigido in rotazione intorno ad un asse fisso



Consideriamo una generica particella m_i del corpo rigido a distanza $r_{i\perp}$ dall'asse di rotazione. Detta ω la velocità angolare di rotazione del corpo rigido intorno all'asse, la particella m_i ha una velocità lineare:

$$v_i = \omega \cdot r_{i\perp}$$

quindi la sua energia cinetica è:

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i \omega^2 r_{i\perp}^2 .$$

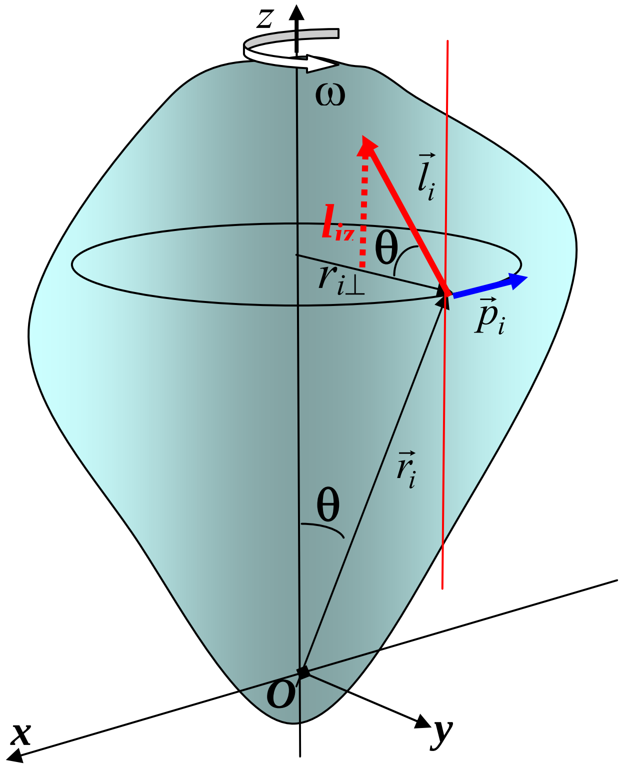
L'energia cinetica di tutto il corpo K_{Tot} può essere ottenuta come somma dell'energia cinetica delle singole particelle:

$$K_{Tot} = \sum K_i = \sum \frac{1}{2} m_i \omega^2 r_{i\perp}^2 = \frac{1}{2} (\sum m_i r_{i\perp}^2) \omega^2$$

Introducendo la quantità $I = \sum m_i r_{i\perp}^2$, detta *momento di inerzia* (*dimensioni* = Kgm^2) si può scrivere $K_{Tot} = \frac{1}{2} I \omega^2$.

Si noti che I = *cost* per un dato corpo rigido, fissato l'asse di rotazione.

Momento angolare totale di un corpo rigido in rotazione intorno ad un asse fisso



Consideriamo una generica particella m_i del corpo rigido a distanza $\vec{r}_i$ da un punto di riferimento O, posto sull'asse di rotazione. Detta ω la velocità angolare di rotazione del corpo rigido, la particella m_i ha una quantità di moto $\vec{p}_i = m_i\vec{v}_i$ ed un momento della quantità di moto $\vec{l}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$.

E' evidente che $\vec{l}_i$ non è parallelo all'asse di rotazione (asse $\hat{z}$).

Il modulo di $\vec{l}_i$ è :

$l_i = r_i \cdot p_i \cdot sen(90°) \Rightarrow l_i = r_i \cdot m_i \cdot v_i$

Proprietà geometrica: detto θ l'angolo convesso fra l'asse $\hat{z}$ e la direzione di $\vec{r}_i$ e detta $r_{i\perp}$ la distanza di m_i dall'asse di rotazione si ha, osservando che $\vec{l}_i \perp \vec{r}_i$ e che $r_{i\perp} \perp \hat{z}$, che l'angolo convesso fra la direzione di $\vec{l}_i$ e il segmento $r_{i\perp}$ è pari a θ.

Interessa solo $l_{iz} = l_i \cdot sen\theta = r_i \cdot m_i \cdot v_i \cdot sen\theta = m_i \cdot v_i \cdot (r_i \cdot sen\theta)$

ma $(r_i \cdot sen\theta) = r_{i\perp}$ ***e*** $v_i = \omega \cdot r_{i\perp} \quad \Rightarrow$

$$l_{iz} = m_i \cdot v_i \cdot r_{i\perp} = m_i \cdot (\omega \cdot r_{i\perp}) \cdot r_{i\perp} = m_i \cdot \omega \cdot r_{i\perp}^2$$

La componente z del momento angolare totale è allora:

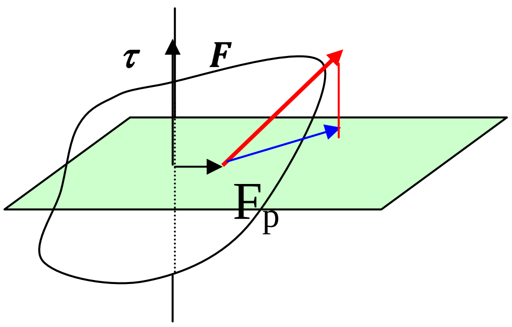
$$L_z = \sum l_{iz} = \sum m_i \cdot \omega \cdot r_{i\perp}^2 = (\sum m \cdot r_{i\perp}^2) \cdot \omega.$$

Ancora, posto $I = \sum m_i r_{i\perp}^2$, si ha che $L_z = I\omega$

Equazione della dinamica di rotazione di un corpo rigido intorno ad un asse fisso

Dobbiamo fare due considerazioni preliminari:

- una forza applicata in un punto, essendo il corpo rigido, determina la rotazione di tutto il corpo,
- solo la componente della forza (F_p) nel piano perpendicolare all'asse di rotazione è responsabile del moto.



Considereremo pertanto solo forze nel piano perpendicolare all'asse di rotazione, che produrranno un momento $\vec{\tau}_{est} = \vec{r} \times \vec{F}_p$ parallelo all'asse di rotazione.

Sappiamo che per i sistemi vale $\vec{\tau}_{est}^R = \frac{d\vec{L}}{dt}$ ma, nel caso di un corpo rigido in rotazione intorno ad un asse fisso $\vec{\tau}$ ed $\vec{L}$ sono sempre paralleli fra loro (e all'asse di rotazione), quindi deve essere: $\tau_{est}^R = \frac{dL}{dt}$.

$L = I\,\omega$, con $I = costante.$ $\Rightarrow \frac{d}{dt}(I\omega) = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha \Rightarrow$ $\tau = I\,\alpha$ che è

equazione della dinamica di rotazione di un corpo rigido intorno ad un asse fisso.

La precedente equazione è l'equivalente per rotazione della relazione $\vec{F} = m\vec{a}$ per la traslazione del punto materiale, ossia le rotazioni sono determinate dal momento delle forze applicate e la costante di proporzionalità fra momento e accelerazione angolare è il *momento di inerzia*. Maggiore è *I*, più difficile sarà variare il moto di rotazione del corpo.

Il momento di inerzia.

Si è visto che per un corpo rigido è possibile definire il momento di inerzia rispetto ad un asse come $I = \sum m_i r_{\perp i}^2$ dove $r_{\perp i}$ è la distanza della generica particella m_i dall'asse di rotazione. Dato un corpo rigido e fissato l'asse di rotazione *I è una quantità costante*. Esso ci permette di scrivere:

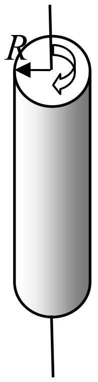
a) l'energia cinetica: $K = \frac{1}{2} I \, \omega^2$

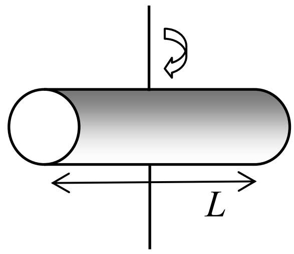
b) il momento della quantità di moto: $L_Z = I\omega$

c) l'equazione del moto $\tau = I\alpha$

E' importante notare che I dipende non solo dalla massa (M) del sistema ma anche dalla distribuzione ($r_{\perp i}$) delle singole masse m_i rispetto all'asse di rotazione, ossia uno stesso corpo ha momenti di inerzia diversi se cambia l'asse di rotazione.

Esempio: cilindro retto di massa M, lungo L con base circolare di raggio $R<L$.

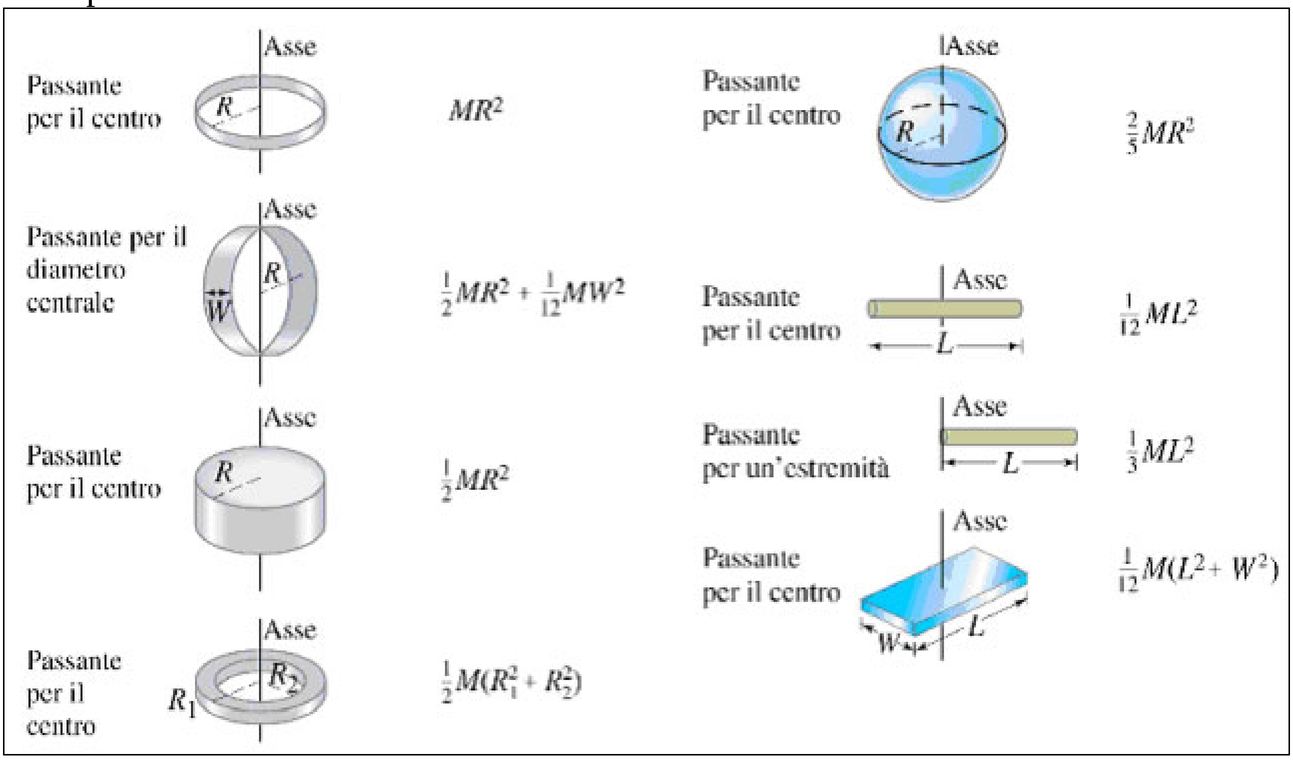




Caso a) $I_a = \frac{1}{2} MR^2$ *Caso b:* $I_b = \frac{1}{12} ML^2$

Poiché la distanza delle m_i dall'asse di rotazione è in media minore nel caso *a)* rispetto al caso *b),* risulta $I_a < I_b$.

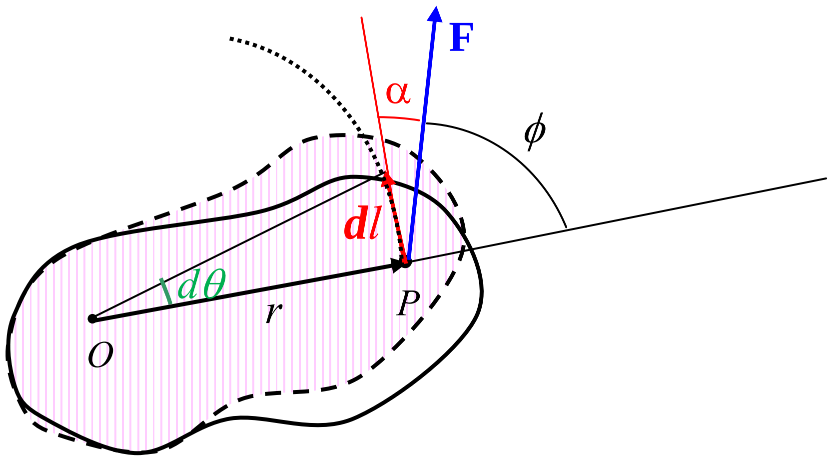
Esempi di momenti di inerzia:



Lavoro nel moto rotatorio intorno ad un asse fisso

Consideriamo una forza $\vec{F}$ applicata in un punto P di un corpo rigido che può ruotare intorno ad un asse fisso passante per O ovvero applichiamo al corpo un momento $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ con $r = \overline{OP}$. Il punto P si muoverà lungo una circonferenza di raggio r.

Calcoliamo il lavoro infinitesimo dW fatto dalla forza $\vec{F}$ per uno spostamento $d\vec{l}$ del punto P, cui corrisponde una rotazione del corpo rigido di $d\theta$.



$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = F\, dl \cos\alpha$$

Essendo $d\vec{l}$ infinitesimo, la sua direzione è tangente in P alla circonferenza di raggio r e di conseguenza (vedi figura):

- $\alpha+\phi = 90° \Rightarrow \cos\alpha = sen\phi$
- $dl = r\, d\theta$.

Segue che: $dW = F\, dl \cos\alpha = F\, r\, d\theta\, sen\phi = (F\, sen\phi)\, r\, d\theta \Rightarrow dW = \tau\, d\theta$.

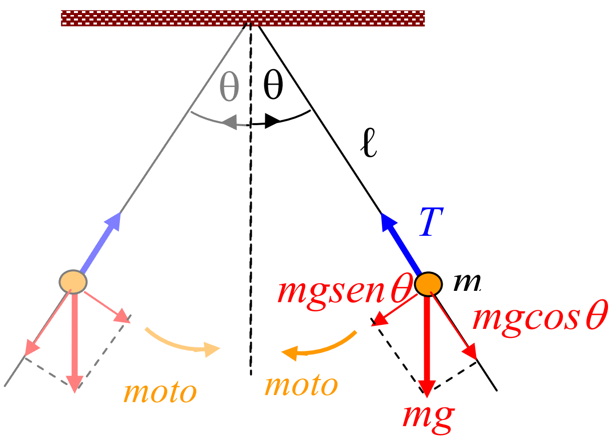
Il lavoro infinitesimo dW può essere calcolato come prodotto del momento applicato al corpo per la rotazione infinitesima subita dal corpo. Per spostamenti finiti fra una posizione iniziale θ_i e una posizione finale θ_f abbiamo: $W_{1\to f} = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta$, che per $\vec{F} = cost$ $(\Rightarrow \vec{\tau} = cost)$ diviene $W_{1\to f} = \tau \int_{\theta_i}^{\theta_f} d\theta = \tau(\theta_f - \theta_i) \Rightarrow W_{1\to f} = \tau \cdot \Delta\theta$.

Detto I il momento di inerzia del corpo, per il teorema dell'energia cinetica ed essendoci solo moto di rotazione, possiamo scrivere:

$$W_{1\to f} = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta = K_f - K_i = \frac{1}{2} I\omega_f^2 - \frac{1}{2} I\omega_i^2 .$$

Un esempio importante: il pendolo semplice

Esso è costituito da un punto materiale di massa *m* sostenuto da un filo ideale di lunghezza ℓ, libero di ruotare intorno al punto di sospensione coincidente con l'estremo superiore del filo.



Lungo la direzione del filo, istante per istante, $T = mg\cos\theta$ quindi non si ha traslazione ma solo rotazione governata dalla legge: $\tau = I\alpha$ dove $\vec{\tau} = \vec{\ell} \times m\vec{g}$ (modulo pari a $\ell mg\,sen\theta$)

Osserviamo che l'azione di (*moto*) τ è sempre di verso opposto allo spostamento angolare θ (vedi figura), matematicamente $\Rightarrow \tau = -\ell mg\,sen\theta$

L'equazione del moto diviene $-\ell mg\,sen\theta = I\alpha$ (2)
ma $I = m\ell^2 \Rightarrow -\ell mg\,sen\theta = m\ell^2\alpha \Rightarrow \alpha = -(g/\ell)sen\theta \Rightarrow$ *moto accelerato*.

Consideriamo il caso di θ piccolo in modo da porre $sen\theta \simeq \theta$, allora

$\alpha = -(g/\ell)\theta \Rightarrow$ *moto armonico di pulsazione* $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$

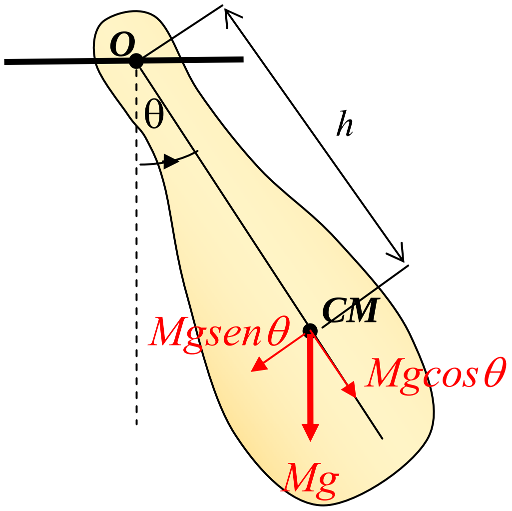
Conclusione: un pendolo semplice per piccoli spostamenti dalla posizione verticale oscilla di moto armonico.

Equazione oraria: $\theta(t) = \theta_M \cos(\omega t + \phi)$; periodo: $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$

osservazioni: il periodo
a) è indipendente dalla massa *m* (*isocronismo*)
b) dipende solo da ℓ
c) permette la determinazione sperimentale di *g*.

Il pendolo reale o fisico

Esso è costituito da un oggetto materiale di massa M libero di ruotare in un piano verticale intorno ad un asse fisso orizzontale passante per un suo punto O (punto di sospensione).



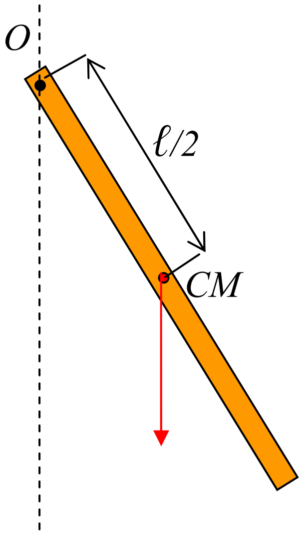
La forza peso del corpo $M\vec{g}$ è applicata al CM.

Se I è il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse per O, per la legge della dinamica di rotazione e per θ piccolo abbiamo:

$\tau = I\alpha \;\Rightarrow\; -hMg\theta = I\alpha \;\Rightarrow\; \alpha = -(hMg/I)\theta \;\Rightarrow$ *moto armonico*

pulsazione $\omega = \sqrt{\dfrac{hMg}{I}}$; *periodo* $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{hMg}}$

E' da sottolineare che, poiché I dipende linearmente da M, T è indipendente dal M anche in questo caso. Infatti se consideriamo un'asta omogenea di massa M di lunghezza ℓ, sospesa per un estremo O, abbiamo:



$I = \dfrac{1}{3}M\ell^2$ quindi

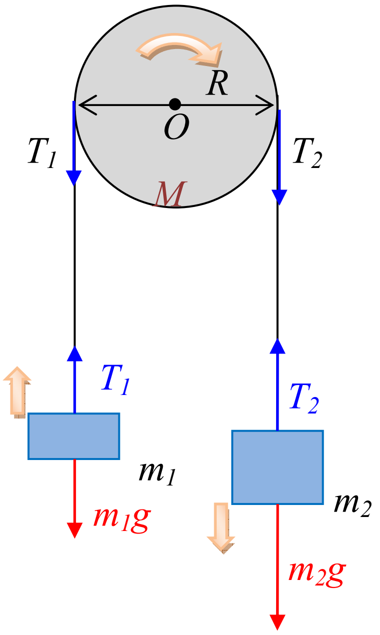
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(1/3)M\ell^2}{Mg(\ell/2)}} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\ell}{g}}$$

indipendente da M.

Un altro esempio: la carrucola reale

Consideriamo una carrucola di massa M e di raggio R che può ruotare, senza attrito, intorno ad un asse fisso per il suo centro O. Due masse sono poste come in figura, legate da una fune ideale.

La dinamica del sistema è descritta dalla traslazione di m_1, dalla traslazione di m_2 e dalla rotazione intorno ad O della carrucola, ovvero dalle relative equazioni del moto:



per m_1: $\vec{T}_1 + \vec{W}_1 = m_1\vec{a}_1$

per m_2: $\vec{T}_2 + \vec{W}_2 = m_2\vec{a}_2$

per M: $\tau^R = I\alpha$, con $I = \frac{1}{2}MR^2$

La fune ideale impone che se m_1 si muove verso l'alto, m_2 deve muoversi verso il basso con $\vec{a}_1 = -\vec{a}_2$ (ovvero $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = a$) e la carrucola deve ruotare in senso orario con $\alpha = a/R$.

Segue:

$$T_1 - m_1 g = m_1 a_1, \qquad T_2 - m_2 g = -m_2 a_2, \qquad \tau^R = \frac{1}{2}MR^2\left(\frac{a}{R}\right)$$

Calcoliamo $\vec{\tau}^R$ osservando che esso è prodotto dalle due forze $\vec{T}_1$ e $\vec{T}_2$ applicate alla carrucola ossia $\vec{\tau}^R = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2$ con $\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{T}_1$, $\vec{\tau}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{T}_2$ e $|\vec{r}_1| = |\vec{r}_2| = R$. I momenti $\vec{\tau}_1$ e $\vec{\tau}_2$ sono paralleli ed opposti con $\vec{\tau}_2$ da prendere positivo secondo i versi da noi assegnati alle accelerazioni. $\Rightarrow$ $\tau^R = \tau_2 - \tau_1 = RT_2 - RT_1 = R(T_2 - T_1)$.

$$\begin{cases} T_1 - m_1 g = m_1 a \\ T_2 - m_2 g = -m_2 a \\ R(T_2 - T_1) = \frac{1}{2}MR^2\left(\frac{a}{R}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_1 = m_1(g+a) \\ T_2 = m_2(g-a) \\ T_2 - T_1 = \frac{1}{2}Ma \end{cases} \Rightarrow a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + M/2}$$

Commenti:

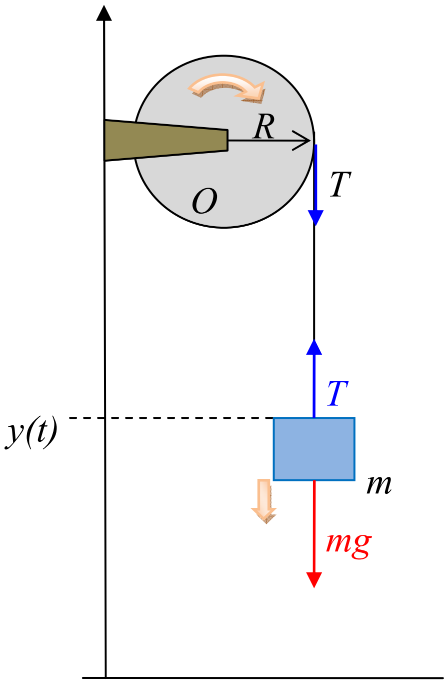
1) l'accelerazione delle masse è inversamente proporzionale alla massa M della carrucola. Essa raggiunge il massimo quando $M=0$ (ovvero se $M \ll m_1, m_2$). Questo è il caso della *carrucola ideale,* dove risulta (dalla terza equazione del sistema) anche $T_1 = T_2$,

2) il verso del moto è quello da noi scelto (con a positiva) se $m_1 < m_2$,

3) se $m_1 = m_2$ ($a = 0$) il sistema è fermo.

Osservazione sull'energia meccanica nei sistemi rigidi.

Se un sistema meccanico, che include corpi rigidi, evolve sotto l'azione soltanto di forze conservative si può *applicare la conservazione dell'energia meccanica* osservando che parte dell'energia va associata al moto di rotazione dei corpi rigidi.



Consideriamo, ad esempio, una carrucola di massa M e raggio R che può ruotare, senza attrito, intorno ad un asse fisso per il suo centro O con una massa m, come in figura, legata da una fune ideale.

Supponiamo di lasciare, a $t_0 = 0$, m ferma in posizione y_0 (con anche la carrucola ferma)

L'energia meccanica E_M è: $E_M = mgy_0$; *solo energia potenziale*.

Al generico istante $t > t_0$ la massa m trasla con velocità v e M ruota con velocità angolare ω (con $v=\omega R$). L'energia meccanica E_M è:

$E_M = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgy$; *energia cinetica di traslazione e di rotazione ed energia potenziale.*

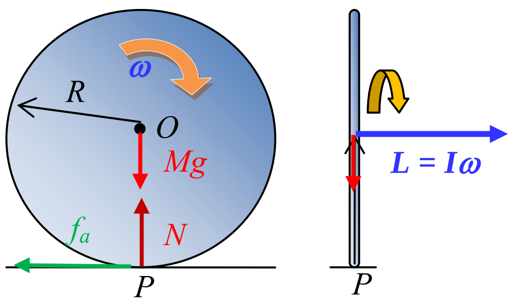
In ogni istante di tempo è ovviamente: $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgy = mgy_0$

Nel caso di pagina precedente, con ovvio significato dei simboli, l'energia meccanica E_M, in un generico istante di tempo, è:

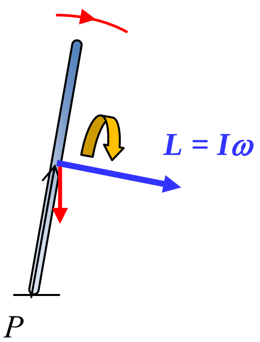
$$E_M = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgy_1 + mgy_2$$

Osservazioni sulla conservazione di $\vec{L}$ per sistemi rigidi in rotazione intorno ad un asse fisso.

1) Si osserva che un disco di massa M, in rotazione intorno ad un asse passante per il centro O parallelo ad un piano orizzontale, si muove restando verticale (*caso a).*
Ciò, ovvero la conservazione di $\vec{L}$, *ci permette di andare in bicicletta!*



Caso a



Caso b

Le forze esterne in gioco sono: la forza peso Mg applicata in O e la forza di attrito f_a ed il vincolo N applicate al punto di contatto P. Esse hanno momento nullo rispetto a P: $\vec{\tau}_{Mg} = \vec{R} \times M\vec{g} = 0$ perché $\vec{R} // M\vec{g}$

$\vec{\tau}_{f_a} = \vec{d} \times \vec{f}_a = 0;$ $\quad \vec{\tau}_N = \vec{d} \times \vec{N} = 0$ perché $\vec{d} = 0$

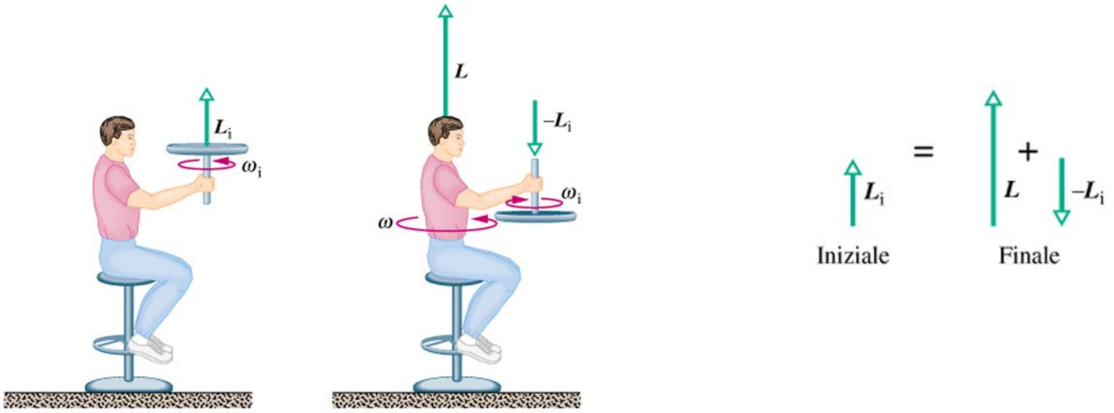
quindi $\vec{\tau}^{\,R}_{est} = 0$ e pertanto $\vec{L} = cost$ in particolare in direzione e verso ossia il *disco non può cambiare piano di rotazione.*

In realtà, si ha che N non è applicato esattamente in P e questo causa una diminuzione di ω ovvero del modulo di L, ma non della sua direzione, mentre f_a causa una correlata diminuzione della velocità di traslazione del centro di massa.

Se per una piccola asperità del piano il disco non è più perfettamente verticale (*caso b)*, il momento della forza peso non è più nullo e il disco varia bruscamente il piano di rotazione. Si può dimostrare che questo effetto è più evidente quanto più è piccola ω ovvero $L=I\omega$.

In conclusione: il disco lanciato con elevata ω, su un piano reale orizzontale, si muove verticalmente ma progressivamente rallenta per interazione con il piano fin tanto che ω non diviene sufficientemente piccolo in modo che piccole asperità del piano lo fanno cadere.

2) Un'altra conseguenza della conservazione di $\vec{L}$ è mostrata in figura. Questa situazione mette in evidenza la natura vettoriale della conservazione di $\vec{L}$.

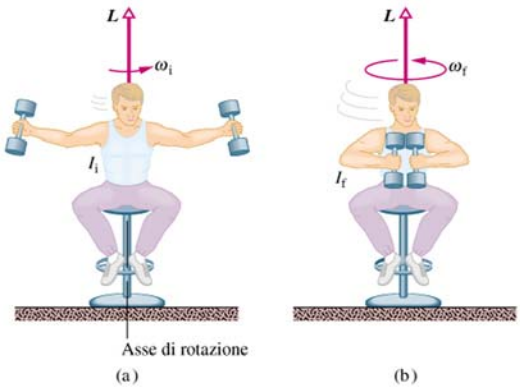


3) Caso di I variabile

Se durante la rotazione di un corpo intorno ad un asse fisso il momento di inerzia del corpo I viene modificato da forze interne al esso o/e da forze esterne di momento nullo, L_{tot} resta costante e quindi $L = I\omega = cost$.

$L_Z = I_i\omega_i = I_f\omega_f = cost \Rightarrow \omega_f = (I_i/I_f)\,\omega_f$ con i, f = *stato iniziale, finale*

Se, come in figura,



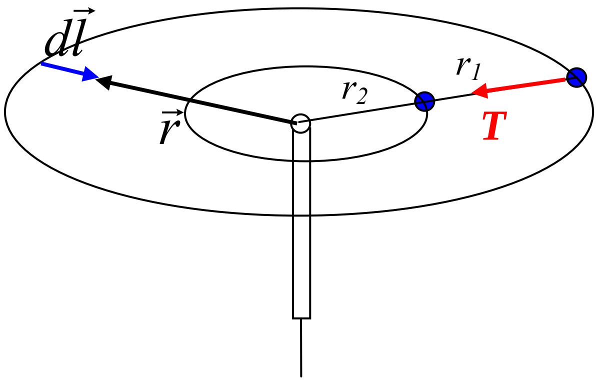
$I_f < I_i$ e quindi $(I_i / I_f) > 1 \Rightarrow \omega_f > \omega_i \Rightarrow K_f > K_i \Rightarrow \Delta K > 0$

Infatti: $K_f = \frac{1}{2} I_f \omega_f^2 = \frac{1}{2} I_f \left(\frac{I_i}{I_f}\right)^2 \omega_i^2 = \left(\frac{I_i}{I_f}\right) \cdot \frac{1}{2} I_i \omega_i^2 = \left(\frac{I_i}{I_f}\right) \cdot K_i > K_i$

se $\Delta K > 0$ vi è un *lavoro fatto* sul sistema. Si può dimostrare che in effetti l'aumento dell'energia cinetica è pari al *lavoro fatto dalle forze interne* nel cambiare *I*. Giustifichiamo questa affermazione con l'esempio seguente.

Massa m in moto circolare intorno ad un punto O, sottoposta all'azione di una fune ideale.

La massa *m*, si avvicina al centro di rotazione (passando da un orbita di raggio r_1 ad una di raggio $r_2 < r_1$) perché è tirata da una forza $\vec{T}$ parallela al raggio $\vec{r}$ ($T = mv^2/r = m\omega^2 r$) ovvero è sottoposta ad un momento della forza nullo e quindi il suo momento della quantità di moto $\vec{L}$ è costante.



Dette v_1 e v_2 le velocità di *m* rispettivamente sull'orbita di raggio r_1 e r_2 si ha che:

$L = cost = mv_1r_1 = mv_2r_2 \Rightarrow v_2 = v_1 (r_1/r_2).$

Se, come in questo caso, $r_2 < r_1$, abbiamo che $v_2 > v_1$ e quindi $K_2 > K_1 \Rightarrow$

$$\Delta K = K_2 - K_1 = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 \left(\frac{r_1^2}{r_2^2} - 1 \right) > 0.$$

Per il teorema dell' energia cinetica, se c'è una *ΔK dovrà esserci un lavoro W fatto dalla forza T* sul sistema tale che $W = \Delta K$. Verifichiamolo:

$$W_{1\to 2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 T \cdot dl \qquad dl = -dr \text{ e } T = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow$$

$$W_{1\to 2} = \int_1^2 -T \cdot dr = \int_1^2 -m\frac{v^2}{r} dr \qquad dove\ v = v_1 \frac{r_1}{r} \Rightarrow$$

$$W_{1\to 2} = -\int_1^2 m v_1^2 \frac{r_1^2}{r^2} \frac{1}{r} dr = m v_1^2 r_1^2 \int_1^2 -\frac{1}{r^3} dr = m v_1^2 r_1^2 \left[\frac{1}{2r^2} \right]_1^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 r_1^2 \left[\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right]$$

$$W_{1\to 2} = \frac{1}{2} m v_1^2 \left[\frac{r_1^2}{r_2^2} - 1 \right] = \Delta K \quad \textit{come atteso.}$$