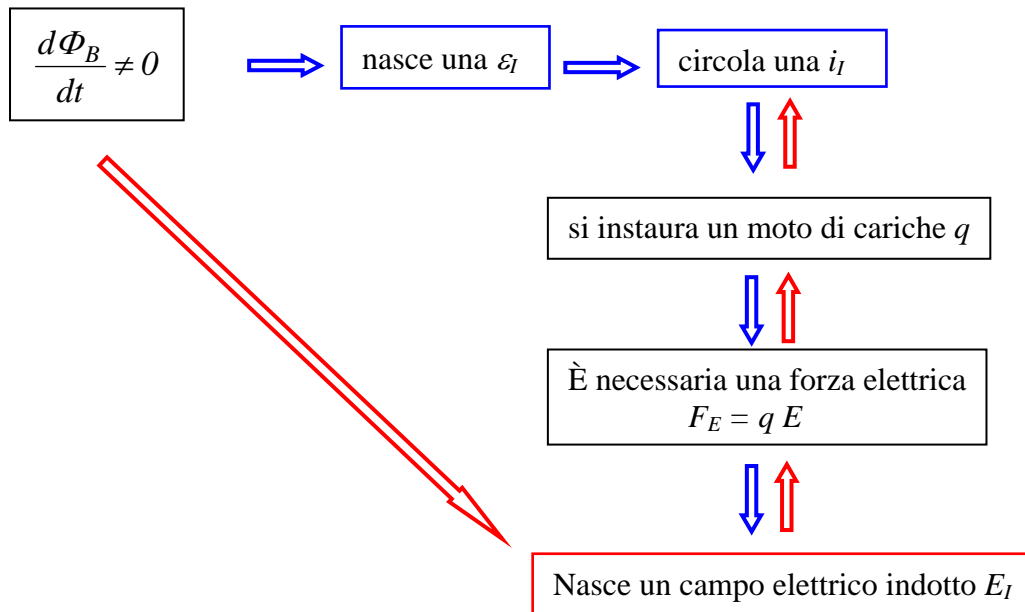


## Le equazioni di Maxwell.

### Campi elettrici indotti.

Per la legge di Farady, in una spira conduttrice dove c'è una variazione di  $\Phi_B$  concatenato si osserva una corrente indotta  $i_I$ . Ricordando che una corrente è un flusso di cariche provocato da un campo  $\vec{E}$ , possiamo scrivere le seguenti implicazioni (in blu) che possono portare all'introduzione di un campo elettrico  $\vec{E}_I$  (**campo elettrico indotto**)

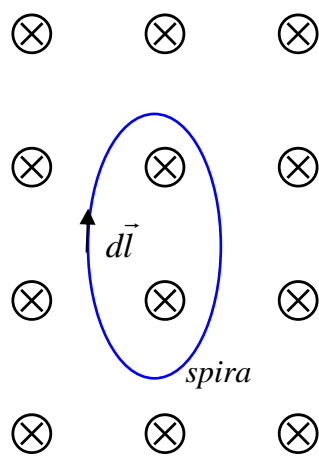


Possiamo pensare ad una interpretazione diversa (dovuta a Maxwell) (in rosso) per spiegare l'insorgere di  $i_I$  nella spira.

Questa interpretazione dice che se in una regione di spazio si ha  $\frac{d\Phi_B}{dt} \neq 0$ , si crea una nuova proprietà dello spazio che chiamiamo **campo elettrico indotto**.

Questa proprietà dello spazio poi si manifesta, su una eventuale spira conduttrice presente nella regione, con una corrente indotta  $i_I$ .

L'espressione del campo elettrico indotto  $\vec{E}_I$  si può ottenere osservando che le due interpretazioni devono portare a risultati compatibili: ad esempio il lavoro  $W$  fatto per spostare una carica  $q_0$  lungo una spira deve essere lo stesso in entrambe le interpretazioni.



$$\frac{d\Phi_B}{dt} \neq 0$$

Interpretazione di Faraday:  $\varepsilon_I \neq 0$

$$W = q_0 \varepsilon_I$$

Interpretazione di Maxwell:  $E_I \neq 0$

$$dW = q_0 \vec{E}_I \cdot d\vec{l} \Rightarrow W = \oint q_0 \vec{E}_I \cdot d\vec{l}$$

$$\Rightarrow q_0 \varepsilon_I = \oint q_0 \vec{E}_I \cdot d\vec{l} \Rightarrow \varepsilon_I = \oint \vec{E}_I \cdot d\vec{l} \Rightarrow -\frac{d\Phi_B}{dt} = \oint \vec{E}_I \cdot d\vec{l}$$

Se interpretiamo l'induzione elettromagnetica in termini di campo elettrico indotto possiamo scrivere la legge di Faraday come:

$$(1) \quad -\frac{d\Phi_B}{dt} = \oint \vec{E}_I \cdot d\vec{l}$$

Si noti, proprio grazie alla precedente relazione, che **il campo elettrico indotto non è conservativo**.

Inoltre se  $\vec{B}(t) = cost \Rightarrow \Phi_B(t) = cost \Rightarrow \frac{d\Phi_B}{dt} = 0 \Rightarrow \oint \vec{E}_I \cdot d\vec{l} = 0$  ossia quando il campo elettrico è conservativo ma non è più un campo elettrico indotto!

Quindi l'equazione (1) automaticamente include il caso stazionario, ovvero il campo elettrostatico, pertanto possiamo scrivere generalizzando:

$$(2) \quad -\frac{d\Phi_B}{dt} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \text{(generalizzazione del teorema della circuitazione)}$$

dove  $\vec{E}$  è il campo elettrostatico per casi stazionari e il campo elettrico indotto per casi non stazionari.

### L'equazione di Ampere-Maxwell.

L'equazione 2, dice che in una regione di spazio dove c'è un campo  $\vec{B}(t)$  si crea un campo  $\vec{E}(t)$ . Questa interpretazione della legge di Faraday, fa sorgere una naturale domanda: è vero anche la situazione simmetrica? Se in una regione di spazio c'è un campo  $\vec{E}(t)$  si crea un campo  $\vec{B}(t)$ ?

Dopo l'interpretazione di Maxwell della legge di Faraday, si cercarono evidenze sperimentali dirette circa la possibilità di creare un campo  $\vec{B}(t)$  da un campo  $\vec{E}(t)$ , ma i risultati sono stati tutti negativi.

Maxwell, non si arrese all'evidenza sperimentale e sviluppò una teoria, qui di seguito accennata, che partiva dalla evidenziare i limiti della legge di Ampere scritta come  $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i_C$ .

Infatti questa espressione, valida in casi stazionari ( $i = i_C = \text{cost} \Rightarrow$  linee di correnti chiuse), non è valida in casi non stazionari quando  $i = i(t)$  e le linee di correnti sono aperte (e quindi  $i_C = 0$ ).

Se colleghiamo due punti a potenziale  $V(A)$  e  $V(B)$  (inizialmente  $V(A) > V(B)$ ) con un filo conduttore, in esso si instaura una corrente non stazionaria  $i(t)$ .

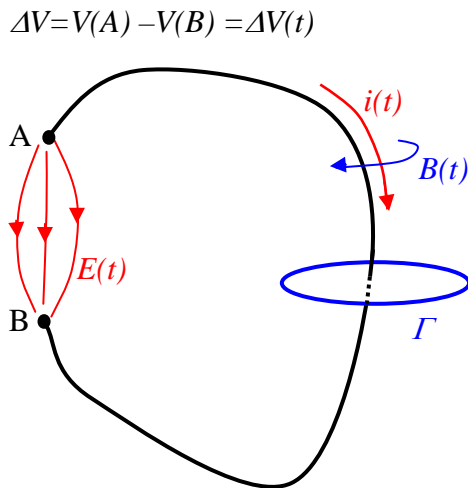


Fig. 1

Se  $i(t) \neq 0 \Rightarrow B(t) \neq 0 \Rightarrow$

scelta la curva  $\Gamma$ , si ha che  $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \text{val} \neq 0$ .

Mentre la linea di corrente (essendo aperta) non risulta concatenata con  $\Gamma$  e si ha  $i_C = 0$ .

Quindi in casi non stazionari il teorema di Ampere ci porta ad un'incongruenza:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \text{val} (\neq 0) = \mu_0 i_C (= 0) \Rightarrow \text{val} = 0$$

Per risolvere questa incongruenza, dobbiamo pensare di aggiungere (Ipotesi di Maxwell) al teorema di Ampere, così come scritto per casi stazionari, un termine che tenga conto dei casi non stazionari, ovvero di aggiungere un "termine di corrente"  $i_S$  scrivendo:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 (i_C + i_S) \quad \text{tale che:} \quad \begin{array}{l} i_S = 0 \text{ e } i_C \neq 0 \text{ in casi stazionari} \\ i_S \neq 0 \text{ e } i_C = 0 \text{ in casi non-stazionari} \end{array}$$

Dobbiamo trovare l'espressione di  $i_S$ . Osserviamo (vedi fig. 1) che se  $i$  è non-stazionaria, ossia circola su una linea aperta, nella zona dove la linea è interrotta deve esserci un campo elettrico  $E(t)$  in quanto esiste un  $\Delta V(t) \Rightarrow$  dove manca  $i(t)$  esiste un  $E(t)$  e quindi variazioni di  $i(t)$  con tempo potrebbero essere equivalenti a variazioni di  $E(t)$ . Analizziamo meglio questa situazione, facendo riferimento al processo di carica di un condensatore piano  $C$  con armature di area  $S$  distanti  $d$  (fig. 2).

Ad un istante  $t$ , sulla singola armatura del condensatore abbiamo una carica  $q(t)$  e una differenza di potenziale fra le armature  $V(t)$  con  $V(t) = C q(t)$ .

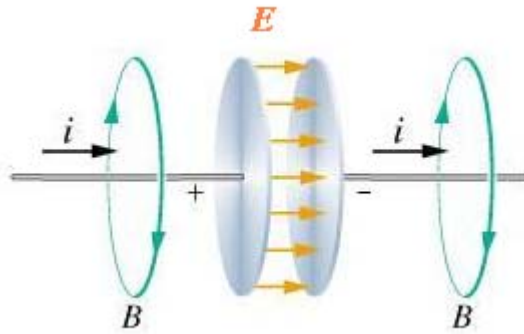


Fig. 2

Sappiamo che:

$$V(t) = E(t)d \text{ e } C = \frac{\epsilon_0 S}{d} \Rightarrow q(t) = CV(t) = \frac{\epsilon_0 S}{d} E(t)d = \epsilon_0 SE(t) \Rightarrow q(t) = \epsilon_0 SE(t) \Rightarrow$$

$$\frac{dq(t)}{dt} = \frac{d(\epsilon_0 SE(t))}{dt} = \epsilon_0 \frac{dSE(t)}{dt} = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E(t)}{dt}$$

dove  $\Phi_E = SE$  è il flusso del campo  $E$  attraverso una superficie pari all'area delle armature.

Il termine  $\epsilon_0 \frac{d\Phi_E(t)}{dt}$  ha le dimensioni di una corrente  $(\frac{C^2}{m^2 N} \cdot \frac{(N/C)m^2}{s} = \frac{C^2 N}{NCs} = \frac{C}{s} = A)$  ed è chiamato, per motivi storici, **corrente di spostamento** indicato con  $i_s$ .

La variazione di carica sull'armatura  $\frac{dq(t)}{dt}$  è quindi equivalente al termine  $\epsilon_0 \frac{d\Phi_E(t)}{dt}$  associato alla variazione di  $\vec{E} \Rightarrow \frac{dq(t)}{dt}$  è la variazione di carica sull'armatura durante il processo di carica, ma queste cariche transitano sul filo producendo la corrente  $i(t)$  in esso  $\Rightarrow$

$$i(t) \equiv \frac{dq(t)}{dt} \equiv \epsilon_0 \frac{d\Phi_E(t)}{dt} \equiv i_s.$$

**In casi non stazionari, nelle zone dove  $E(t)$  il termine  $i_s$  nello spazio è equivalente a  $i(t)$  nei fili conduttori.**

Possiamo quindi scrivere **l'equazione di Ampere-Maxwell**:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \left( i_C + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right) \quad \text{che nel caso di } i_C = 0 \text{ diviene: } \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}.$$

L'equazione di Ampere-Maxwell è completamente simmetrica alla legge di Faraday a parte:

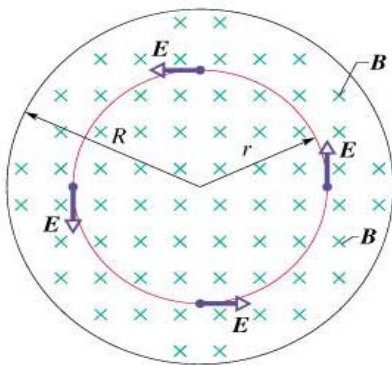
- il fattore  $\mu_0\epsilon_0$ , che dipende dal sistema di unità di misura scelto,
- il segno meno, che indica che i versi dei campi  $B$  ed  $E$  sono in questo caso legati dalla regola della mano destra.

Osservazione:  $\mu_0\epsilon_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 8.86 \cdot 10^{-12} \approx 1 \cdot 10^{-17} s^2 m^{-2}$  e quindi il termine  $\mu_0\epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$  è estremamente piccolo e quindi i suoi effetti difficilmente misurabili direttamente in un esperimento!

### Esempi 1): Campo $E$ indotto generato da campo $B(t)$ a simmetria cilindrica.

Assumiamo un campo  $\vec{B}$ , perpendicolare ed entrante nel foglio, con modulo variabile nel tempo confinato in una regione cilindrica infinita di raggio  $R$ . Sia  $\frac{dB}{dt} = cost > 0$ . Per la legge di Faraday,

si creerà un campo  $\vec{E}$ . Questo deve avere linee di campo chiuse e dovrà conservare la simmetria cilindrica: le linee di campo devono essere delle circonferenze concentriche con l'asse del cilindro e punti equidistanti dall'asse del cilindro devono avere lo stesso valore del campo.



Il verso delle linee di campo è fissato dalla legge di Lenz.  
( $B$  aumenta essendo  $cost > 0$ )

Applichiamo la legge di Faraday, scegliendo un linea  $\Gamma$  di raggio  $r$  coincidente con una linea di campo con:

a)  $r < R$

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \Rightarrow \oint_{\Gamma} E \cdot d\ell \cdot \cos\theta = \oint_{\Gamma} E \cdot d\ell = E \oint_{\Gamma} d\ell = E 2\pi r = -\frac{d(\pi r^2 B)}{dt} \Rightarrow E 2\pi r = -\pi r^2 \frac{dB}{dt} \Rightarrow E = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$$

b)  $r > R$

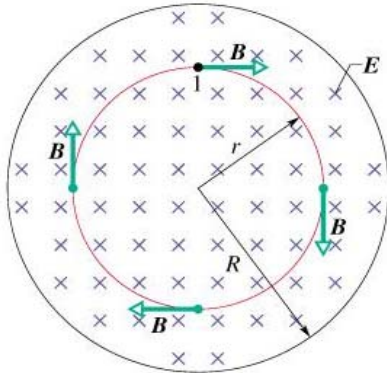
$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \Rightarrow \oint_{\Gamma} E \cdot d\ell \cdot \cos\theta = \oint_{\Gamma} E \cdot d\ell = E \oint_{\Gamma} d\ell = E 2\pi r = -\frac{d(\pi R^2 B)}{dt} \Rightarrow E 2\pi r = -\pi R^2 \frac{dB}{dt} \Rightarrow E = -\frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt}$$

c)  $r = R$ ,  $E = -\frac{R}{2} \frac{dB}{dt}$

**Esempi 2): Campo B generato da un campo E(t) a simmetria cilindrica.**

Assumiamo un campo  $\vec{E}$ , perpendicolare ed entrante nel foglio, con modulo variabile nel tempo confinato in una regione cilindrica infinita di raggio R. Sia  $\frac{dE}{dt} = cost > 0$ . Per la legge di Ampere-Maxwell,

si creerà un campo  $\vec{B}$ . Questo deve avere linee di campo chiuse e dovrà conservare la simmetria cilindrica e quindi valgono le considerazioni precedenti.



Il verso delle linee di campo è fissato dalla regola della mano destra. ( $E$  aumenta, essendo  $cost > 0$ )

Confrontare i versi dei campi nelle due figure!

Applichiamo la suddetta legge, scegliendo un linea  $\Gamma$  di raggio  $r$  coincidente con una linea di campo con:

a)  $r < R$

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \Rightarrow \oint_{\Gamma} B \cdot d\ell \cdot \cos 0 = \oint_{\Gamma} B \cdot d\ell = B \oint_{\Gamma} d\ell = B 2\pi r = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d(\pi r^2 E)}{dt} \Rightarrow B 2\pi r = \mu_0 \epsilon_0 \pi r^2 \frac{dE}{dt}$$

$$\Rightarrow B = \mu_0 \epsilon_0 \frac{r}{2} \frac{dE}{dt}$$

b)  $r > R$

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \Rightarrow \oint_{\Gamma} B \cdot d\ell \cdot \cos 0 = \oint_{\Gamma} B \cdot d\ell = B \oint_{\Gamma} d\ell = B 2\pi r = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d(\pi R^2 E)}{dt} \Rightarrow B 2\pi r = \mu_0 \epsilon_0 \pi R^2 \frac{dE}{dt}$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 \epsilon_0 R^2}{2r} \frac{dE}{dt}$$

c)  $r = R \quad B = \frac{\mu_0 \epsilon_0 R}{2} \frac{dE}{dt}$

## Le quattro equazioni di Maxwell.

La teoria di Maxwell, precedentemente descritta, permise la sintesi di tutti i fenomeni elettrici e magnetici, stazionari e non, con 4 equazioni note come **le equazioni di Maxwell**.

- 1)  $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$       Teorema di Gauss      (L'origine di  $\vec{E}$  sono le cariche elettriche)
- 2)  $\oint_\Gamma \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$       Legge di Faraday      ( $\vec{E}$  è creato anche da  $\vec{B}(t)$ )
- 3)  $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$       Teorema di Gauss per B      (Non esistono cariche magnetiche)
- 4)  $\oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \left( i_C + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)$       Teorema di Ampere-Maxwell      (l'origine di  $\vec{B}$  sono le correnti ma  $\vec{B}$  è creato anche da  $\vec{E}(t)$ )

Questa teoria lasciò subito intravedere l'esistenza di fenomeni non ancora osservati!

Se scriviamo le quattro equazioni precedenti per uno spazio vuoto dove non ci sono nè cariche elettriche ( $q = 0$ ) nè correnti ( $i = 0$ ) otteniamo delle equazioni completamente simmetriche :

- 1)  $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$       3)  $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$
- 2)  $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$       4)  $\oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$

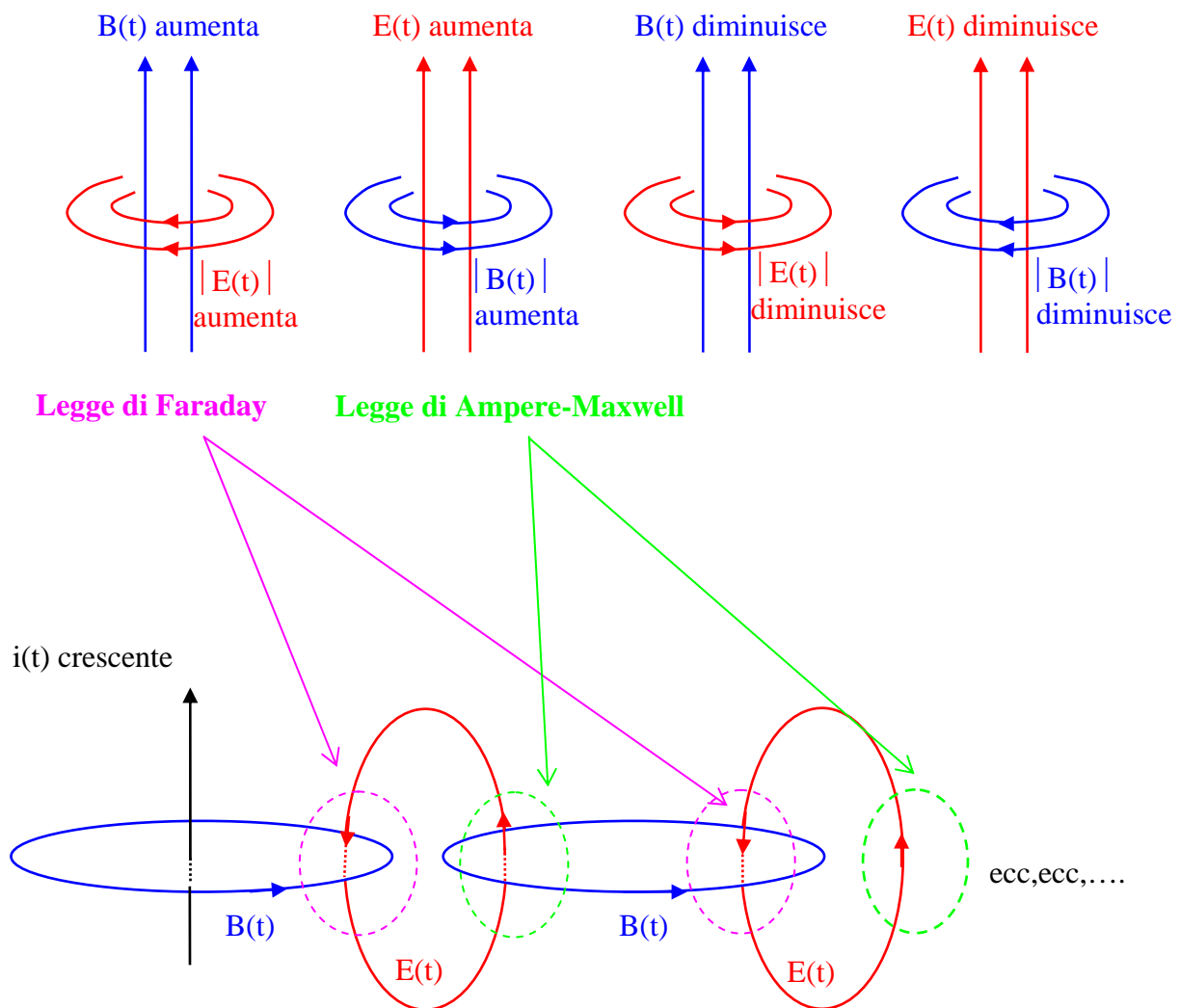
Esse dicono che:

- a) un campo  $\vec{B}(t)$  genera, tramite l'equazione 2, un campo  $\vec{E}(t)$  che genera, tramite l'equazione tramite 4, un campo  $\vec{B}(t)$  ecc, ecc,.....



- b) I campi  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  hanno entrambi linee chiuse.

Il segno – è fondamentale per il sostentamento dei campi (vedi fig.)



Questa nuova realtà fatta di campi  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  che esistono nello spazio vuoto, che si autogenerano e autosostengono sono **le onde elettromagnetiche**.

L'esistenza delle onde elettromagnetiche è la verifica sperimentale della teoria di Maxwell.