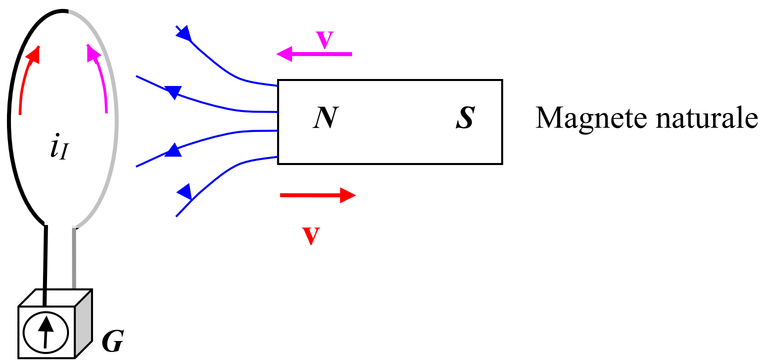
L'induzione elettromagnetica - Legge di Faraday-Lentz

Si osservano alcuni fatti sperimentali.

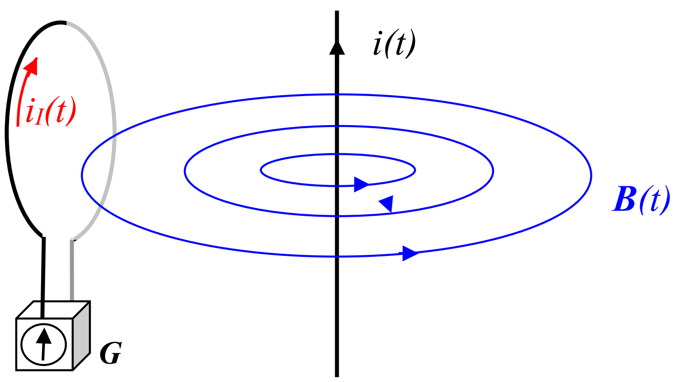
1) Consideriamo un filo metallico chiuso su se stesso (spira) tramite un misuratore di corrente ***G*** posto in vicinanza di un magnete naturale:



Se la spira e il magnete sono fermi, nella spira non circola corrente non essendoci una f.e.m.. Non appena il magnete è in movimento rispetto alla spira (ovvero non appena c'è un moto relativo fra il magnete e spira) il misuratore ***G*** segna un passaggio di corrente (**corrente indotta i_I**) che cessa immediatamente non appena si ferma il moto relativo. Il passaggio di corrente necessita di una f.e.m. pertanto possiamo dire che il moto relativo fra spira e magnete fa sorgere nella spira una **forza elettromotrice indotta ε_I**. Si nota che il verso della corrente indotta dipende dal verso del moto relativo: spira e magnete in allontanamento, spira e magnete in avvicinamento.

Poiché l'unico effetto del moto relativo è quello di variare il valore del campo $\vec{B}$ nei punti dello spazio occupati dalla spira, di conseguenza l'insorgere della ε_I può essere associato al fatto che nei punti occupati della spira si ha un campo $\vec{B}$ variabile con il tempo, $\vec{B}(t)$.

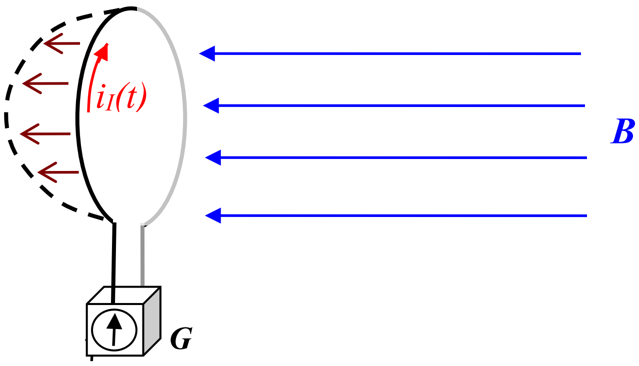
2) Per verificare questa ipotesi, consideriamo una spira con *G* ed un filo percorso da corrente in posizioni fisse. Possiamo ottenere un campo $\vec{B}(t)$ variando la corrente *i(t)* nel filo.



Si osserva che non appena la corrente nel filo varia nel tempo, il misuratore G segna un passaggio di $\boldsymbol{i_I}$ nella spira che cessa immediatamente non appena la corrente nel filo ovvero il campo diviene costante. Si nota che il verso della corrente indotta dipende dal segno della variazione della corrente nel filo: corrente crescente, corrente decrescente.

Ancora, l'unica causa che può produrre ε_I è avere un $\vec{B}(t)$ nei punti della spira.

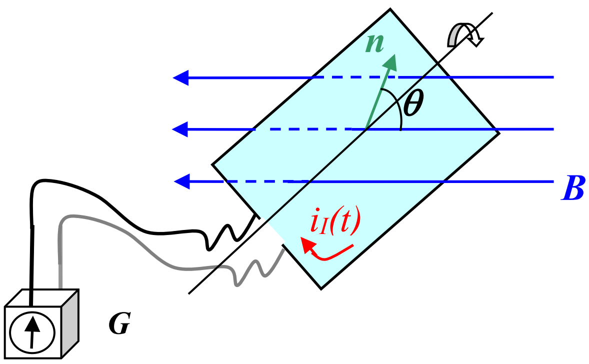
3) Consideriamo una spira con G, la cui forma può essere variata, immersa in un campo B costante ed uniforme.



Si osserva che non appena la forma della spira varia, ovvero varia l'area $S = S(t)$ da essa racchiusa, il misuratore G segna un passaggio di $\boldsymbol{i_I}$ che cessa immediatamente non appena la spira non è più modificata. Si nota che il verso della corrente indotta dipende dal segno variazione della area racchiusa dalla spira: area crescente, area decrescente. L'unica causa che può produrre $\boldsymbol{\varepsilon_I}$ è in questo caso la variazione di *S(t),* della area racchiusa dalla spira, essendo $\vec{B}$ uniforme e costante.

Queste tre osservazioni portano alla conclusione che si crea una $\boldsymbol{\varepsilon_I}$ se abbiamo nei punti della spira $\vec{B}(t)$ oppure S(t) ovvero ricordando la definizione di flusso se $\Phi_B(t) = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ con S l'area della spira.

4) Infatti se consideriamo una spira piana di forma costante immersa in un campo $\vec{B}$, costante ed uniforme, che può cambiare l'orientazione rispetto al campo, ossia $\theta = \theta(t)$, si osserva che non appena l'orientazione della spira varia il misuratore ***G*** segna un passaggio di $\boldsymbol{i_I}$ che cessa immediatamente non appena la spira si ferma. Si nota che il verso della corrente indotta dipende dal segno rotazione.



Essendo B = *cost* e S = *cost*, l'unica causa che può produrre ε_I è un $\theta(t)$ ovvero:

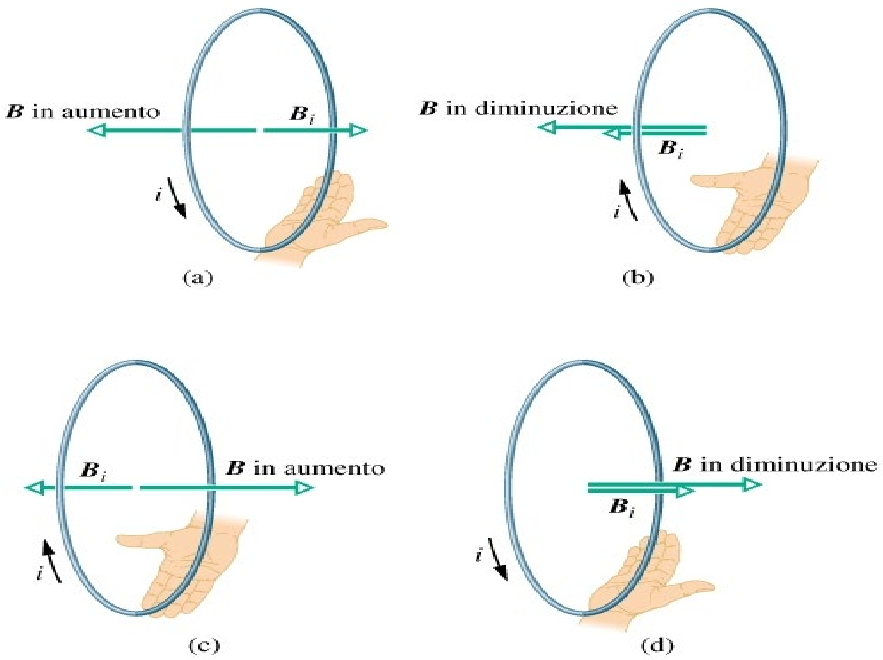
$$\Phi_B(t) = \int_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_s B\cos\theta(t)dS$$

Chiameremo il flusso calcolato attraverso la superficie S racchiusa dalla spira: flusso concatenato con il circuito.

Tutte le precedenti considerazioni ci permettono di concludere che: *se il flusso concatenato con un circuito varia nel tempo, indipendentemente da come questa variazione sia generata, nel circuito sorge una forza elettromotrice indotta* ε_I ***(legge di Faraday o dell'induzione elettromagnetica)***

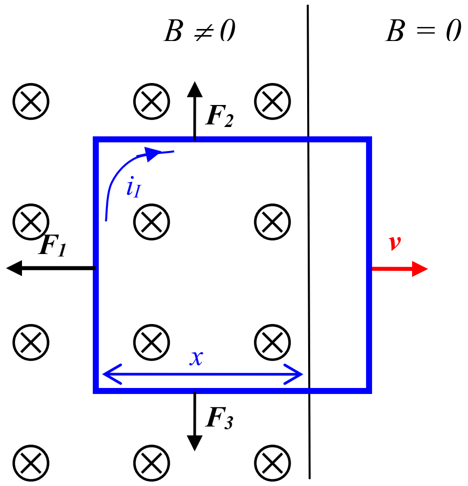
In dettaglio $\varepsilon_I = -\dfrac{d\phi_B}{dt}$

Il segno – (**legge di Lentz**) sta ad indicare che la ε_I fa circolare nel circuito la i_I con verso tale che il campo magnetico generato dalla i_I tende ad opporsi alla variazione di flusso che l'ha prodotta.



La presenza del segno meno, è diretta conseguenza della conservazione dell'energia come si vede dalla seguente situazione, come si può vedere nella situazione qui di seguito descritta.

Supponiamo di estrarre con velocità costante una spira rigida conduttrice da una regione dove esiste un campo magnetico uniforme e constante di modulo B.
Assumiamo: la spira quadrata di lato ℓ e di resistenza totale R, il campo B perpendicolare al piano della spira e entrante nel piano del disegno. Sia t l'istante di tempo in cui la spira è immersa nella regione dove c'è B solo per un tratto x.



Fintanto che la spira è parzialmente immersa il flusso Φ_B con essa concatenato varia nel tempo $\Rightarrow$
$|\Phi_B| = \vec{B} \cdot \vec{S} = B\ell x(t) \Rightarrow \left|\frac{d\Phi_B}{dt}\right| = B\ell\frac{dx}{dt} = B\ell v \Rightarrow |\varepsilon_I| = B\ell v$ dove si è osservato che $\frac{dx}{dt} = v$

Nella spira circolerà una corrente indotta $i_I = \frac{B\ell v}{R}$ che richiede una potenza elettrica (che finisce in calore) $P_E = i_I^2 R = \left(\frac{B\ell v}{R}\right)^2 R = \frac{B^2\ell^2 v^2}{R}$.

Usiamo la legge di Lentz per definire il verso della i_I: il flusso è entrante nel piano del disegno e diminuisce con il tempo. Per opporsi a questa diminuzione il campo magnetico generato dalla corrente indotta deve essere entrante ovvero i_I deve circolare in senso orario (vedi figura).
Su questa spira percorsa di i_I in B si esercitano delle forze meccaniche: $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$.
$\vec{F}_2$ ed $\vec{F}_3$ sono uguali ed opposte e pertanto non influenzano il moto della spira rigida.
$\vec{F}_1 = i_I\vec{\ell} \times \vec{B} \Rightarrow F_1 = i_I \ell B = \frac{B\ell v}{R} \cdot \ell B = \frac{B^2\ell^2 v}{R}$ invece attira la spira verso le zone con campo magnetico.
Se vogliamo estrarre la spira con $v = cost \Rightarrow$

$$\vec{F}^R = 0 \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_{appl} = 0 \Rightarrow \vec{F}_3 = -\vec{F}_{appl} \Rightarrow F_{appl} = \frac{B^2\ell^2 v}{R},$$

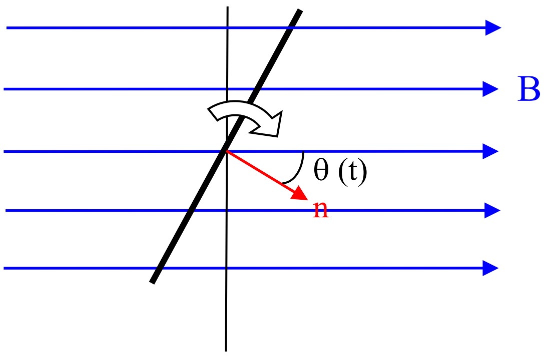
serve un agente esterno che esercita una $\vec{F}_{appl}$.
Sarà impiegata una potenza meccanica P_M che l'interazione corrente-campo trasforma in potenza elettrica, infatti:

$$P_M = F_{appl} \cdot v = \frac{B^2 \ell^2 v}{R} \cdot v = \frac{B^2 \ell^2 v^2}{R} = P_E$$

Se neghiamo la legge di Lenz, la corrente i_I potrà circolare in senso antiorario, la forza $\vec{F}_I$ avrà verso opposto ossia spingerà fuori la spira. Si creerà una situazione in cui l'interazione corrente-campo crea dal nulla sia la potenza P_E per fare circolare corrente sia la potenza P_M per muovere la spira, violando quindi il principio di conservazione dell'energia.

Un'applicazione importante: la dinamo.

Riconsideriamo il caso 4: una spira piana e rigida di area S in rotazione con velocità uniforme ω in una regione dove è presente un campo B uniforme e costante.



$$\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{S} = \vec{B} \cdot \vec{n} S = BS \cos\theta = BS \cos\omega t \Rightarrow \Phi_B = \Phi_B(t) \Rightarrow$$

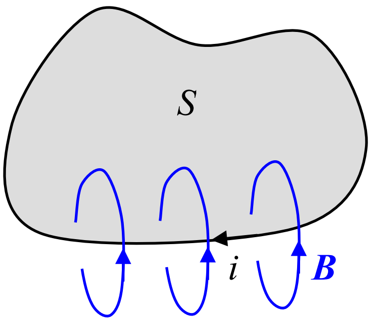
$$|\varepsilon_I| = \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d}{dt}(BS \cos\omega t) = BS\omega \, sen\omega t \Rightarrow |\varepsilon_I| = BS\omega \, sen\omega t$$

Se invece di una spira se ne hanno N sovrapposte si ha: $|\varepsilon_I| = BS\omega N \, sen\omega t = \varepsilon_0 \sin\omega t$

Quindi tenendo in rotazione un insieme di spire in un campo magnetico, si ottiene una forza elettromotrice (**dinamo**) ovvero si trasforma l'energia meccanica necessaria a tenere in rotazione le spire in energia elettrica.

Induttanza

Consideriamo una spira di area *S* in cui scorre una corrente *i*. La corrente crea un campo magnetico $\vec{B}$ le cui linee di campo attraverseranno la superficie della S della spira.



E' perciò possibile calcolare un flusso concatenato con la spira: $\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ e poiché questo flusso è originato dalla corrente circolante nella spira stessa è detto **flusso autoindotto Φ_I.**

$$\Phi_I = \Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} .$$

Ora $\Phi_I \propto \vec{B} \propto i \Rightarrow \Phi_I \propto i \Rightarrow \dfrac{\Phi_I}{i} = cost$

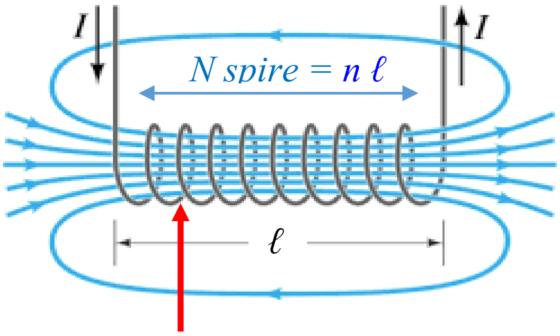
Tale rapporto è detto coefficiente di autoinduzione o semplicemente **induttanza *L* della spira**:

$$L = \frac{\Phi_I}{i} = \frac{\text{flusso autoindotto nella spira}}{\text{corrente nella spira}} \qquad \left(\text{dimensioni}: \ \frac{T \cdot m^2}{A} = \frac{Wb}{A} = H \ \text{ Henry} \right)$$

Si dimostra che *L* dipende solo dalla geometria del sistema.

Verifichiamo questa affermazione per un solenoide ideale lungo ℓ, sezione S e avente $N = n\,\ell$ spire. Il flusso totale indotto $\Phi_{I,T}$ è la somma del flusso indotto attraverso le N spire, Detto $\Phi_{I,S}$ il flusso indotto attraverso una singola spira abbiamo:

$$\Phi_{I;T} = N\Phi_{I,S} = n\,\ell\,\Phi_{IS}$$



Flusso singola spira $\Phi_{I,S}$

Se il solenoide è percorso da corrente *i*, il flusso autoindotto con una spira è:

$$\Phi_{I,S} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B \cdot dS = \int_S \mu_0 nIdS = \mu_0 nI \int_S dS = \mu_0 nIS \,.$$

Segue:

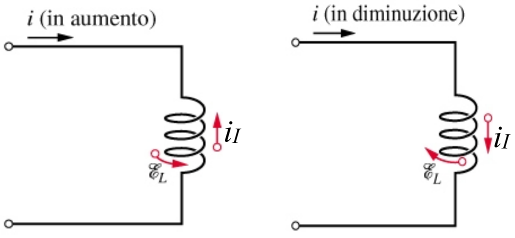
$$L = \frac{Q_{I,T}}{i} = \frac{N\Phi_{I,S}}{i} = \frac{N\mu_0 nIS}{i} = \frac{n\ell\mu_0 nIS}{i} = \mu_0 n^2 \ell S \Rightarrow \text{dipende solo dalla geometria.}$$

A un qualunque circuito in cui scorre corrente è sempre associabile una L; questa ha un valore tanto più grande quanto più sono gli avvolgimenti lungo il percorso della corrente (vedi n^2 per il solenoide).

Dato un circuito caratterizzato da un'induttanza L, se in esso scorre una corrente i il flusso concatenato è calcolabile come:
$\Phi_B = Li$, quindi se $i = i(t) \Rightarrow \Phi_B\,(t) = L\,i(t)$ e ricordando la legge di Faraday abbiamo

$$\varepsilon_I = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d(Li)}{dt} = -L\frac{di}{dt} \,.$$

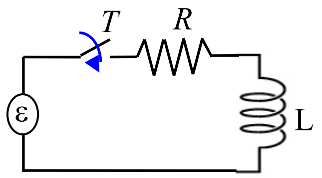
Se in un circuito circola una corrente variabile nel tempo, l'induttanza L fa sorgere in esso una forza elettromotrice ε_I che si oppone alle variazioni della corrente pari a: $\varepsilon_I = -L\dfrac{di}{dt}$



La ε_I si oppone alle variazioni di corrente nei circuiti pertanto quest'ultime non possono essere istantanee. Inoltre, se la corrente nel circuito rende a diminuire, l'induttanza fa circolare corrente nello stesso verso (vedi fig.) e questi richiede energia disponibile. Quando detto si manifesta in varie situazioni: scariche elettriche in prossimità di una spina elettrica sfilata molto rapidamente dalla presa, massimo assorbimento di corrente quando si apre un interruttore, una extra-corrente circolante per un breve intervallo di tempo immediatamente dopo la chiusura di un interruttore, ….. Queste ed altre osservazioni, suggeriscono che un'induttanza attraversata da corrente è sede di energia.

Energia associata ad un'induttanza

Consideriamo il seguente circuito:



Quando chiudiamo l'interruttore *T*, la corrente passerà da un valore iniziale *0* ad un valore finale I_0 costante in un tempo Δt. (la corrente finale è $I_0 = \varepsilon/R$ dato che per I = costante, $\varepsilon_I = 0$)

Durante Δt, l'equazione del circuito è:

$\varepsilon + \varepsilon_I = iR \Rightarrow \varepsilon - L\dfrac{di}{dt} = iR \Rightarrow \varepsilon = iR + L\dfrac{di}{dt}$ moltiplicando entrambi i membri per *i* otteniamo:

$$\varepsilon\, i = i^2 R + iL\frac{di}{dt}$$

a) $\varepsilon\, i$ è la potenza fornita dal generatore al circuito;
b) i^2R è la potenza dissipata nella resistenza *R*,
c) $iL(di/dt)$, di conseguenza è un termine di potenza che, per la conservazione dell'energia, dobbiamo pensare immagazzinato in *L*.

Detta *U* l'energia immagazzinata in *L*, per definizione di potenza:

$$\frac{dU}{dt} = iL\frac{di}{dt} \Rightarrow dU = iLdi$$

dove *dU* è la variazione dell'energia immagazzinata in *L* per un aumento della corrente *i* di una quantità *di* $\Rightarrow$

l'energia totale *U* immagazzinata nell'aumentare la corrente in *L* da *0* a I_0 è la somma di tanti contributi *dU* $\Rightarrow$

$$U = \int dU = \int_0^{I_0} iLdi = L\int_0^{I_0} idi = \frac{1}{2}LI_0^2$$

Quindi un induttanza *L* attraversata da una corrente *i* costante ha immagazzinata una energia $\dfrac{1}{2}Li^2$.

A cosa è associata questa energia?
Dobbiamo trovare una proprietà del solenoide che varia fra quando esso non è percorso da corrente a quando lo è. Sebbene sia ovvio pensare che questa proprietà sia proprio la corrente, non è così a livello microscopico. Infatti, si ricorderà, che a livello microscopio la corrente è solo una piccolissima perturbazione, dovuta alla velocità di deriva, al moto di agitazione termica e quindi, a livello microscopico un conduttore percorso da corrente non è distinguibile da uno in equilibrio elettrico. Come per i condensatori, la differenza macroscopica è dovuta alla presenza del campo magnetico in un solenoide percorso da corrente.

Consideriamo un solenoide con n spire per unita di lunghezza, sezione S e lunghezza ℓ percorso da corrente i, abbiamo:

$$B = \mu_0 n i \Rightarrow i = \frac{B}{\mu_0 n} \quad \text{quindi} \quad U = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2}(\mu_0 n^2 \ell S)\left(\frac{B}{\mu_0 n}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}(\ell S)$$

$\ell S = Vol$ è il volume interno al solenoide ovvero l'unica regione di spazio in cui si è creato un campo B quindi possiamo definire una densità u_B di energia associabile al campo B.

$$u_B = \frac{U}{Vol} = \frac{(B^2/2\mu_0)(\ell S)}{\ell S} = \frac{B^2}{2\mu_0} \Rightarrow u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Abbiamo ottenuto questa relazione per un solenoide, ma essere è di validità generale:
una regione di spazio dove è presente un campo B ha una densità di energia u_B.

Questa energia è stata depositata nello spazio quando abbiamo prodotto le correnti che hanno generato il campo B.