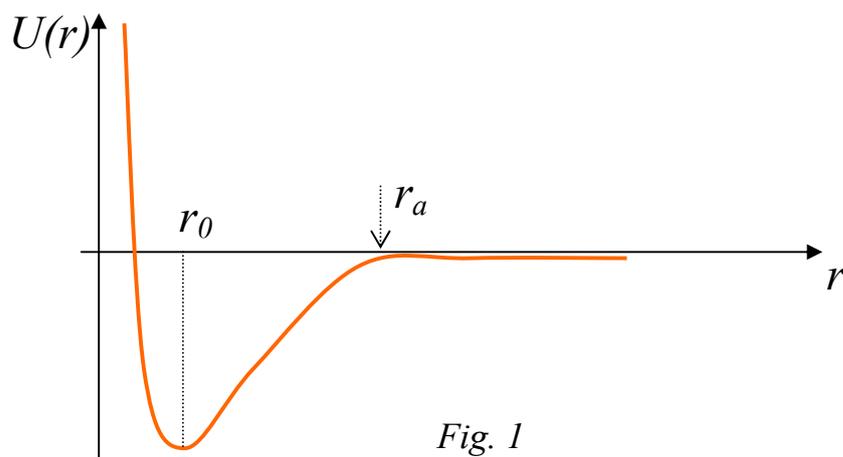


## Fenomeni di superficie

### 1) Caratteristiche del potenziale di interazione fra due molecole di un liquido.

Assumiamo che le molecole del liquido siano a simmetria sferica, che  $r$  rappresenti la distanza fra due molecole e che una delle molecole sia ad  $r = 0$ . Il potenziale di interazione è del tipo mostrato in fig. 1.



Ricordando che  $F(r) = -dU/dr$ , deduciamo che:

- a) per  $r = r_0$  le due molecole sono in equilibrio,
- b) per  $r < r_0$  l'interazione è **fortemente repulsiva**,
- c) per  $r > r_0$  l'interazione è **attrattiva** ma decresce rapidamente con  $r$ ,
- d) per  $r > r_a$  l'interazione è praticamente nulla.

La distanza  $r_0$  è assunta come **diametro** della molecola dato che è praticamente impossibile portare due molecole ad una distanza minore, la distanza  $r_a$  è detta **raggio di azione** ed è tale che due molecole a distanza  $r > r_a$  possano essere considerate non interagenti. Poiché  $r_a \approx 10^{-8}$  m, si dice che le forze molecolari sono **a corto raggio di azione**.

Trascurando l'interazione con il fluido esterno, ogni molecola A,B,C e D all'interno di un liquido interagisce, con le altre che la circondano, contenute entro una sfera di raggio  $r_a$  come mostrato in Fig. 2. Per le molecole A e B, la sfera d'azione è interamente nel liquido. La risultante delle forze sulle molecole A e B è nulla. La molecola C, a distanza  $h < r_a$  dalla superficie, è invece soggetta ad una forza risultante

diretta verso l'interno del liquido. Tale forza è sempre più intensa al diminuire di  $h$ , e diventa massima per le molecole (D) poste sulla superficie ( $h=0$ ).

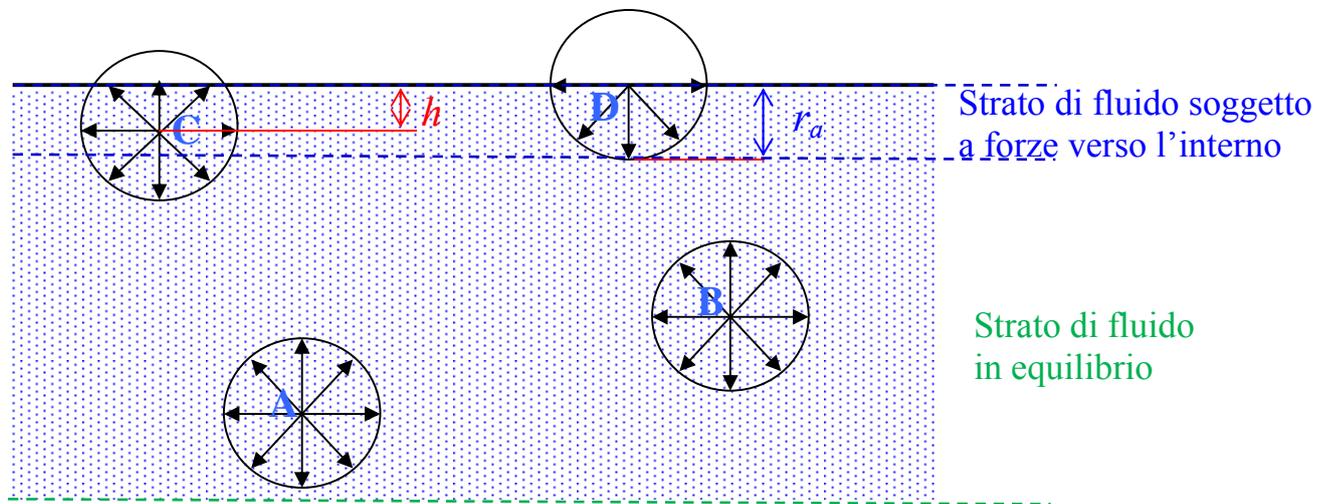


Fig. 2

Sullo strato superficiale del liquido di spessore  $\sim r_a$ , si esercita quindi una **forza** risultante, verso l'interno, che:

- tende a comprimere leggermente lo strato superficiale,
- porta il liquido, a causa della compressione, a minimizzare la area della superficie che lo delimita,
- fa comportare la superficie che delimita il liquido come una membrana elastica.

Di conseguenza, si osserva sperimentalmente, che l'aumento della superficie ( $\Delta S$ ) che delimita un liquido non può avvenire spontaneamente ma serve il lavoro ( $W$ ) di una forza esterna.

## 2) La tensione superficiale

Si definisce di conseguenza, la **tensione superficiale** di un liquido (generalmente indicata con  $\tau$ ) come la costante di proporzionalità fra il lavoro  $W$  necessario ad aumentare di  $\Delta S$  la superficie che delimita il liquido e  $\Delta S$  stesso:

$$2.1 \quad W = \tau \cdot \Delta S \Rightarrow \tau = \frac{W}{\Delta S} = \frac{dW}{dS}$$

Dalla definizione segue che  $\tau$  si misura in  $J/m^2 = N \cdot m/m^2 = N/m$

Il valore di  $\tau$  dipende anche dal fluido esterno (se questo non è specificato si assume sia l'aria) e dalla temperatura. In tabella sono dati alcuni valori.

Fluido (20 °C)	$\tau$ (N/m)	Fluido	$\tau$ (N/m)
Alcool etilico	0.017	Acqua (0 °C)	0.076
Soluzione saponosa	$\approx 0.025$	Acqua (100 °C)	0.059
Benzina	0.029	Azoto (-80 °C)	0.020
Olio d'oliva	0.032		
Acqua	0.073		
Mercurio	0.427		
Olio d'oliva-acqua	0.021		
Benzina-acqua	0.034		
Mercurio-acqua	0.427		

Per la **2.1**, un volume  $V$  di liquido all'equilibrio deve minimizzare l'area della superficie che lo delimita. Infatti, per conformarlo in una superficie  $S$  deve essere fatto lavoro sul liquido che è immagazzinato come energia potenziale  $U_V$  di configurazione. All'equilibrio stabile deve essere:

$U_V$  minimo  $\Rightarrow S$  minima  $\Rightarrow$  **Suna sfera** di volume  $V$ .

Questo è evidente quando la tensione superficiale domina le altre forze esterne: sfere di mercurio in aria, sfere di azoto liquido, bolle sferiche di aria in acqua, bolle sferiche di acqua-saponata,.....

Per **2.1** inoltre, porzioni vicine di fluido tendono a riunirsi (due sferette di mercurio spontaneamente si fondono in una sola) per minimizzare il contenuto di energia.

### 2.1) Definizione operativa di $\tau$

Usiamo delle pellicole liquide che si possono ottenere immergendo un telaietto rettangolare rigido in un liquido a bassa tensione superficiale, ad esempio acqua saponata. Sia  $\ell$  la larghezza del telaietto e sia trascurabile lo spessore  $s$  del filo rigido con cui esso è realizzato. Se il lato  $AB$  del telaietto è mobile (e di massa  $m$  relativamente piccola) si osserva inizialmente una variazione della superficie della pellicola (vedi *fig. 3a*) fino a raggiungere una condizione di equilibrio (*fig. 3b*).

Se il telaietto è posto verticale, all'equilibrio si ha  $\Rightarrow \vec{F} + m\vec{g} = 0$

Questo suggerisce l'esistenza *di forze, tangenti alla superficie e perpendicolari al contorno*, spiegabili in termini di tensione superficiale  $\tau$  qui definibile come:

**2.2**  $\tau = \frac{F}{L}$  ( in  $N/m$ ) con  $L = \text{contorno}$  = perimetro della area di contatto del liquido, in questo caso  $L = 2\ell$  (vedi *fig. 3c*) essendo  $s$  trascurabile  $\Rightarrow$

**2.3**  $\tau = \frac{F}{2l}$  *definizione operativa di tensione superficiale*

La definizione **2.3** (mediante il concetto di forza tangenziale) è equivalente alla **2.1** (mediante il lavoro per aumentare la superficie) infatti, se assumiamo che nel raggiungere l'equilibrio la pellicola si contrae di  $dx$  (*fig 3a*), si ha:

$$dW = F \cdot dx = 2l \cdot \tau \cdot dx = \tau \cdot 2(l \cdot dx)$$

$$l \cdot dx = dA \text{ variazione di una superficie}$$

$$2 \cdot dA = dS \text{ variazione totale della superficie}$$

$$dW = \tau \cdot 2 \cdot dA = \tau \cdot dS \Rightarrow \tau = \frac{dW}{dS}$$

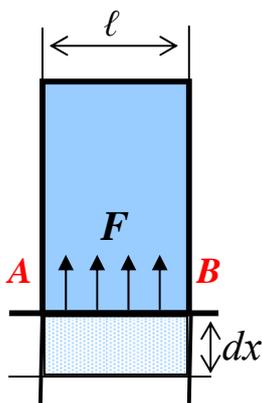


Fig. 3a

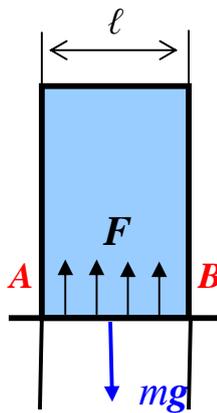


Fig. 3b

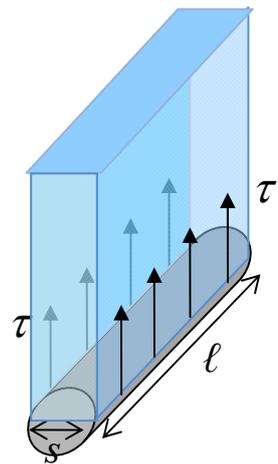
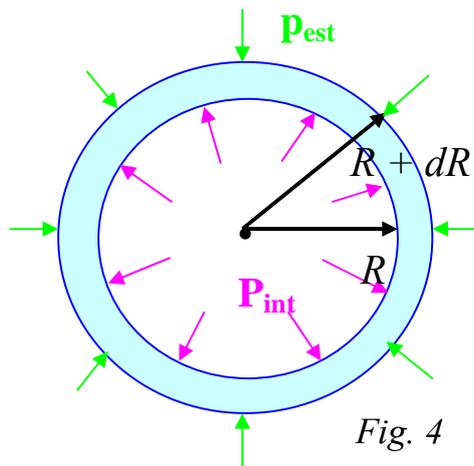


Fig. 3c

### 3) Legge di Laplace

Abbiamo già detto che una porzione di liquido, libera di conformarsi per azione delle sole forze di tensione superficiali, deve assumere una forma sferica. Consideriamo quindi una lamina liquida sferica di raggio  $R$  e spessore  $dR$  (una bolla di sapone). La pressione esterna e la tensione superficiale per la 2.1 tendono a contrarre la bolla. Per l'equilibrio è necessario una pressione interna (fig. 4) che deve tendere ad espandere la bolla, quindi:



$$p_{int} > p_{est} \Rightarrow (p_{int} - p_{est}) > 0$$

Il lavoro delle forze di pressione per una espansione di  $dR$  è:

$$dW_p = F_p \cdot dR = (p_{int} - p_{est}) \cdot S \cdot dR$$

$$S = 4 \pi R^2 \Rightarrow$$

$$dW_p = (p_{int} - p_{est}) \cdot 4 \pi R^2 \cdot dR (> 0)$$

A questa espansione si oppone la tensione superficiale con un lavoro:

$$dW_\tau = \tau \cdot dS (< 0).$$

Per calcolare  $dS$ , essendo lo spessore  $dR$  piccolo, si ha:  $S_{sfera\ int.} \approx S_{sfera\ est.} \approx 4 \pi R^2 \Rightarrow$

$$dS = dS_{sfera\ int.} + dS_{sfera\ est.} = 2 \cdot d(4 \pi R^2) = 2 \cdot 8 \pi R dR$$

$$dW_\tau = \tau \cdot dS = \tau \cdot 16 \pi R dR$$

All'equilibrio il lavoro totale deve essere nullo  $\Rightarrow |dW_\tau| = |dW_p| \Rightarrow$

$$16 \pi \cdot \tau \cdot R dR = (p_{int} - p_{est}) \cdot 4 \pi R^2 \cdot dR \Rightarrow 4 \cdot \tau = (p_{int} - p_{est}) R \Rightarrow$$

$$\mathbf{3.1} \quad p_{int} - p_{est} = \frac{4\tau}{R} \quad (\text{sfera cava})$$

L'eccesso di pressione interna, necessario per tenere la bolla in equilibrio, dipende *direttamente da  $\tau$  ed inversamente dal raggio  $R$ .*

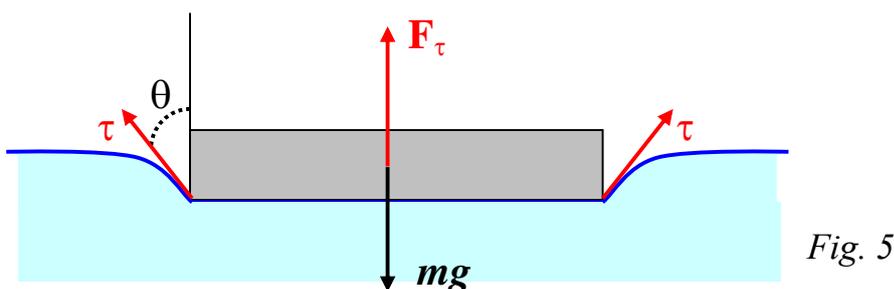
Se si tratta di un sfera di liquido, la  $p_{int}$ , detta *pressione di curvatura*  $p_c$ , è dovuta alla tensione superficiale che lo comprime, mentre l'esistenza di una sola superficie che lo delimita toglie un fattore 2 dalla dimostrazione precedente. Si ha pertanto:

$$3.2 \quad p_c - p_{est} = \frac{2\tau}{R} \quad (\text{sfera piena})$$

Le equazioni 3.1 e 3.2 sono note come **Legge di Laplace**

#### 4) Superficie di un liquido come membrana elastica

La superficie di un liquido può **sostenere** una massa deformandosi. Consideriamo un cilindretto cilindrico di raggio  $r$  e massa  $m$ .



Per simmetria, la risultante delle forze di tensione superficiale  $F_\tau$  è verticale con:

$$F_\tau = \tau \cdot L \cdot \cos\theta = \tau \cdot 2\pi r \cdot \cos\theta \quad \text{essendo } L = 2\pi r$$

$$W = mg$$

$$\text{All'equilibrio } \Rightarrow F_\tau = W \Rightarrow \tau \cdot 2\pi r \cdot \cos\theta = mg \Rightarrow \cos\theta = \frac{mg}{2\pi r \cdot \tau}$$

ossia  $\cos\theta$  aumenta (ovvero aumenta la deformazione della superficie) all'aumentare di  $m$  a parità di  $\tau$  ed  $r$ . Se per un dato  $m$  e/o  $\tau$ , il rapporto  $mg/2\pi r \tau$  è maggiore di 1 la superficie non può sostenere la massa  $m$ . (Essendo  $\tau$  generalmente molto piccolo, solo piccole  $m$  riescono a fermarsi sulla superficie).

## 5) Capillarità

La risultante delle forze di interazione molecolare su una molecola è spesso denominata *forza di coesione* (se si sviluppa fra molecole identiche) o *forza di adesione* (se si sviluppa fra molecole diverse).

*forze di coesione*  $\Rightarrow$  **tengono insieme** le sostanze

*forze di adesione*  $\Rightarrow$  fanno attrarre sostanze diverse (**ad esempio** acqua su vetro)

La condizione di equilibrio di un fluido in presenza di più sostanze è determinata dalla reciproca intensità delle forze di adesione e coesione.

Consideriamo ad esempio un liquido a contatto con la parete solida del contenitore e con l'aria (acqua in un bicchiere). Le molecole del liquido in vicinanza della parete sentono la forza di coesione del liquido  $\vec{F}_c$  diretta verso l'interno del liquido, la forza di adesione liquido-gas  $\vec{F}_{a,a}$  diretta verso l'interno del gas, la forza di adesione liquido-solido  $\vec{F}_{a,s}$  diretta verso l'interno del solido (fig 6).

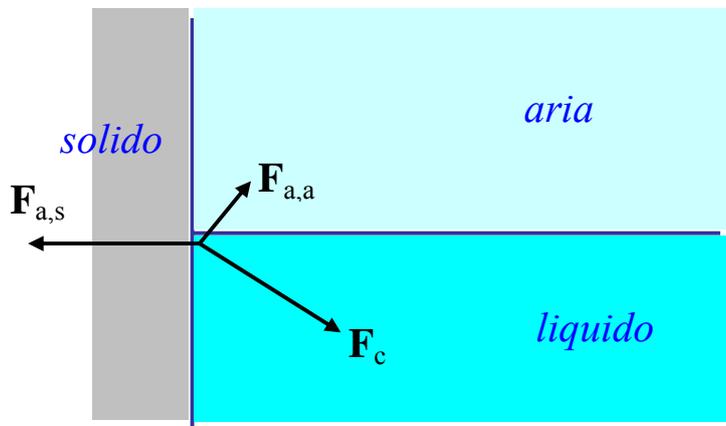
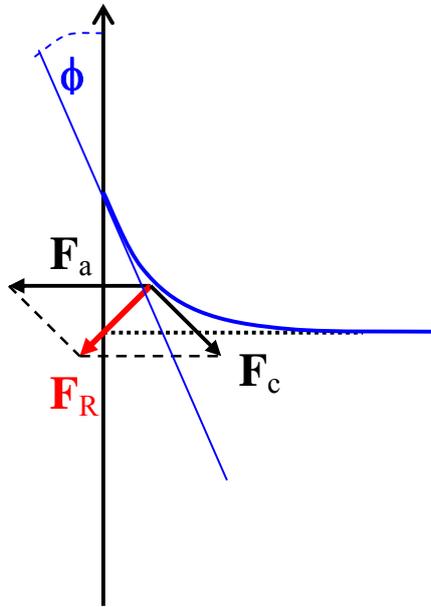


Fig. 6

La  $\vec{F}_{a,a}$  è così debole da poter essere trascurata, mentre le restanti due forze, vista la loro direzione e verso, non possono avere risultante nulla quindi, ricordando la definizione di fluido, dobbiamo aspettarci che all'equilibrio la superficie libera del liquido diventi *ortogonale alla risultante delle forze* agenti.

Si possono avere due casi:

a)  $\vec{F}_a > \vec{F}_c$

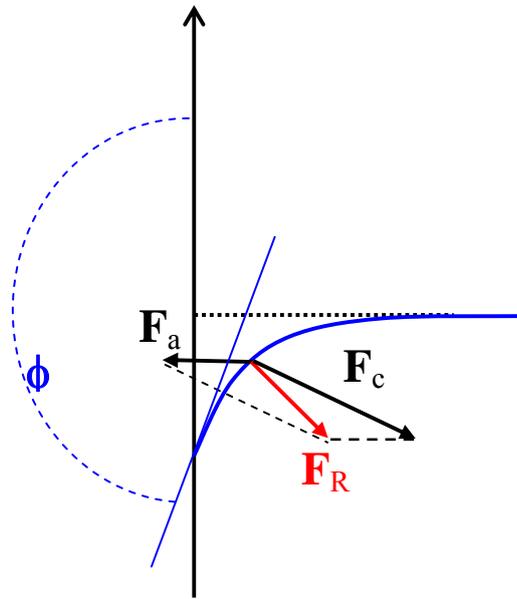


Innalzamento del liquido lungo la parete  $\Rightarrow$

*il liquido bagna la parete*

ovvero:  $0 < \phi < \pi/2$

b)  $\vec{F}_a < \vec{F}_c$



Allontanamento del liquido dalla parete  $\Rightarrow$

*il liquido non bagna la parete*

ovvero:  $\pi/2 < \phi < \pi$

$\phi = \text{angolo di raccordo}$  (angolo fra la tangente alla superficie del liquido, nel punto di contatto con la parete, e la verticale ascendente).

*Esso dipende dalla coppia liquido-solido.*

Acqua-vetro	$\phi = 0^\circ$
Benzina-vetro	$\phi = 26^\circ$
Acqua-paraffina	$\phi = 107^\circ$
Acqua-teflon	$\phi = 127^\circ$
Mercurio-acqua	$\phi = 140^\circ$

L'incurvamento della superficie è osservabile solo in prossimità ( $\leq mm$ ) delle pareti; questo in tubi di piccole dimensioni trasversali (cosiddetti tubi capillari) da luogo al **fenomeno della capillarità**: il livello della superficie libera del fluido nel capillare è diverso da quello nel resto del recipiente (in contraddizione apparente con la legge di Stevino). Quello che succede è schematizzato in fig. 8 per due tubi capillari, *A* e *B*, immersi in acqua con *A* di vetro e in *B* di teflon. Un liquido che bagna la parete si innalza formando un menisco concavo nel capillare, mentre un liquido che non bagna la parete si porta ad un livello più basso formando un menisco concesso nel capillare.

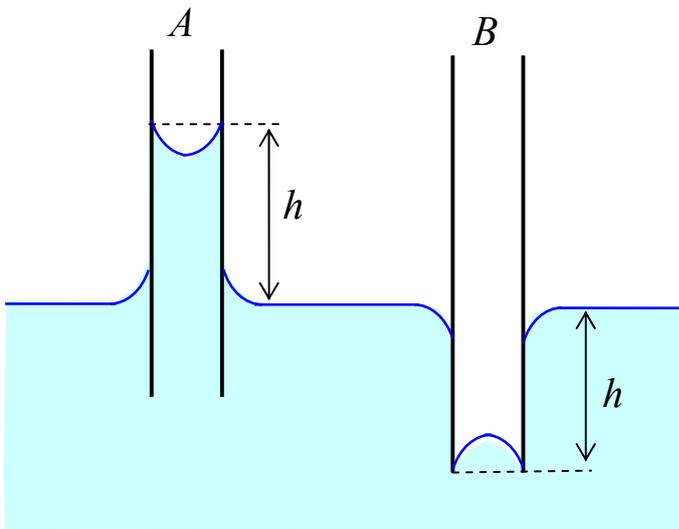


Fig. 8a

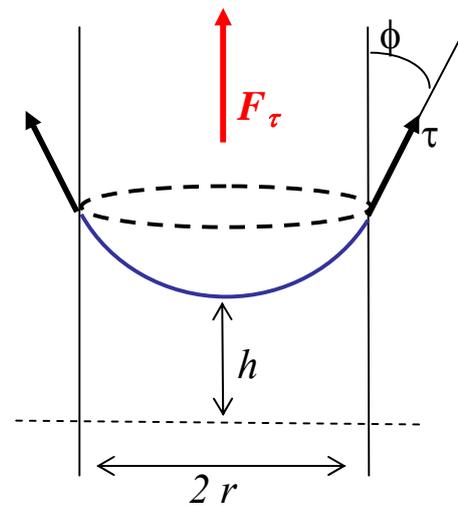


Fig. 8b

Calcoliamo  $h$ , nel caso *A* ovvero per un liquido che bagna la parete, per un capillare cilindrico di raggio  $r$  (fig 8b). Sul perimetro di contatto liquido-solido  $L = 2\pi r$  si esercitano le tensioni superficiali la cui risultante  $F_\tau$  è verticale e diretta verso l'alto:

$$F_\tau = \tau \cdot \cos \phi \cdot L \quad \text{con} \Rightarrow F_\tau = \tau \cdot \cos \phi \cdot 2\pi r.$$

Questo causa l'innalzamento del liquido nel capillare la cui massa sente la forza peso  $W$ ; all'equilibrio deve essere  $W = F_\tau$ .

$$W = mg \quad \text{con} \quad m = \rho \cdot V \approx \rho \pi r^2 h \Rightarrow \tau \cdot \cos \phi \cdot 2\pi r = \rho \cdot \pi r^2 h \cdot g \Rightarrow$$

$$5.1 \quad h = \frac{2\tau \cdot \cos \phi}{\rho g r} \quad \text{Legge di Jurin}$$

La relazione 5.1 è valida per calcolare  $h$  anche nel caso *B*.

## 6) Contatto fluido-fluido.

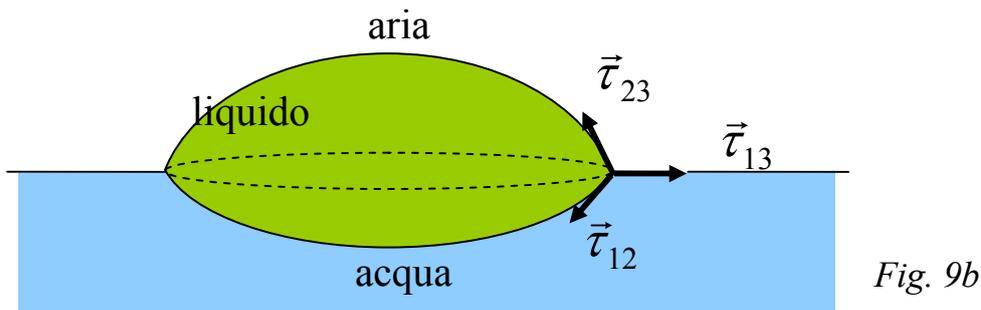
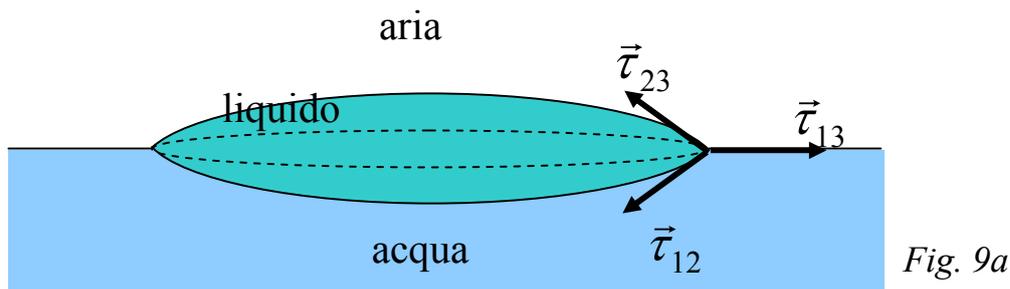
Vediamo di capire il comportamento di una goccia di liquido (indice 2) su uno strato di acqua (indice 1) in una atmosfera di aria (indice 3). In questo caso ci sono tre superfici di discontinuità:

- superficie di contatto liquido-aria, caratterizzata da una tensione superficiale  $\vec{\tau}_{23}$
- superficie di contatto liquido-acqua, caratterizzata da una tensione superficiale  $\vec{\tau}_{12}$
- superficie di contatto acqua-aria, caratterizzata da una tensione superficiale  $\vec{\tau}_{13}$ .

Ogni punto delle linee di contatto dei tre elementi (curva tratteggiata in fig 9) deve essere in equilibrio sotto l'azione delle tensioni superficiali (tangenti alle rispettive superfici di separazione):

$$6.1 \quad \vec{\tau}_{12} + \vec{\tau}_{13} + \vec{\tau}_{23} = 0 \Rightarrow \vec{\tau}_{13} = -\vec{\tau}_{12} - \vec{\tau}_{23}$$

e questo determina la forma della goccia di liquido come mostrato in fig 9a e 9b per due generici liquidi diversi.



Il problema è che non sempre la relazione 6.1 può essere verificata. Ad esempio se il liquido (2) è olio combustibile ( $\tau_{12} = 21 \cdot 10^{-3}$  N/m,  $\tau_{23} = 32 \cdot 10^{-3}$  N/m,  $\tau_{13} = 73 \cdot 10^{-3}$  N/m) non si raggiunge mai l'equilibrio e l'olio si espande sull'acqua fino a formare una lamina di spessore molecolare.

## 7) Esempi numerici

7.1) Usando aria con una sovrappressione  $\Delta p$  di  $36 \text{ N/m}^2$ , si ottengono delle bolle di sapone di raggio  $R = 5 \text{ mm}$  in un ambiente a pressione atmosferica. Calcolare la tensione superficiale dell'acqua saponata in uso ed il lavoro necessario per formare una bolla.

$$\text{Per la legge di Laplace: } \Delta p = \frac{4\tau}{R} \Rightarrow \tau = \frac{R\Delta p}{4} = 45 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$$

Dalla definizione di tensione superficiale:

$$\tau = \frac{W}{dS} \Rightarrow W = \tau \Delta S$$

$$\Delta S = S_{fin} - S_{iniz}, \text{ dove } S_{iniz} = 0 \text{ mentre}$$

$$S_{fin} = 4\pi R_{in}^2 + 4\pi R_{est}^2 = 2(4\pi R^2) \text{ poichè } R_{in} \approx R_{est} \approx R,$$

$$\text{quindi } \Delta S = S_{fin} - S_{iniz} = 2(4\pi R^2) - 0 = 8\pi R^2$$

$$\text{e pertanto } W = \tau 8\pi R^2 = 1.0 \cdot 10^{-5} \text{ J}$$

7.2) Un goccia di liquido, di raggio  $R = 5 \text{ mm}$  e di sovrappressione  $\Delta p = 28 \text{ N/m}^2$ , viene divisa in tante gocce identiche di raggio  $r_i = 1 \text{ mm}$ . Calcolare la tensione superficiale del liquido ed il lavoro necessario per ottenere tutte le gocce più piccole.

$$\text{da Laplace } \Delta p = \frac{2\tau}{R} \Rightarrow \tau = \frac{R\Delta p}{2} = 7 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}$$

$$\text{numero di gocce identiche } n = \frac{V_{Tot}}{V_i} = \frac{(4/3)\pi R^3}{(4/3)\pi r_i^3} = \left(\frac{R}{r_i}\right)^3 = 125$$

$$\text{dalla definizione } \tau = \frac{W}{\Delta S} \Rightarrow W = \tau \Delta S \text{ con}$$

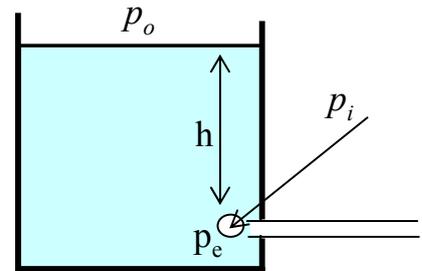
$$\Delta S = S_{fin} - S_{iniz} = n4\pi r_i^2 - 4\pi R^2 = 1.25 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ quindi } W = 2.8 \cdot 10^{-5} \text{ J}$$

7.3) L'estremità di un tubo è immersa in acqua ad una profondità  $h = 20$  m. In esso è pompato un gas con una pressione  $p_i = 2.979 \cdot 10^5$  Pa e all'estremità del tubo si formano delle bollicine che risalgono in superficie. Si osserva che all'inizio le bollicine hanno raggio  $R_i = 0.15$  mm e che appena raggiungono il raggio  $R_f = 0.21$  mm esse si rompono. Calcolare la tensione superficiale gas-acqua e la profondità  $h_x$  a cui le bollicine si rompono. Si assuma che la pressione esterna all'acqua sia  $p_0 = 1.015 \cdot 10^5$  Pa e che la temperatura dell'acqua sia uniforme.

per la legge di Laplace  $p_i - p_e = \frac{2\tau}{R_i}$

per la legge di Stevino:  $p_e = p_0 + \rho gh$

$\Delta p = p_i - p_e = 400 \text{ N/m}^2 \Rightarrow \tau = \frac{R_i \Delta p}{2} \Rightarrow \tau = 0.03 \text{ N/m}$



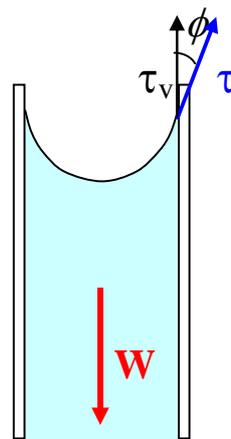
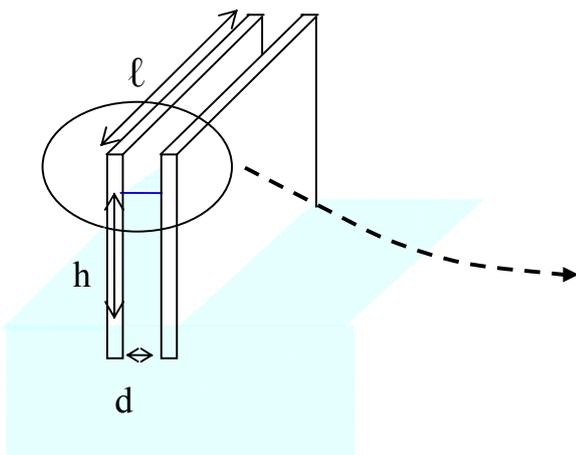
Osserviamo che :

a) le bollicine si rompono se:  $p_{int} > p_{est} + \frac{2\tau}{R}$     b) temp. acqua costante  $\Rightarrow pV = cost$

$p_i \frac{3}{4} \pi R_i^3 = p_{i,f} \frac{3}{4} \pi R_f^3 \Rightarrow p_{i,f} = p_i \left( \frac{R_i}{R_f} \right)^3 = 1.086 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ , e  $p_{e,f} = p_0 + \rho gh_x \Rightarrow$

$p_{i,f} > p_0 + \rho gh_x + \frac{2\tau}{R_f} \Rightarrow h_x < \left( p_{i,f} - p_0 - \frac{2\tau}{R_f} \right) / \rho g = 69 \text{ cm}$

7.4) Calcolare l'innalzamento  $h$  dell'acqua per effetto della capillarità tra due superfici piane di vetro distanti fra loro  $0.11$  mm e poste verticalmente. Si assuma per il contatto acqua-vetro una tensione superficiale di  $0.072$  N/m ed un angolo di contatto di  $0^\circ$ .



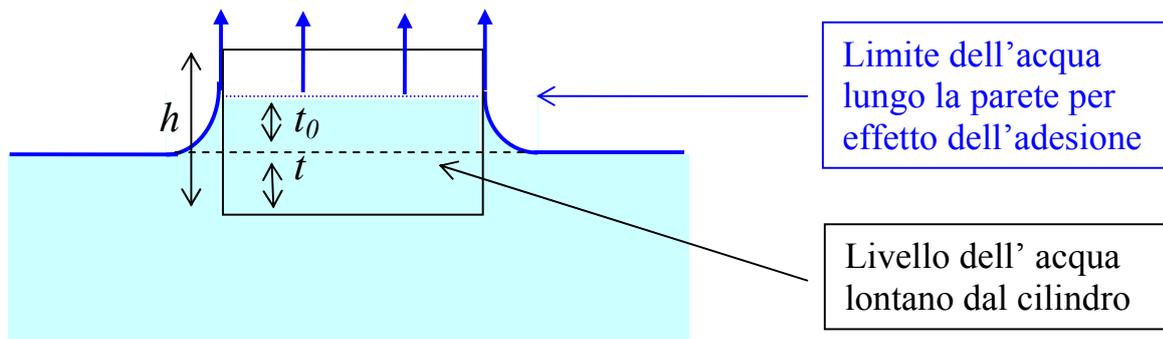
$\tau_v = \tau \cos \phi \Rightarrow$   
 $F_{v,tot} = \tau \cos \phi \cdot L$   
 con  $L = 2l$

$W = mg = \rho Vg$   
 $W = \rho(dhl)g$

all'equilibrio:  $W = F_{v,tot} \Rightarrow \rho(dhl)g = \tau \cos \phi \cdot 2l \Rightarrow \rho dhg = 2\tau$  con  $\cos \phi = 1$  quindi

$h = \frac{2\tau}{\rho g d} = 0.133 \text{ m}$

7.5) Un cilindretto di materiale plastico ( $\rho_p = 418 \text{ m/kg}^3$ ) di altezza  $h = 14 \text{ mm}$  e raggio di base  $r = 5 \text{ mm}$  è posto in acqua ( $\rho_a = 1000 \text{ m/kg}^3$ ). L'acqua bagna le pareti del materiale plastico con un angolo di raccordo  $\phi = 0^\circ$ . Se la tensione superficiale dell'acqua è  $\tau = 0,073 \text{ N/m}$ , calcolare, in modulo direzione e verso, la risultante  $F^R$  delle forze sul cilindretto dovute alla tensione superficiale e il tratto  $t$  di cui il cilindretto risulta immerso in acqua all'equilibrio.



Le forze di adesioni che causano l'innalzamento del fluido sulle pareti del cilindretto. Essendo  $\phi = 0^\circ$  esse sono verticali e la risultante, verticale e verso l'alto, è:

$$F_v = \tau \cdot L \text{ con } L = 2\pi r \Rightarrow F_{v,tot} = \tau 2\pi r$$

Questa è la forza che il cilindretto esercita sul liquido ed è applicata al liquido (che pertanto si innalza); per il terzo principio della dinamica al cilindretto è applicata una forza uguale ed opposta:  $\vec{F}^R = -\vec{F}_v$  quindi:

$\vec{F}^R$  è verticale, verso il basso, di modulo  $2.3 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$

Per l'equilibrio del cilindretto, detta  $\vec{W}$  la forza peso e  $\vec{S}$  la spinta di Archimede, deve aversi:

$$\vec{W} + \vec{S} + \vec{F}^R = 0 \Rightarrow W + F^R = S$$

Forza peso del cilindretto:  $W = mg = \rho_p V g = \rho_p (\pi r^2 h) g = 4.5 \cdot 10^{-3} \text{ N}$

Spinta di Archimede (nell'ipotesi  $t_0 \ll t$ ):  $S = \rho_a V_{im} g = \rho_a (\pi r^2 t) g$

$$W + F^R = S \Rightarrow \rho_a (\pi^2 r t) g = W + F^R \Rightarrow t = \frac{W + F^R}{\rho_a \pi r^2 g} = 8,8 \text{ mm}$$

(n.b. se il liquido non bagna la parete  $F^R$  è concorde con  $S$ )