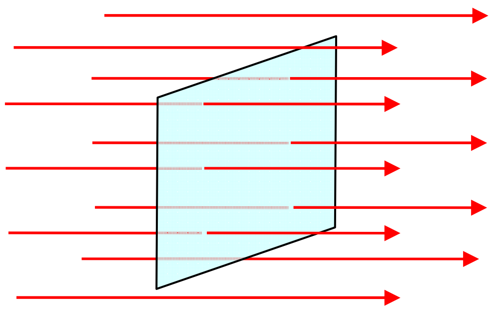
Il teorema di Gauss e sue applicazioni

Concetto di flusso

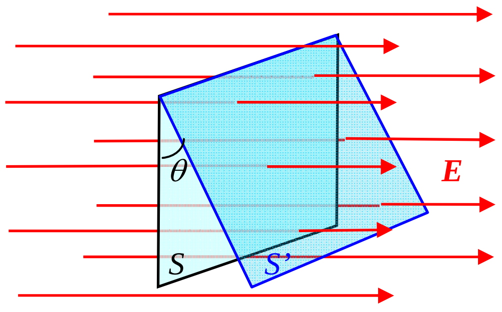
Consideriamo un campo uniforme $\vec{E}$ ed una superficie piana S perpendicolare alle linee di campo.

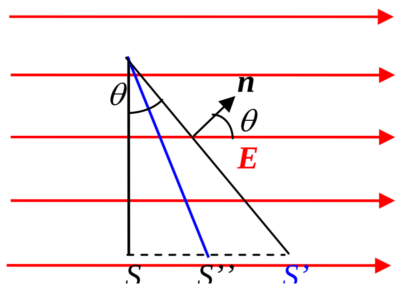


Definiamo flusso del campo $\vec{E}$ attraverso la superficie S la quantità :
$\Phi_E = E \cdot S$ (misurata in Vm)

(Interpretazione: il flusso valuta il numero delle linee di campo che attraversano la superficie considerata)

Si nota in figura seguente, che superficie diverse S' ma legate fra loro dalla relazione
$S = S' \cdot \cos\,\theta$
sono attraversate dallo stesso numero di linee di campo ovvero hanno lo stesso flusso.
Possiamo generalizzare: $\Phi_E = E \cdot S \cdot \cos\theta$.



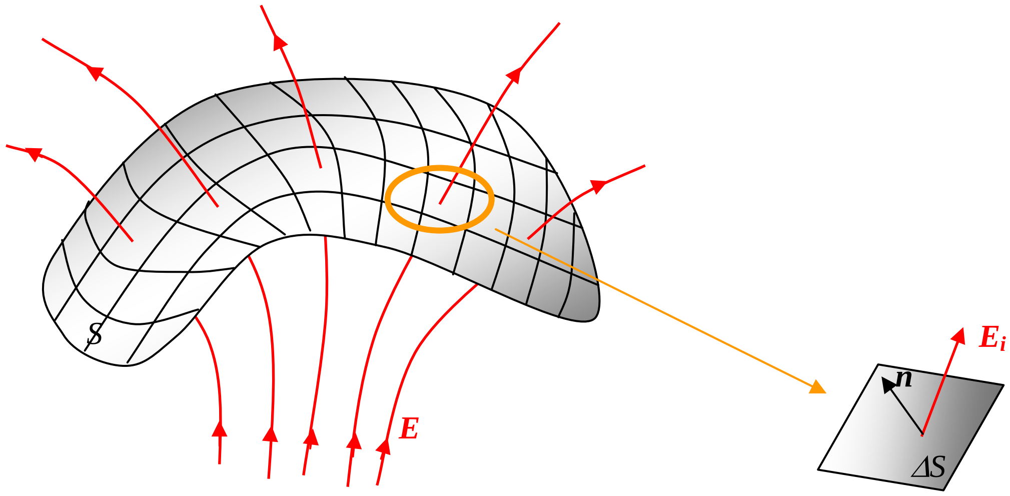


Osserviamo che θ, angolo fra le due superfici, è anche l'angolo che si forma fra la normale ad S' e la direzione del campo.

Data una superficie *S* piana, definiamo **vettore superficie** $\vec{S} = S\vec{n}$ come un vettore di modulo pari alla superficie *S* e direzione e verso quello della normale alla superficie stessa:
abbiamo$\Rightarrow \Phi_E = ES\cos\theta = \vec{E} \cdot \vec{S}$

Se il campo non è uniforme e/o la superficie *S* non piana, possiamo pensare di suddividerla in più parti ΔS con il criterio che:

- ciascuna ΔS possa essere considerata una superficie piana,
- il campo elettrico su ciascuna ΔS possa essere ritenuto costante è pari ad $\vec{E}_i$,



In tal caso, per ogni ΔS possiamo calcolare il corrispondente flusso:

$\Delta\Phi_E{,i} = E_i \cdot \Delta S \cdot cos\,\theta = \vec{E}_i \cdot \Delta S\vec{n}$.

Il flusso attraverso l'intera superficie S, sarà calcolabile come:

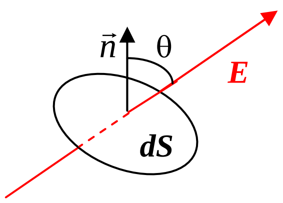
$\Phi_E = \sum \Delta\Phi_{E,i} = \sum \vec{E}_i \cdot \Delta S\vec{n}$.

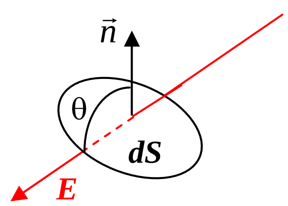
Questo è un valore approssimato, che diventa sempre più esatto al diminuire ΔS ossia:

$\Phi_E = \lim\limits_{\Delta S \to 0} \sum \Delta\Phi_{E,i} = \int\limits_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$ detto **integrale di superficie** con $d\vec{S}$ vettore di superficie associato ad elemento infinitesimo di superficie.

In particolare la superficie S può essere una superficie chiusa e scriveremo: $\Phi_E = \oint\limits_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$

Osservazione importante: il flusso può essere sia positivo che negativo



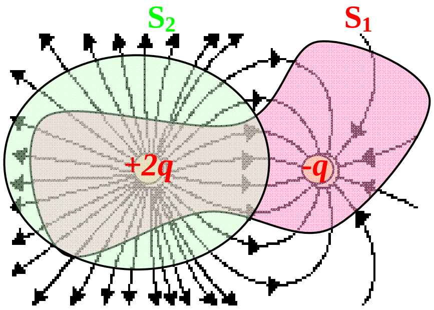


$\Delta\Phi_E = E \cdot \Delta S \cdot cos\,\theta$	$\Delta\Phi_E = E \cdot \Delta S \cdot cos\,\theta$
$0 < \theta < \pi/2 \Rightarrow cos\,\theta > 0 \Rightarrow \Delta\Phi_E > 0$	$\pi/2 < \theta < \pi \Rightarrow cos\,\theta < 0 \Rightarrow \Delta\Phi_E < 0$
flusso uscente	flusso entrante

Il teorema di Gauss

Il teorema di Gauss afferma che il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa dipende solo dalle cariche q_{int} interne alla superficie ed è pari a q_{int}/ε_0.

$$\Rightarrow \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$



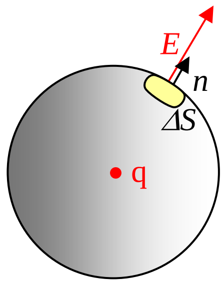
$$\Rightarrow \oint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{2q - q}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{2q}{\varepsilon_0}$$

Si ricorda che il campo è determinato, tramite il principio di sovrapposizione, da tutte le cariche presenti mentre il suo flusso attraverso una superficie chiusa solo dalle cariche al suo interno! Questa non è una contraddizione: il principio di sovrapposizione dà informazione in ogni singolo punto dello spazio, il teorema di Gauss dà un informazione mediata su una superficie.

Il teorema si può dimostrare rigorosamente nel caso più generale, vediamo qui una giustificazione partendo da una sola carica puntiforme $+q$.

Scegliamo come superficie chiusa S una sfera di raggio r concentrica con la carica e calcoliamo il flusso attraverso essa.



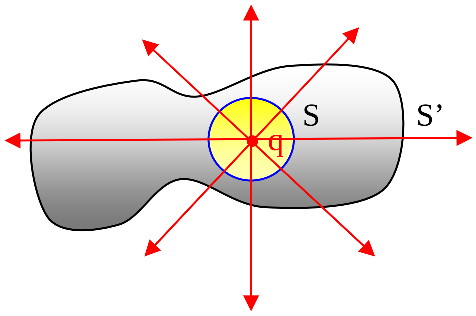
$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \oint_S \hat{r} \cdot \vec{n} dS$$

$\hat{r}$ è parallelo ad $\vec{n} \Rightarrow \hat{r} \cdot \vec{n} = 1$

$$\Phi_E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \oint_S dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \left(4\pi r^2\right) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$\Phi_E = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$ indipendentemente dal raggio della sfera.

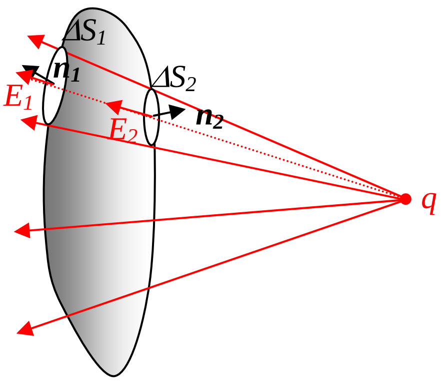
Se la superficie *S'* è generica, sarà sempre possibile trovare una sfera *S* completamente contenuta in *S'*. Non essendoci altre cariche, il numero delle linee di campo attraverso *S'* sarà necessariamente uguale al numero delle linee di campo attraverso *S*



allora

$$\Phi_E(S') = \Phi_E(S) = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Resta da vedere che nel caso in cui la carica è esterna alla superficie, $\Phi_E = 0$.
Data una superficie *S* esterna alla carica *q*, consideriamo le linee di campo in un piccolo cono con vertice *q*. L'intersezione di questo cono con la superficie *S*, determina due piccole aree ΔS_1 e ΔS_2 attraversate dallo stesso numero di linee di campo.



$$\Delta\Phi_{Cono} = \Delta\Phi_1 + \Delta\Phi_2$$

$$\Delta\Phi_1 = \vec{E}_1 \cdot \Delta S_1 \vec{n}_1 > 0$$

$$\Delta\Phi_2 = \vec{E}_2 \cdot \Delta S_2 \vec{n}_2 < 0$$

$$|\Delta\Phi_1| = |\Delta\Phi_2| \Rightarrow$$

$$\Delta\Phi_{cono} = |\Delta\Phi_1| - |\Delta\Phi_2| = 0$$

Questo è vero per ogni piccolo cono con vertice in *q* che interseca la superficie *S*

$$\Rightarrow \Phi_E = \sum \Delta\Phi_{cono,i} = 0$$

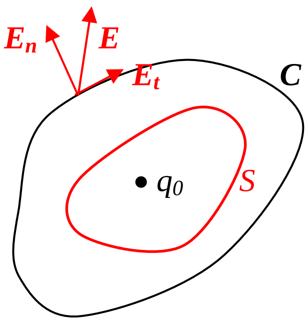
Per il principio di sovrapposizione, il risultato precedente è generalizzabile a qualsiasi distribuzione di cariche.

Conduttori in equilibrio.

(conseguenza del teorema di Gauss)

Diamo una carica $+q$ ad un conduttore C. Dopo un certo tempo si raggiunge una condizione di equlibrio che è caratterizzata dalle seguenti condizioni:

1) il campo elettrico interno al conduttore è nullo mentre il campo esterno è normale alla superficie



All'equilibrio su una carica $q_0 \neq 0$ posta all'interno di C deve aversi: $\vec{a} = 0$ ma

$\vec{F} = m\vec{a} = 0$ e $\vec{F} = q_0\vec{E}_{int} \Rightarrow$

$q_0\vec{E}_{int} = 0$

essendo $q_0 \neq 0 \Rightarrow \vec{E}_{int} = 0$

All'equilibrio su una carica $q_0 \neq 0$ sulla superficie di C deve aversi: $\vec{a} = 0$ ma

$\vec{F} = m\vec{a} = 0$ e $\vec{F}_t = q_0\vec{E}_t \Rightarrow q_0\vec{E}_t = 0$, essendo $q_0 \neq 0 \Rightarrow \vec{E}_t = 0$

2) La carica all'interno di C è nulla ed è distribuita solo sulla superficie.

Se scegliamo una superficie chiusa S tutta interna a C abbiamo per il teorema di Gauss che

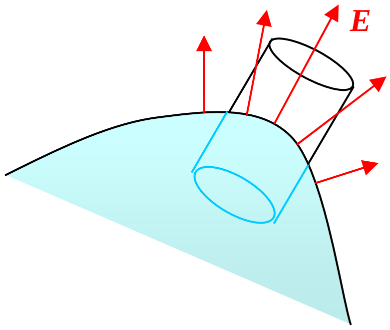
$\oint_S \vec{E}_{int} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$ ma poiché per il punto precedente $\vec{E}_{int} = 0 \Rightarrow \oint_S \vec{E}_{int} \cdot d\vec{S} = 0 = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$

Poiché questo è vero qualunque S interna a C, deve essere necessariamente anche $q_{int} = 0$.

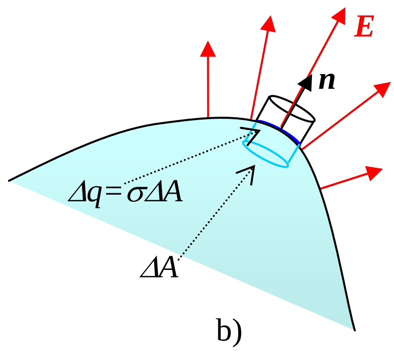
La carica q si troverà solo distribuita sulla superficie A del conduttore C con **densità di carica superficiale** $\sigma = \frac{q}{A}$ (in C/m^2).

3) Il campo elettrico in prossimità della superficie è pari a σ/ε_0.

Valutiamo tramite il teorema di Gauss il flusso attraverso un piccolo cilindro retto di area di base ΔA con asse parallelo alla normale alla superficie nella zona considerata. Il cilindro ha una base all'interno di C. Scegliamo ΔA sufficientemente piccolo e vicino alla superficie di C, in modo da poter trascurare il flusso attraverso la superficie laterale del cilindro (caso b in figura) e di poter considerare E costante su ΔA. A causa di questa approssimazione, il risultato che otterremo sarà valido *solo per punti prossimi alla superficie*.



a)



b)

$$\Phi_E = \oint_{cilindro} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{base\ int} \vec{E}_{int} \cdot d\vec{S} + \int_{sup.lat.} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{base\ est} \vec{E}_n \cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

I° integrale: $\vec{E}_{int} = 0 \Rightarrow \int_{base\ int} \vec{E}_{int} \cdot d\vec{S} = 0;$

II° integrale: per come abbiamo scelto il cilindretto $\int_{sup.lat.} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0;$

III° integrale: $\vec{E}_n \cdot d\vec{S} = \vec{E}_n \cdot \vec{n} dS = E_n \cos 0 dS = E_n dS \Rightarrow \int_{base\ est} \vec{E}_n \cdot d\vec{S} = \int_{base\ est} E_n dS;$

quindi:

$\Phi_E = \int_{base\ est} E_n dS = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$ ma poichè E_n è costante sulla base $\Rightarrow$

$$E_n \cdot \int_{baseest} dS = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma \Delta A}{\varepsilon_0} \Rightarrow \quad E_n \Delta A = \frac{\sigma \Delta A}{\varepsilon_0} \Rightarrow \quad E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

4) il conduttore è equipotenziale.
(da dimostrare in seguito)

Queste proprietà dicono che la regione di spazio all'interno di un conduttore in equilibrio non risente di eventuali fenomeni elettrostatici esterni; ossia un involucro di materiale conduttore costituisce uno **schermo elettrostatico** per le ragioni in esso contenute.

Applicazione del Teorema di Gauss

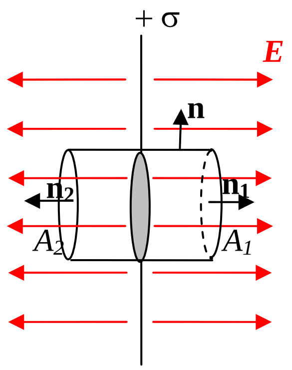
Il teorema di Gauss permette di calcolare il campo elettrico di alcune distribuzioni di cariche sfruttando considerazioni di simmetria.

1) Distribuzione piana infinita di carica con densità σ

Se dividiamo lo spazio omogeneo ed isotropo con un piano verticale, la condizione che zone a destra e a sinistra del piano devono essere per simmetria indistinguibili impone che:

a) le linee di campo devono essere perpendicolari al piano carico
b) nei punti ad uguale distanza, a destra e sinistra del piano,il campo deve avere lo stesso valore

Con questo in mente, scegliamo come superficie chiusa per calcolare il flusso un cilindro retto di area di base *A*, con asse perpendicolare al piano e basi equidistanti dal piano.



Segue:

$$\oint_{cilindro} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{A_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} + \int_{sup.lat.} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{A_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = \vec{E}_1 \cdot \vec{n}_1 dS = E_1 \cos 0 dS = E_1 dS \Rightarrow \int_{A_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = \int_{A_1} E_1 dS = E_1 \int_{A_1} dS = E_1 A$$

$$\vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_2 dS = E_2 \cos 0 dS = E_2 dS \Rightarrow \int_{A_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = \int_{A_2} E_2 dS = E_2 \int_{A_2} dS = E_2 A$$

$$\text{sulla supertficie laterale} \quad \vec{E} \perp \vec{n} \Rightarrow \int_{sup.lat.} \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0$$

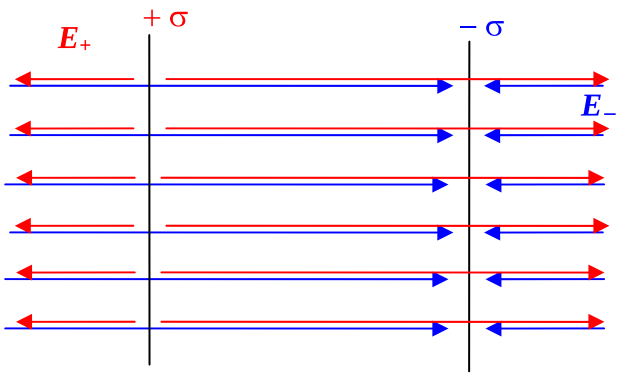
$$\oint_{cilindro} \vec{E}\cdot d\vec{S} = E_1 A + E_2 A = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$(\text{posto } E_1 = E_2 = E)\ 2EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \Rightarrow \qquad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Conclusione: Il campo è uniforme e vale $\vec{E} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n}$

2) Doppia distribuzione piana infinita di carica di densità $+\sigma$ e $-\sigma$.

Questo risultato ci permette di calcolare il campo elettrico, usando il principio di sovrapposizione, generato da una doppia distribuzione piana infinita di carica con densità $+\sigma$ e $-\sigma$.

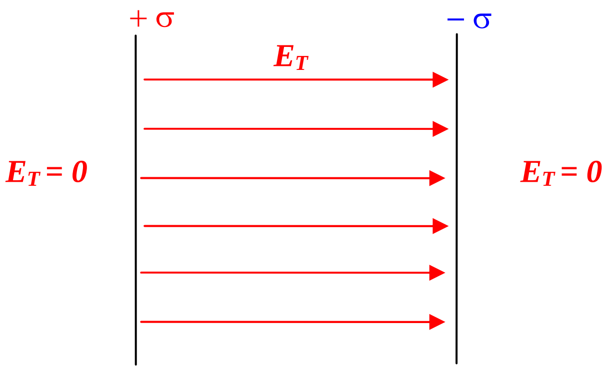


$$\vec{E}_T = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$$

$$\text{con } \left|\vec{E}_+\right| = \left|\vec{E}_-\right| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}_T = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = 0 \qquad \vec{E}_T = \vec{E}_+ + \vec{E}_- \neq 0 \qquad \vec{E}_T = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = 0$$

$$E_T = 2\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



Conclusione: Il campo è uniforme nella zona compresa fra i piani e vale $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$ mentre è nullo all’esterno.

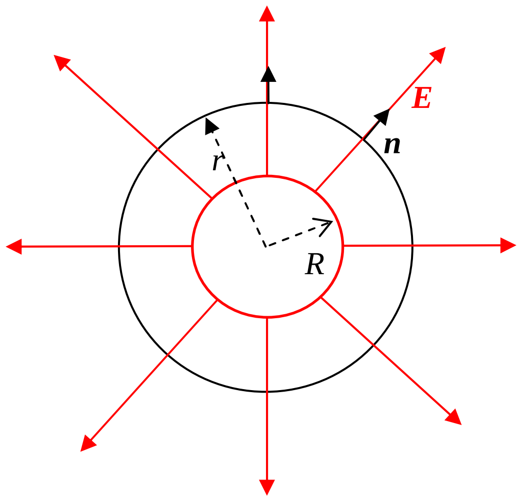
3) Distribuzione sferica di carica.

Consideriamo una sfera di raggio *R* caricata con una carica *q*.
Siamo in una situazioni di simmetria sferica in uno spazio omogeneo ed isotropo e pertanto tutto deve essere indistinguibile per rotazioni intorno al centro della sfera. Questo impone che:

c) le linee di campo devono avere la direzione radiale
d) nei punti ad uguale distanza dal centro della sfera il campo deve avere lo stesso valore.

Con questo in mente, scegliamo come superficie chiusa per calcolare il flusso una sfera di raggio *r* concentrica con la sfera carica.

Segue per $r>R$



$$\Phi_E = \oint_{sfera} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \quad \text{dove } q_{int} = q, \text{ e per ogni elemento } d\vec{S} \text{ della sfera abbiamo:}$$

$$\vec{E}\cdot d\vec{S} = \vec{E}\cdot\vec{n}dS = E\cos 0 dS = EdS \Rightarrow \int_{sfera}\vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{sfera} EdS = E\int_{sfera} dS = E\cdot\left(4\pi r^2\right) = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

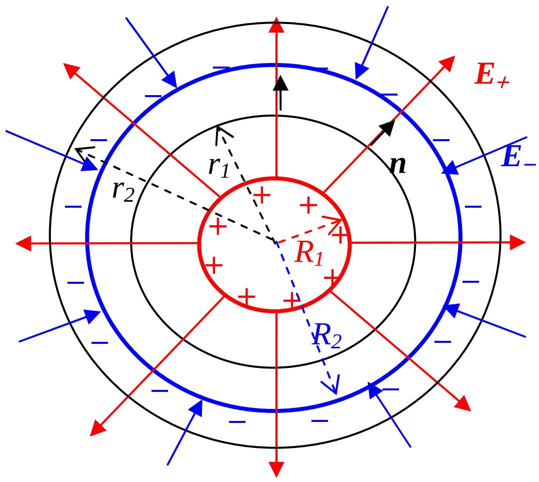
per $r>R \quad E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}$

Conclusione: Il campo nei punti a distanza dal centro $r \geq R$ è $\vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}\hat{r}$ ovvero uguale a quello che si otterrebbe concentrando tutta la carica nel centro della sfera. In particolare, se la sfera è conduttrice, per $r < R$, il campo è nullo.

4) Doppia distribuzione sferica superficiale di carica.

Consideriamo due sfere concentriche di raggio R_1 e R_2 e con carica $+q$ e $-q$ sulle rispettive superficie. Siamo ancora in una situazioni di simmetria sferica e valgono le considerazioni precedenti.

Scegliamo come superficie chiuse per calcolare il flusso due sfere di raggio r_1 ed r_2 concentriche con la sfera carica.



Per la sfera di raggio $R_1 < r_1 < R_2$, la situazione è assolutamente identica alla precedente e otteniamo un campo $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$

Per la sfera di raggio $r_2 > R_2$, precedendo come prima giungiamo a:

$$\Phi_E = \oint_{sfera2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E \cdot \left(4\pi r^2\right) = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \quad \text{dove } q_{int} = +q - q = 0 \Rightarrow E = 0$$

Conclusione: il campo nei punti a distanza dal centro $R_1 \le r \le R_2$ è $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$, mentre per per punti $r > R_2$ è uguale a zero.

In particolare, se la sfera interna è conduttrice, per $r < R$, il campo è ancora nullo e si ha la configurazione in figura.