Cenni sulla Gravitazione Universale

1) La forza gravitazionale

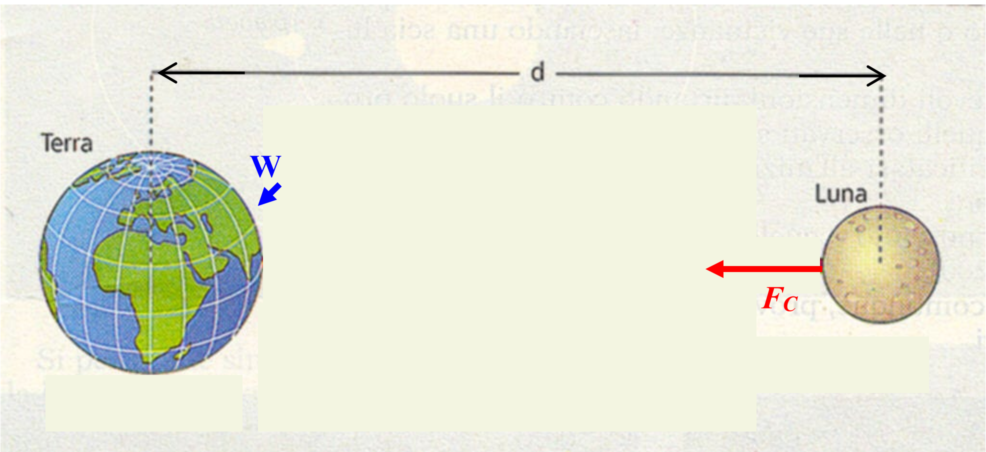
Fino al 1665 (anno in cui Netwon intuì la legge della Gravitazione Universale) per spiegare le interazione dei corpi con la Terra erano necessarie:

a) La forza peso $\vec{F}_P = m\vec{g}$ esercitata dalla Terra su una massa m che ne provoca il moto di caduta libera con accelerazione $g = 9{,}8\ m/s^2$,

b) La forza centripeta $\vec{F}_C$ di interazione fra la Luna e la Terra, che permette alla Luna di muoversi su un orbita quasi circolare intorno al centro della Terra, con una accelerazione centripeta $a_L = 0{,}0027\ m/s^2$.

Queste erano considerate forze diverse proprio a causa della diversa accelerazione imposta ai corpi, (infatti $g/a_L \approx 3600$), sebbene avessero:

a) la stessa direzione (radiale)
b) lo stesso verso (verso il centro della Terra).



Newton notò i seguenti fatti sperimentali:

1) detto R_T il raggio delle Terra e d il raggio dell'orbita della Luna intorno alla Terra, il rapporto $\dfrac{\frac{1}{R_T^2}}{\frac{1}{d^2}} \approx 3600$. Questo rende compatibile il rapporto fra le accelerazioni se si assume che l'intensità della forza diminuisca con la distanza r dalla Terra come $1/r^2$

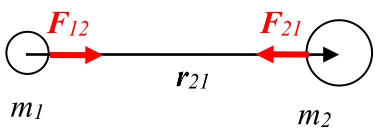
2) $\dfrac{F_P}{m} = \dfrac{mg}{m} = g = cost$ ovvero l'intensità della forza aumenta linearmente con la massa m sulla quale agisce.

Queste due condizioni sperimentali rendono $\vec{F}_P$ e $\vec{F}_C$ interpretabili con una sola forza $\vec{F}$ se questa ha una espressione $F \propto \frac{mM_T}{r^2}$ (M_T massa della Terra)

Si trova con esperienze di laboratorio e con osservazioni astronomiche che, date due masse m_1 ed m_2, con m_2 a distanza r_{21} da m_1, fra loro esiste una interazione detta **forza di gravitazione universale** calcolabile come:

$$\textbf{(1)} \quad \boxed{\vec{F}_{21} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{21}^2}\hat{r}_{21}} \quad \text{con} \quad \boxed{\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}}$$

G = 6,67·10^{-11} m^3/kgs^2 (costante di gravitazione universale).



Il segno meno indica che la forza è attrattiva. (per esempio, $\vec{F}_{21}$ opposta a $\hat{r}_{21}$).

2) **Accelerazione gravitazionale**.

Una massa m ad altezza h dalla superficie della terra (di massa M_T) risente della forza peso $F_1 = mg$ ovvero della forza gravitazionale $F_2 = G\frac{mM_T}{(R_T+h)^2}$, entrambe dirette secondo la verticale verso il centro della terra, ma:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_2 \Rightarrow mg = G\frac{mM_T}{(R_T+h)^2} \Rightarrow \text{essendo } R_T >> h,\;\; mg = G\frac{mM_T}{R_T{}^2} \;\; \Rightarrow \;\; \textbf{(2)} \quad \boxed{g = G\frac{M_T}{R_T{}^2}}$$

ossia il valore di g è determinato dal valore di G, R_T e M_T.

Questa interpretazione suggerisce che g debba variare con l'altezza dalla superficie terrestre ed infatti si trova sperimentalmente:

$h = 0,\;\; g = 9{,}806\ m/s^2$

$h = 4000\ m,\;\; g = 9{,}794\ m/s^2$

$h = 8000\ m,\;\; g = 9{,}782\ m/s^2$

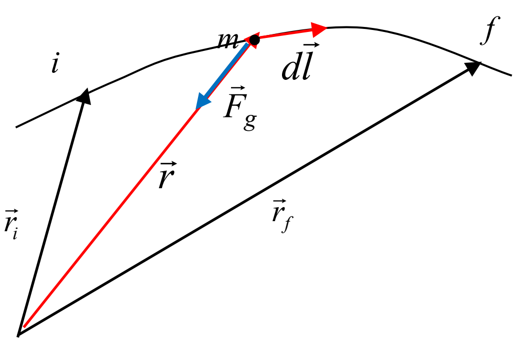
$h = 12000\ m,\;\; g = 9{,}757\ m/s^2$

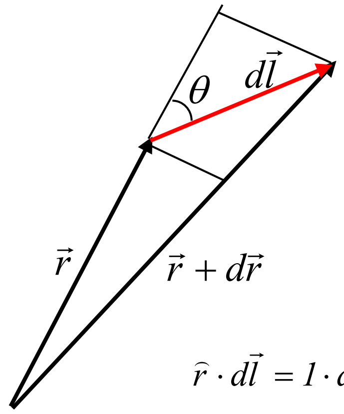
La formula (2) permette di calcolare l'accelerazione di gravità sulla superficie di un qualsiasi corpo celeste "sferico" di massa M_x e raggio R_x. Con l'opportuno valore della massa e dal raggio si ottiene per la Luna $g_L = 1{,}6\ m/s^2$, per Marte $g_M = 3{,}7\ m/s^2$, per Giove $g_G = 23{,}1\ m/s^2$ ecc…; valori tutti verificati sperimentalmente.

3) La forza gravitazionale è conservativa

Vogliamo calcolare il lavoro W_g fatto dalla forza gravitazionale $\vec{F}_g$ durante lo spostamento di una massa m, interagente con una massa M ferma, da una posizione iniziale $\vec{r}_i$ ad una finale $\vec{r}_f$ lungo una curva Γ.

$$\vec{F}_g = -G\frac{mM}{r^2}\hat{r}$$





$$\hat{r}\cdot d\vec{l} = 1\cdot dl\cdot \cos\theta = dr$$

$$W_{g,i\to f} = \int_i^f \vec{F}_g\cdot d\vec{l} = \int_i^f -G\frac{mM}{r^2}\hat{r}\cdot d\vec{l} = GmM\int_i^f -\frac{1}{r^2}\hat{r}\cdot d\vec{l} \Rightarrow$$

(3) $$W_{g,i\to f} = GmM\int_i^f -\frac{1}{r^2}dr = GmM\left[\frac{1}{r}\right]_i^f = GmM\left(\frac{1}{r_f}-\frac{1}{r_i}\right).$$

Quindi il lavoro W_g fatto dalla forza gravitazionale è indipendente dal percorso ma dipende solo dal punto iniziale ed dal punto finale: **la forza gravitazionale è conservativa.**

4) L' energia potenziale gravitazionale

Si può quindi definire (vedi eq. 6 della lezione "Energia Potenziale") una funzione energia potenziale gravitazionale $U_g = U$. Dalla (3) segue:

(4) $$\Delta U = -\int_i^f \vec{F}_g\cdot d\vec{l} = GmM\left(\frac{1}{r_i}-\frac{1}{r_f}\right)$$

La variazione di energia potenziale dipende unicamente dalla posizione del punto finale f e del punto iniziale i.

Poiché solo le differenze di energia potenziale hanno significato fisico, per semplificare le relazioni si conviene di scegliere il punto di riferimento all' infinito, $\vec{r}_{rif} = \infty$, ponendo $U_\infty(\vec{r}_{rif} = \infty) = 0$, dal fatto che per $r \to \infty$, $\frac{GmM}{r} = 0$. Risulta che masse molto distanti fra loro praticamente non interagiscono e quindi il contenuto di energia potenziale del sistema è nullo. Dalla (4) segue:

$$\Delta U = U_f - U_\infty = U_f - 0 = -\int_\infty^f \vec{F}_g \cdot d\vec{l} = -\frac{GmM}{r_f} \Rightarrow$$

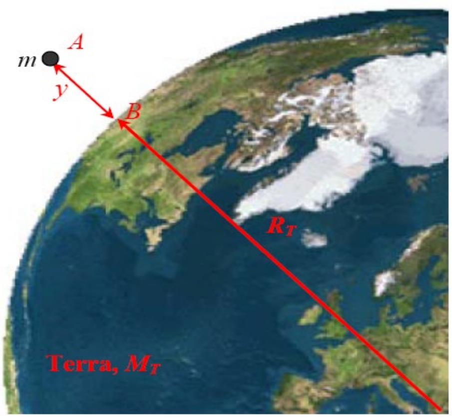
$$\textbf{(5)} \qquad \boxed{U(\vec{r}\,) = -\frac{GmM}{r}}$$

L'energia potenziale associata alla forza gravitazionale fra due massa interagenti m ed M è data dalla eq. **(5)**, posto che nel punto di riferimento (masse a distanza infinita) sia $U(r{=}\infty){=}0$. (Ricordarsi che $U(r)$ è sempre una differenza rispetto al punto di riferimento).

Significato: un sistema composto da due masse, m ed M, poste a distanza r, ha una energia potenziale che è il lavoro necessario alla forza gravitazionale per portare la massa m da posizione r all'∞ ovvero (vedi oss. 3, lezione "Energia Potenziale") il lavoro fatto da una forza applicata per portare la massa m, con velocità costante, dall'∞ in posizione r. Poiché la forza gravitazionale è attrattiva, il lavoro fatto dalla forza applicata è negativo ovvero l'energia potenziale è negativa (vedi eq. 5)

L'energia potenziale gravitazionale è posseduta da una massa in quanto occupa una posizione rispetto ad una massa interagente (energia associata alla configurazione del sistema).

Poichè $m\vec{g}$ è spiegabile in termini di forza gravitazionale, anche l'espressione dell'energia potenziale della forza peso $U(y) = mgy$ è compatibile con l'espressione della $U(r)$ della forza gravitazionale. Infatti:



$$U_A = -\frac{GmM_T}{(R_T + y)}; \qquad U_B = -\frac{GmM_T}{R_T}$$

$$U_A - U_B = -\frac{GmM_T}{(R_T + y)} + \frac{GmM_T}{R_T} =$$

$$= \frac{GmM_T(-R_T + R_T + y)}{R_T(R_T + y)} = \frac{GmM_T y}{R_T^2 + R_T y}$$

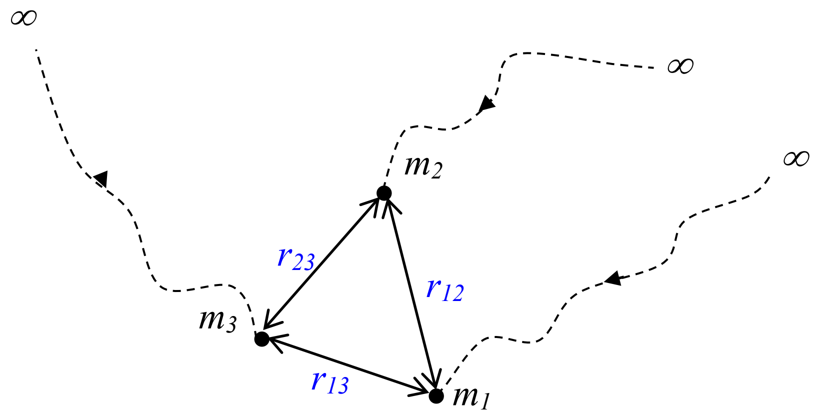
Se $y << R_T$, $R_T^2 >> R_T y \;\Rightarrow\; U_A - U_B = \dfrac{GmM_T y}{R_T^2} \Rightarrow U_A = U_B + m\left(\dfrac{GM_T}{R_T^2}\right)y$;

ricordando che $g = \dfrac{GM_T}{R_T^2}$ e posto $U_B = 0 \;\Rightarrow\; U_B = mgy$

Quindi, l'espressione mgy è compatibile con la (5) per $y<<R_T$, ma implica anche un cambio del punto di riferimento: da ∞ per la (5) alla superficie terrestre (punto B in fig.) per mgy.

5) L' energia di un sistema di masse.

Calcoliamo l'energia necessaria per costruire un sistema di più (3) masse, (m_1, m_2, m_3) portandole da ∞ a distanza reciproca r_{12} , r_{13} , r_{23} come in figura.



Per posizionare la prima massa m_1 il lavoro della forza applicata è nullo.

Per posizionare la seconda massa m_2, che interagisce ora con m_1, il lavoro fatto della forza applicata è $W_2 = \Delta U_1 = -\dfrac{Gm_1m_2}{r_{12}}$,

Per posizionare la terza massa m_3, che interagisce ora con m_1 e m_2, il lavoro della forza applicata è $W_3 = \Delta U_1 + \Delta U_2 = -\dfrac{Gm_1m_3}{r_{13}} - \dfrac{Gm_2m_3}{r_{23}}$.

Quindi l'energia posseduta del sistema U_{Tot} è pari al lavoro totale per costituirlo:

$$W_{Tot} = W_2 + W_3 \Rightarrow U_{Tot} = -G\left(\frac{m_1m_2}{r_{12}} + \frac{m_1m_3}{r_{13}} + \frac{m_2m_3}{r_{23}}\right) < 0$$

L'energia di un sistema di masse è negativa ossia per separare le masse è necessario compiere un lavoro esterno.

6) Cenni sulle orbite

Consideriamo un corpo di massa m avente velocità di modulo v in un punto a distanza r dal centro della Terra (di massa M_T). La sua energia meccanica sarà:

(6) $$E_M = K + U(r) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM_T}{r},$$

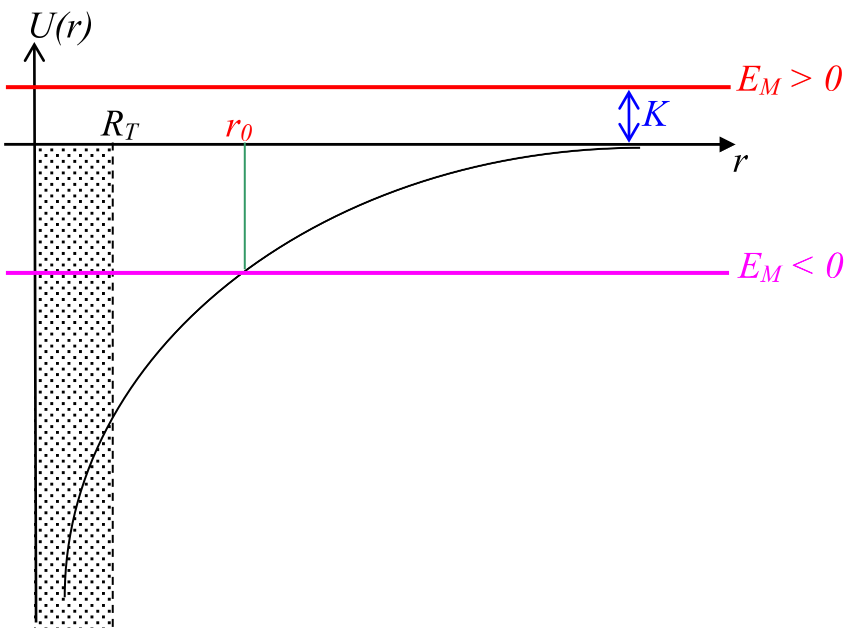
poiché $U(r) < 0$, possiamo avere:

a) $E_M > 0$,

b) $E_M < 0$

c) $E_M = 0$, come caso limite.

Discutiamo i tre casi, usando il grafico dell'energia potenziale gravitazionale:



Caso a) $E_M > 0$,

La massa m può raggiungere qualsiasi distanza dalla terra ($r>R_T$). Per r molto grande (al limite per $r \to \infty$) l'influenza della terra diviene trascurabile ($F_g \to 0$, $U(r) \to 0$) e la massa m si muoverà di moto rettilineo uniforme con energia $K = \frac{1}{2}mv_\ell^2$ ovvero $v_\ell = \sqrt{\frac{2K}{m}}$

Caso a) $E_M < 0$,

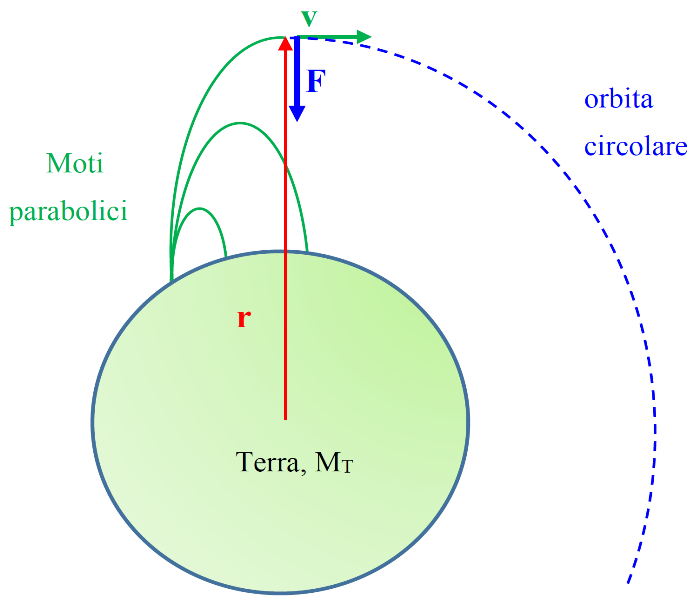
La massa m può trovarsi solo a distanza per cui $U(r) < E_M$ ovvero può raggiungere al più una distanza r_0. Il sistema è legato, la massa potrà eventualmente continuare a muoversi intorno alla terra mantenendo una posizione $R_T < r < r_0$ (stabilizzarsi in un'orbita).

Studiare la condizione e l'equazione delle orbite è complicato; qui limitiamoci ad intuire che se una massa *m* (satellite) è lanciata dalla superficie della terra con una velocità iniziale $\vec{v}$ inclinata rispetto all'orizzontale, il moto conseguente sarà un moto parabolico in cui, alla massima altezza, la velocità ha solo la componente parallela al suolo.

Nel punto di massima altezza, a distanza *r* dl centro della terra, la massa *m* ha quindi velocita $\vec{v}$ perpendicolare $\vec{F}_g$ (quindi non può cambiarne il modulo ma solo la direzione) e si verifica che

$$F_g = \frac{mv^2}{r}$$

la forza gravitazionale agisce da forza centripeta ed il moto della massa *m* diviene circolare uniforme intorno alla Terra con raggio $r = r_{orb}$..



Tale condizione si raggiunge quindi se:

$$G\frac{mM_T}{r_{orb}^2} = \frac{mv_{orb}^2}{r_{orb}} \Rightarrow G\frac{M_T}{r_{orb}} = v_{orb}^2 \Rightarrow v_{orb} = \sqrt{\frac{GM_T}{r_{orb}}} \quad \text{(indipendente dalla massa } m\text{)}$$

Per un'orbita circolare $K = \frac{1}{2}mv_{orb}^2 = \frac{1}{2}m\left(\sqrt{\frac{GM_T}{r_{orb}}}\right)^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{GM_T}{r_{orb}}\right) = \frac{1}{2}G\frac{mM_T}{r_{orb}}$;

sostituendo in (6)

$$E_T = K + U(r) = \frac{1}{2}G\frac{mM_T}{r_{orb}} - G\frac{mM_T}{r_{orb}} = -G\frac{mM_T}{2r_{orb}} = -K$$

In una orbita circolare, l'energia totale è uguale ma di segno opposto all' energia cinetica.

Una situazione più interessante è quella del satellite geostazionario ossia di un satellite che sempre rimane sopra lo stesso punto della Terra (sono comunemente usati per la trasmissione TV, radio, GPS). Questo è possibile solo se si è al di sopra di un punto sull'equatore.

Per rimanere sopra lo stesso punto della Terra mentre la Terra ruota, il satellite deve avere lo stesso periodo di rotazione della Terra ossia di 24 ore. Ciò impone un valore per la velocità che deve essere $v = 2\pi\, r_{orb}/T$ con $T = 24$ *ore* $=86400\ s$.

La condizione di orbita circolare diviene:

$$G\frac{M_T}{r_{orb}} = \frac{(2\pi r_{orb})^2}{T^2} \rightarrow r_{orb}^3 = G\frac{M_T T^2}{4\pi^2} \rightarrow \mathrm{r_{orb}} = 42300\ \mathrm{Km\ con}\ v = 3070\ \mathrm{m/s}$$

Caso a) $E_M = 0$,

Caso limite. La massa m può raggiungere qualsiasi distanza dalla terra ($r>R_T$) ma per r molto grande l'influenza della Terra diviene trascurabile e la massa m è "libera" ma con velocità nulla.

Questa condizione ci permette di introdurre il concetto di velocità di fuga, v_F: la minima velocità da imprimere ad un corpo sulla Terra per farlo allontanare definitivamente, al limite, con velocità finale nulla.

Per m sulla superficie terrestre, la (6) diviene $E_M = K + U(r) = \frac{1}{2}mv_F^2 - \frac{GmM_T}{R_T} = 0$ e ci permette di calcolare $v_F = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$.

(Questa formula con il corrispondente valore della massa e dal raggio vale per qualsiasi corpo celeste e si ha v_F = 11,2 km/s per la Terra, v_F = 2,38 km/s per la Luna, v_F = 59,5 km/s per Giove.)