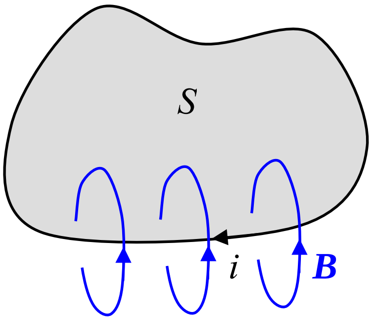
## Induttanza

Consideriamo una spira di area $S$ in cui scorre una corrente $i$. La corrente crea un campo magnetico $\vec{B}$ le cui linee di campo attraverseranno la superficie della S della spira.




E' perciò possibile calcolare un flusso concatenato con la spira: $\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ e poiché questo flusso è originato dalla corrente circolante nella spira stessa è detto **flusso autoindotto $\Phi_I$.**

$$\Phi_I = \Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} .$$

Ora $\Phi_I \propto \vec{B} \propto i \Rightarrow \Phi_I \propto i \Rightarrow \dfrac{\Phi_I}{i} = cost$

Tale rapporto è detto coefficiente di autoinduzione o semplicemente **induttanza $L$ della spira**:

$$L = \frac{\Phi_I}{i} = \frac{\text{flusso autoindotto nella spira}}{\text{corrente nella spira}} \qquad \left(\text{dimensioni}: \ \frac{T \cdot m^2}{A} = \frac{Wb}{A} = H \ \text{Henry}\right)$$

Si dimostra che $L$ dipende solo dalla geometria del sistema.

Verifichiamo questa affermazione per un solenoide con $n$ spire per unita di lunghezza, sezione $S$ e lunghezza $\ell$. Se il solenoide è percorso da corrente $i$, il flusso autoindotto con una spira è:

$$\Phi_{I,S} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B \cdot dS = \int_S \mu_0 nIdS = \mu_0 nI \int_S dS = \mu_0 nIS .$$

Il flusso autoindotto totale è $\Phi_{I,T} = N\Phi_{I,S}$ con $N$ numero totale di spire del solenoide $\Rightarrow N = n\ell$

$$L = \frac{Q_{I,T}}{i} = \frac{N\Phi_{I,S}}{i} = \frac{N\mu_0 nIS}{i} = \frac{n\ell\mu_0 nIS}{i} = \mu_0 n^2 \ell S \Rightarrow \text{dipende solo dalla geometria.}$$

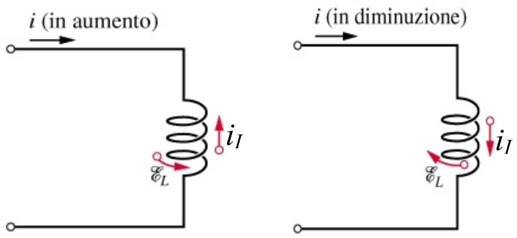
A un qualunque circuito in cui scorre corrente è sempre associabile una *L*; questa ha un valore tanto più grande quanto più sono gli avvolgimenti lungo il percorso della corrente (vedi $n^2$ per il solenoide).

Dato un circuito caratterizzato da un'induttanza *L*, se in esso scorre una corrente *i* il flusso concatenato è calcolabile come:

$\Phi_B = Li$, quindi se $i = i(t) \Rightarrow \Phi_B(t) = L\, i(t)$ e ricordando la legge di Faraday abbiamo

$$\varepsilon_I = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d(Li)}{dt} = -L\frac{di}{dt}.$$

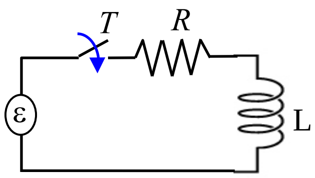
Se in un circuito circola una corrente variabile nel tempo, l'induttanza *L* fa sorgere in esso una forza elettromotrice $\varepsilon_I$ che si oppone alle variazioni della corrente pari a: $\varepsilon_I = -L\dfrac{di}{dt}$




La $\varepsilon_I$ si oppone alle variazioni di corrente nei circuiti pertanto quest'ultime non possono essere istantanee. Inoltre, se la corrente nel circuito rende a diminuire, l'induttanza fa circolare corrente nello stesso verso ( vedi fig.) e questi richiede energia disponibile. Queste ed altre osservazioni, suggeriscono che un'induttanza attraversata da corrente è sede di energia. Vediamo questo in dettaglio.

## Energia associata ad un'induttanza

Consideriamo il seguente circuito:




Quando chiudiamo l'interruttore *T*, la corrente passerà da un valore iniziale *0* ad un valore finale $I_0$ costante in un tempo $\Delta t$. (la corrente finale è $I_0 = \varepsilon/R$ dato che per I = costante, $\varepsilon_I = 0$)

Durante $\Delta t$, l'equazione del circuito è:

$$\varepsilon + \varepsilon_I = iR \Rightarrow \varepsilon - L\frac{di}{dt} = iR \Rightarrow \varepsilon = iR + L\frac{di}{dt}$$ moltiplicando entrambi i membri per $i$ otteniamo:

$$\varepsilon\, i = i^2 R + iL\frac{di}{dt}$$

a) $\varepsilon\, i$ è la potenza fornita dal generatore al circuito;
b) $i^2R$ è la potenza dissipata nella resistenza $R$,
c) $iL(di/dt)$, di conseguenza è un termine di potenza che, per la conservazione dell'energia, dobbiamo pensare immagazzinato in $L$.

Detta $U$ l'energia immagazzinata in $L$, per definizione di potenza:

$$\frac{dU}{dt} = iL\frac{di}{dt} \Rightarrow dU = iLdi$$

dove $dU$ è la variazione dell'energia immagazzinata in $L$ per un aumento della corrente $i$ di una quantità $di \Rightarrow$

l'energia totale $U$ immagazzinata nell'aumentare la corrente in $L$ da $0$ a $I_0$ è la somma di tanti contributi $dU \Rightarrow$

$$U = \int dU = \int_0^{I0} iLdi = L\int_0^{I0} idi = \frac{1}{2}LI_0^2$$

Quindi un induttanza $L$ attraversata da una corrente $i$ costante ha immagazzinata una energia $\frac{1}{2}Li^2$.

A cosa è associata questa energia?

Consideriamo un solenoide con $n$ spire per unita di lunghezza, sezione $S$ e lunghezza $\ell$ percorso da corrente $i$, abbiamo:

$$B = \mu_0 ni \Rightarrow i = \frac{B}{\mu_0 n} \quad \text{quindi} \quad U = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}(\mu_0 n^2 \ell S)\left(\frac{B}{\mu_0 n}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}(\ell S)$$

$\ell S = Vol$ è il volume interno al solenoide ovvero l'unica regione di spazio in cui si è creato un campo B quindi possiamo definire una densità $u_B$ di energia associabile al campo B.

$$u_B = \frac{U}{Vol} = \frac{(B^2/2\mu_0)(\ell S)}{\ell S} = \frac{B^2}{2\mu_0} \Rightarrow u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Abbiamo ottenuto questa relazione per un solenoide, ma essere è di validità generale:
una regione di spazio dove è presente un campo B ha una densità di energia $u_B$.

Questa energia è stata depositata nello spazio quando abbiamo prodotto le correnti che hanno generato il campo B.