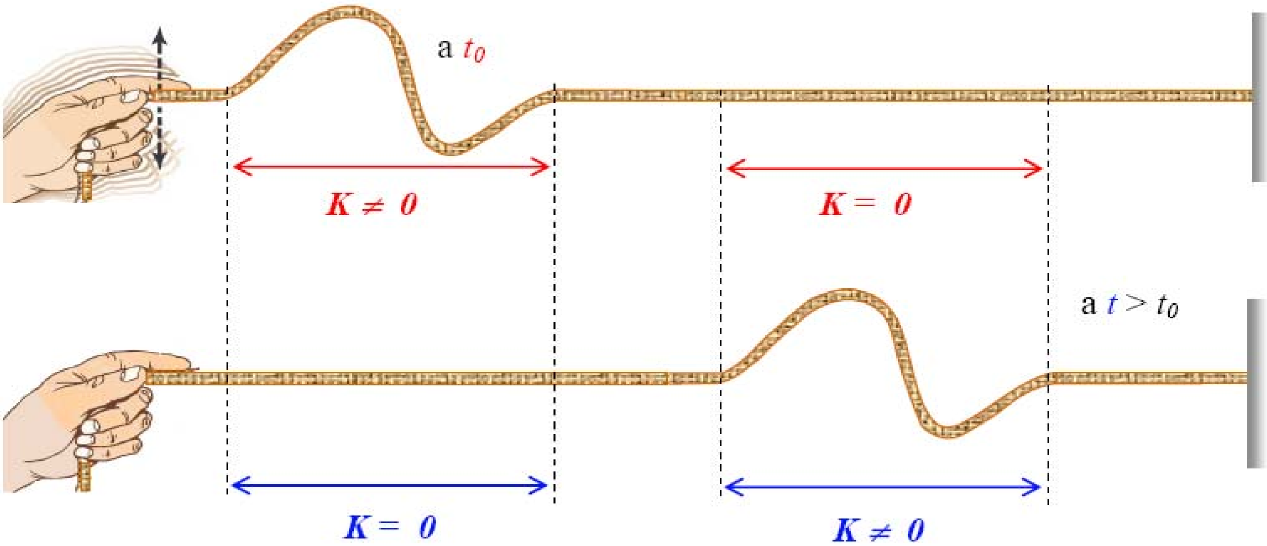
Fenomeni ondulatori

1) Generalità

Muovendo una estremità di una corda tesa, provochiamo una perturbazione nella corda che si muove lungo la corda stessa. Le parti di corda dove vi è la perturbazione si muovono rispetto alla posizione di equilibrio e pertanto posseggono una quantità di energia cinetica K, che a tempi successivi troviamo associata ad altre parti della corda. Dopo il passaggio della perturbazione, il mezzo resta inalterato.



Analogamente, un sassolino lasciato cadere su una superficie d'acqua in quiete provoca delle increspature della superficie che viaggiano e si allontanano dal punto in cui il sassolino è caduto. L'energia cinetica posseduta dal sassolino appena prima di colpire la superficie dell'acqua viene (parzialmente) trasportata dall'increspature in punti più lontani, senza trasporto del mezzo. Infatti, un eventuale piccolo oggetto galleggiante presente sulla superficie, viene spostato dalle increspature (ovvero acquista momentaneamente energia) ma dopo il passaggio della perturbazione, esso ritorna in quiete esattamente nella stessa posizione iniziale.

Diremo, in entrambi i casi, che abbiamo generato ***un' onda meccanica***.

Possiamo definire ***un'onda meccanica*** come una perturbazione che si propaga nello spazio, trasportando energia ma senza che vi sia trasporto di materia.

Un’onda meccanica può propagarsi solo grazie alle proprietà elastiche del mezzo materiale in cui ha origine. Al passaggio della perturbazione la materia subisce una deformazione elastica: le particelle che costituiscono il mezzo materiale si spostano rispetto alla loro posizione di riposo e vi ritornano successivamente grazie alle forze elastiche di richiamo. Con questo meccanismo, l'energia meccanica (cinetica e potenziale elastica) di un elemento di massa viene trasmessa a quello adiacente. In questo modo le onde trasportano energia meccanica attraverso la materia. Per tale motivo le onde meccaniche sono anche dette ***onde elastiche.***

Per formare un'onda elastica servono:

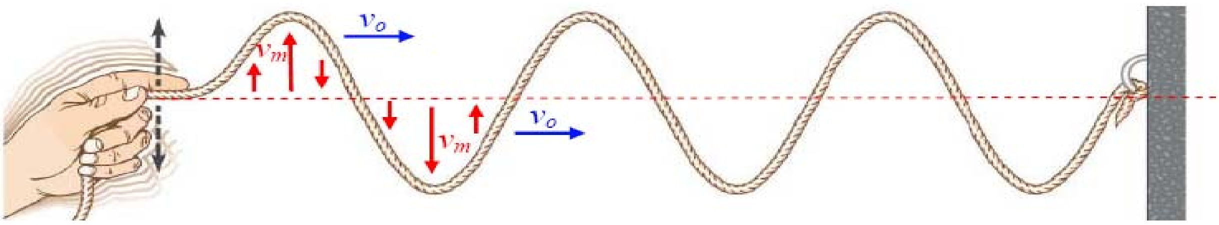
- una sorgente della perturbazione (ovvero di energia),
- un mezzo che subisca la perturbazione,
- una connessione (ovvero una forza elastica) tra la materia perturbata e quella adiacente.

Se la perturbazione è un solo impulso, si genera una singola onda ovvero *un’onda impulsiva*, se la perturbazione è periodica si genera un treno d’onde periodico o semplicemente *un’onda periodica*.

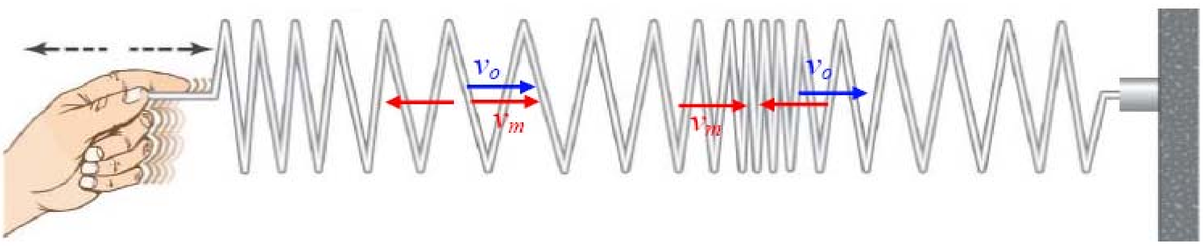
Le onde che si propagano in una sola dimensione, come in una corda tesa o in una molla elicoidale, sono dette *onde unidimensionali,* quelle che si propagano in un piano, come le onde su una superficie di acqua in quiete al cadere di un sassolino, sono dette *bidimensionali*, quelle che si propagano nello spazio sono dette *tridimensionali*.

Dobbiamo porre attenzione al fatto che durante la propagazione di un’onda abbiamo due moti distinti: il moto di oscillazione delle particelle del mezzo intorno alla posizione di equilibrio con velocità $v_m(t)$, il moto della perturbazione (dell’onda) nel suo insieme con velocità v_o. Il confronto fra i due moti permette di classificare le onde.

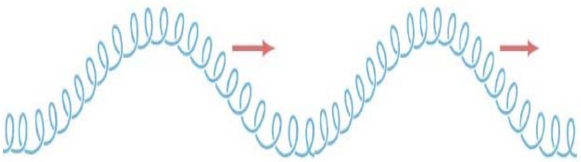
Se le particelle del mezzo oscillano, sollecitate dalla perturbazione, perpendicolarmente alla direzione di propagazione dell’onda si parla di ***onda trasversale***.



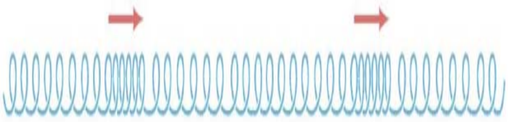
Se le particelle del mezzo oscillano nella stessa direzione lungo la quale si propaga l’onda, questa è detta ***onda longitudinale***. Le spire della molla si allontanano e si avvicinano, mentre l’onda si propaga.



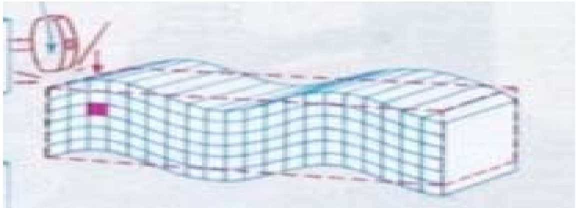
Nello stesso mezzo possiamo produrre un'onda trasversale o longitudinale in relazione al tipo di perturbazione imposta al mezzo.



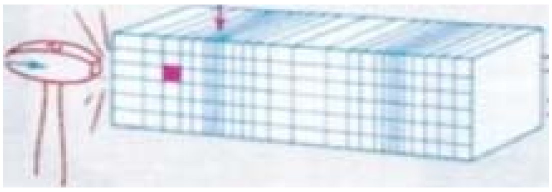
Onda trasversale in una molla elicoidale sollecitata trasversalmente



Onda longitudinale in una molla elicoidale sollecitata longitudinalmente

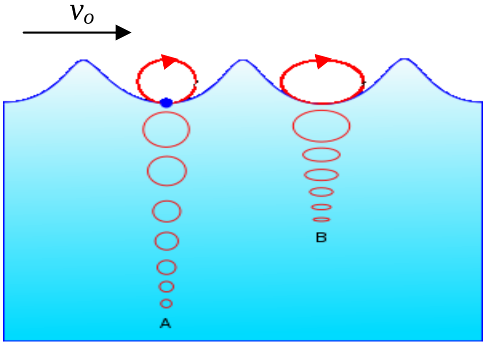


Onda trasversale in una barretta sollecitata trasversalmente



Onda longitudinale in una barretta sollecitata longitudinalmente

Alcune onde non sono né puramente trasversali né puramente longitudinali come nella propagazione di onde su una superficie di acqua dove le particelle del mezzo si muovono descrivendo delle ellissi (vedi fig.).



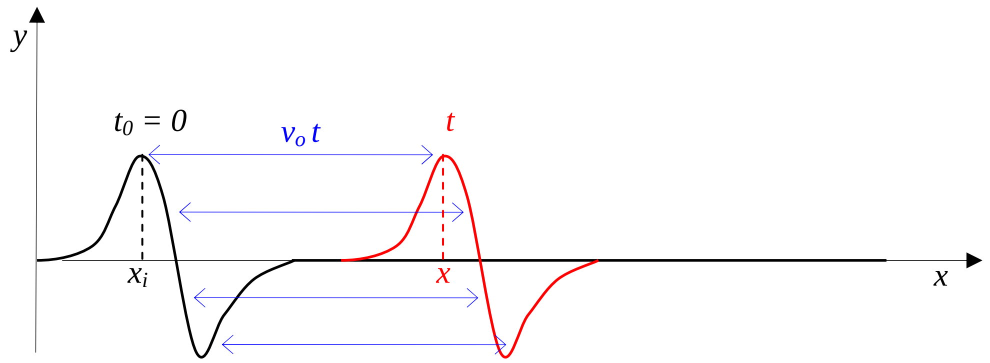
Per completezza, dobbiamo dire che ci sono anche delle onde che hanno alla base una variazione di un campo elettrico e di un campo magnetico (come la luce e le onde radio) che per esistere e propagarsi non richiedono la presenza di un mezzo materiale. Esse sono dette ***onde elettromagnetiche*** e si propagano anche nel vuoto. Le onde elettromagnetiche saranno descritte in seguito.

2) Descrizione matematica di un'onda unidimensionale

Osservando la propagazione di una perturbazione unidimensionale in un mezzo elastico, in cui le perdite di energia per attrito sono trascurabili, si riscontrano due fatti sperimentali:

- la perturbazione si propaga mantenendo inalterata la sua forma,
- la velocità v_o con cui essa si propaga è costante.

Consideriamo di aver provocato a $t_0 = 0$, intorno ad $x_i = 0$ una perturbazione di forma $y = f(x)$ che si sposta nella direzione di x positiva con velocità v_o. Dopo un tempo $\Delta t = t - t_0 = t - 0 = t$, tutti i punti della perturbazione si saranno spostati di $v_o \Delta t = v_o t$, la perturbazione si troverà nel punto $x = x_i + v_o t$ e avrà la stessa forma $\Rightarrow$ $\boldsymbol{y = f(x_i) = f(x - v_o t)}$.
Infatti: $f(x - v_0 t) = f(x_i + v_o t - v_o t) = f(x_i)$.

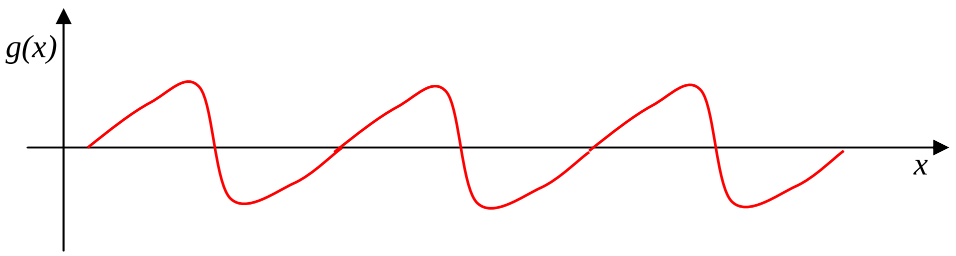


In conclusione: un'onda unidimensionale y che si propaga con velocità v_o nella direzione x positiva è matematicamente descritta da una funzione nelle variabili x e t nella combinazione $x - v_o t$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{y(x,t) = f(x - v_o t)}$

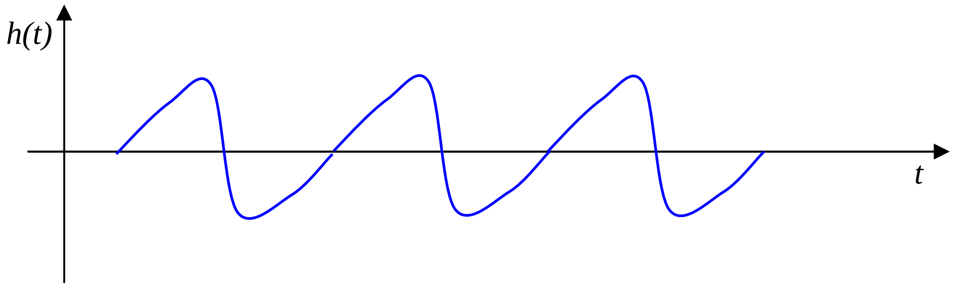
Le stesse considerazioni valgono per onde periodiche unidimensionali $y(x,t)$ dove f sarà una funzione periodica di $x - v_o t$.

Essendo un'onda un fenomeno di propagazione nel tempo e nello spazio, possiamo averne due visualizzazioni:

a) a tempo fissato: per $t = cost \Rightarrow y(x,t) = g(x)$. Essa è l'andamento dei valori di y in ogni punto dello spazio x in cui si propaga l'onda ma ad un tempo fissato (foto del fenomeno ondulatorio)



b) a posizione fissata: per $x = cost \Rightarrow y(x,t) = h(t)$. Essa è l'andamento dei valori di y in funzione del tempo di un punto fissato dello spazio in cui si propaga l'onda (moto di un punto del mezzo disturbato dall'onda)



3) Equazione delle onde sinusoidali

Sfruttando *il teorema di Fourier* che afferma che una qualsiasi funzione periodica *g(t)* può essere ottenuta mediante la somma di un termine costante e di infinite funzioni sinusoidali, le cui frequenze sono multipli interi di quella del segnale $f_0=\omega_0/2\pi$, ossia:

$$g(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n sen(n\omega_0 t + \varphi_n) = A_0 + A_1 sen(\omega_0 t + \varphi_1) + A_2 sen(2\omega_0 t + \varphi_2) + ...$$

limiteremo il nostro studio alle onde sinusoidali ovvero alle onde in cui $f \equiv sen$ che scriveremo come;

3.1) $y(x,t) = y_m sen\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - v_0 t)\right)$ con:

- λ grandezza avente dimensioni di una lunghezza (*m*) introdotta per rendere adimensionale l'argomento della funzione *sen*. Essa è detta ***lunghezza d'onda***.
- y_m grandezza delle stesse dimensioni di y, introdotta per poter avere per *y(x,t)* un intervallo di valori diverso da ±1. La quantità y_m è detta ***ampiezza dell'onda*.**

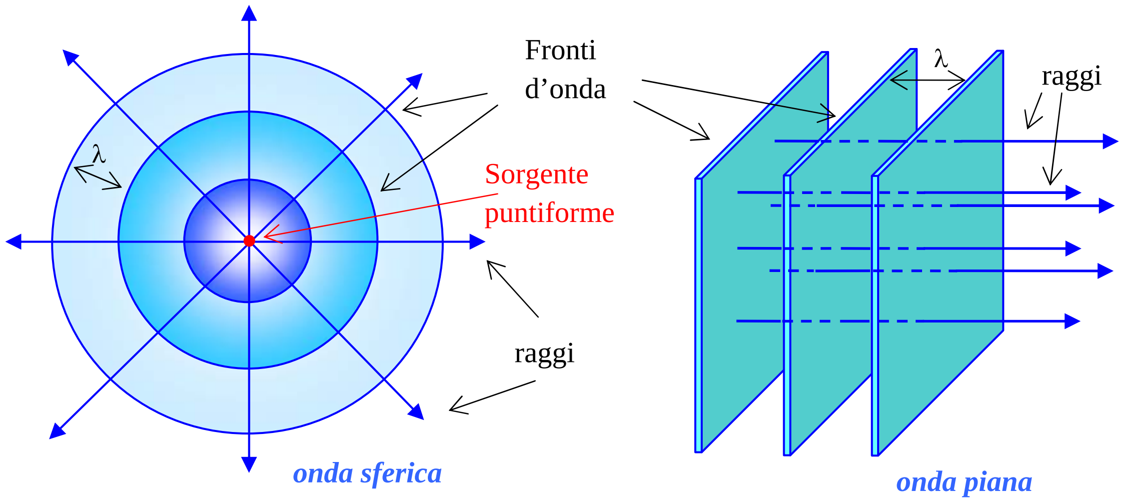
Posto $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ (***numero d'onda***, in m^{-1}) e $\omega = \frac{2\pi v_0}{\lambda}$ (***pulsazione,*** in s^{-1}) la (1) diviene:

3.2) $y(x,t) = y_m sen(kx - \omega t)$

La quantità $kx - \omega t$ è detta ***fase dell'onda*.**

Per completezza, dovremmo scrivere $y(x,t) = y_m sen(kx - \omega t + \phi)$ con ϕ (detta fase iniziale) che specifica la condizione iniziale dell'onda ovvero $y(x=0, t=0) = y_m sen(\phi)$.

Nello spazio investito da un'onda tridimensionale, l'insieme dei punti in cui l'onda ha la stessa fase costituisce il cosiddetto ***fronte d'onda*.** Se il mezzo è omogeneo ed isotropo, il fronte d'onda è sempre perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda che viene talvolta detta *raggio.* I fronti d'onda possono avere forme diverse: se essi sono dei piani paralleli parleremo di *onde piane*, se sono delle sfere concentriche parleremo di *onde sferiche*. Le onde piane hanno ampiezza costante e la loro espressione matematica è ancora la 3.2. Nelle onde sferiche, come vedremo in seguito, l'ampiezza invece diminuisce con la distanza dalla sorgente. Le onde piane sono in effetti solo un'approssimazione delle onde sferiche che, a grandi distanze dalla sorgente, possono essere considerate piane per una limitata regione di spazio.



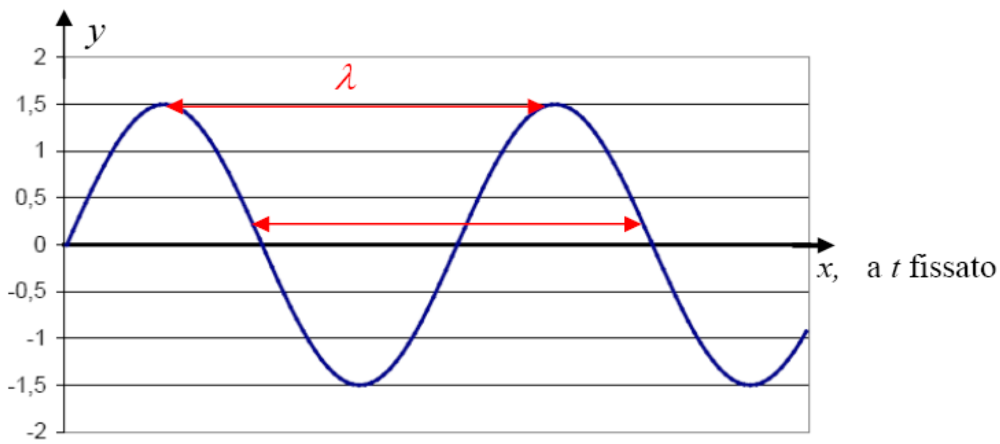
3.1) Significato di λ

Vediamo la condizione dell'onda in un punto x_2 che dista λ da un punto x_1 tale che $x_2 = x_1 + \lambda$

$$y(x_2,t) = y_m sen(kx_2 - \omega t) = y_m sen(k(x_1 + \lambda) - \omega t) = y_m sen(kx_1 + k\lambda - \omega t)$$

$$= y_m sen\left(kx_1 + \frac{2\pi}{\lambda}\lambda - \omega t\right) = y_m sen(kx_1 + 2\pi - \omega t) = y_m sen(kx_1 - \omega t) = y(x_1,t)$$

quindi per $x_2 = x_1 + \lambda \Rightarrow y(x_2,t) = y(x_1,t)$ ossia dopo un tratto lungo λ l'onda si ripete uguale a se stessa, allo stesso istante.



3.2) Significato di ω

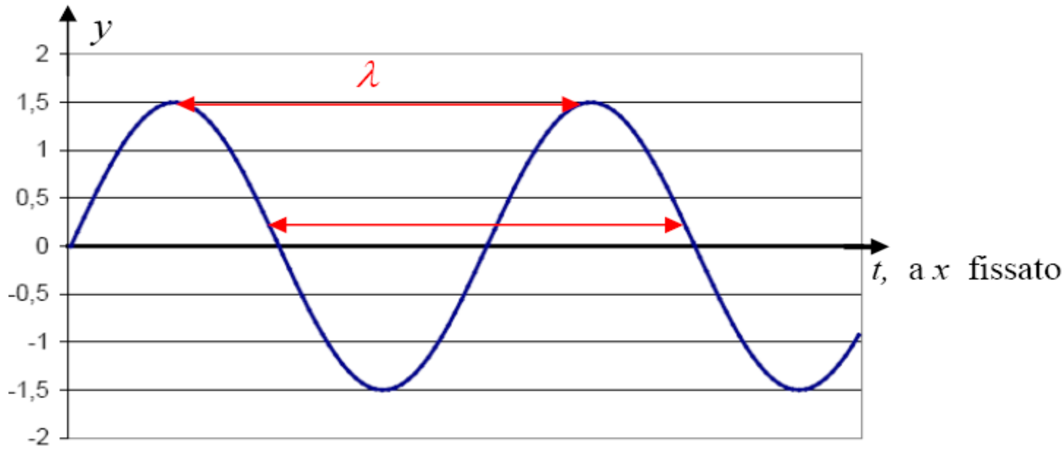
Indichiamo con T il tempo necessario all'onda per percorrere un tratto $\lambda \Rightarrow T = \dfrac{\lambda}{v_0}$ e valutiamo la condizione dell'onda ad un istante t_2 successivo di T rispetto ad un istante t_1 tale che $t_2 = t_1 + T$

$$y(x,t_2) = y_m sen(kx - \omega t_2) = y_m sen(kx - \omega(t_1 + T)) = y_m sen(kx - \omega t_1 - \omega T) =$$

$$= y_m sen\left(kx - \omega t_1 - \frac{2\pi v_0}{\lambda}\frac{\lambda}{v_0}\right) = y_m sen(kx - \omega t_1 - 2\pi) = y_m sen(kx - \omega t_1) = y(x,t_1)$$

quindi per $t_2 = t_1 + T \Rightarrow y(x,t_2) = y(x,t_1)$ ossia dopo un tempo T l'onda si ripete uguale a se stessa, nello stesso punto. *(T* è detto ***periodo dell'onda)***.

Possiamo porre $f = \dfrac{1}{T}$ (detta ***frequenza dell'onda)*** e risulta $\omega = \dfrac{2\pi v_0}{\lambda} = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f$

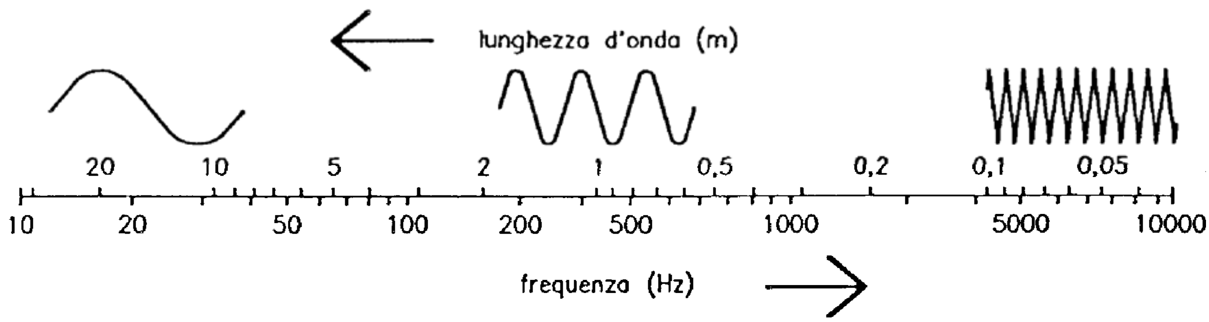


4) Velocità delle onde.

Da quanto detto un'onda sinusoidale risulta avere una periodicità nello spazio, individuata dalla lunghezza d'onda λ e una periodicità nel tempo individuata dal periodo T, ma queste due periodicità non sono indipendenti. Infatti:

$$T = \frac{\lambda}{v_o} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{\lambda}{v_o} \Rightarrow \quad \boxed{v_o = \lambda f} \qquad (3)$$

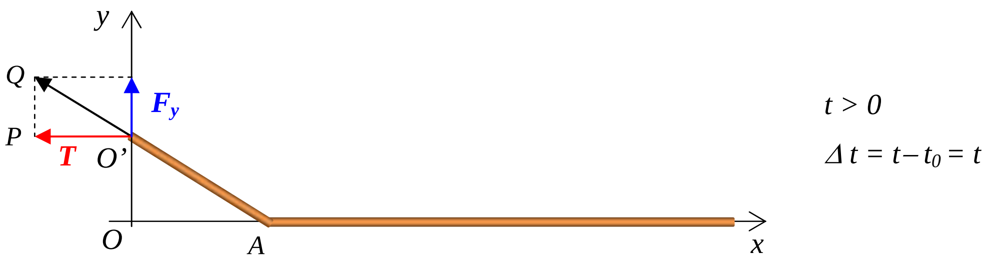
ossia un'onda che si propaga con velocità v_o non può avere una qualsiasi λ e una qualsiasi f ma scelta una l'altra resta imprescindibilmente fissata dalla relazione 3; all'aumentare della frequenza si riduce la lunghezza d'onda della perturbazione.



Inoltre, come vedremo di seguito la velocità di propagazione di un'onda v_o è fissata dal mezzo in cui l'onda si propaga. Di conseguenza, volendo creare un'onda in un mezzo, l'unica cosa che possiamo determinare arbitrariamente è o solo λ o solo f.

5) Velocità delle onde trasversali.

Supponiamo di creare un'onda trasversale in una corda, di densità lineare di massa μ, tesa con una tensione T. Facendo coincidere la direzione dell'asse x con la corda, la perturbazione iniziale sarà un movimento lungo l'asse y provocato da una forza applicata F_y.



L'estremità O della corda sollecitata da F_y si innalza di un tratto $\overline{OO'} = v_m \Delta t = v_m t$ con v_m velocità con cui si muove verticalmente l'elemento di corda. Nello stesso tempo l'onda progredisce di un tratto $\overline{OA} = v_o \Delta t = v_o t$ con v_o velocità dell'onda. Si assume che $\Delta t \to 0$, in modo che i tratti $\overline{AO}, \overline{OO'}$ e $\overline{AO'}$ siano piccolissimi e che valga $\overline{AO'} \approx \overline{AO}$.

Per la similitudine dei triangoli QPO' e O'OA abbiamo:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OO'}} = \frac{T}{F_y} \Rightarrow \frac{v_o t}{v_m t} = \frac{T}{F_y} \Rightarrow \frac{v_o}{v_m} = \frac{T}{F_y} \Rightarrow F_y = T\frac{v_m}{v_o}.$$

Usando la seconda legge della dinamica in termini di variazione della quantità di moto, possiamo scrivere:

$$F_y = \frac{\Delta P}{\Delta t} \Rightarrow \Delta P = F_y \Delta t \Rightarrow \Delta P = T\frac{v_m}{v_o}t \quad (*)$$

ΔP è la quantità di moto acquistata dal tratto di corda $\overline{AO'}$. Nella condizione che $\overline{AO'} \approx \overline{AO}$, si ha che la massa m della corda in moto può essere scritta $m = \mu\overline{OA} = \mu\, v_o t$.

$$\Delta P = m\Delta v = m(v_{fin} - v_{iniz}) = m(v_m - 0) = m v_m = \mu\, v_o t\, v_m$$

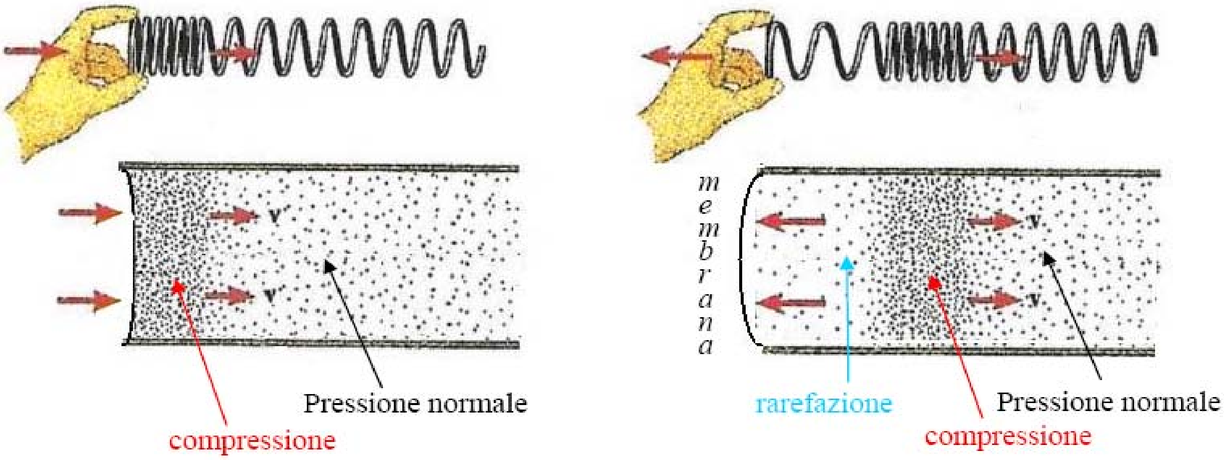
Sostituendo in (*) abbiamo: $T\,\frac{v_m}{v_o}\,t = \mu\, v_o t\, v_m \Rightarrow T = \mu\, v_o^2 \Rightarrow$

$$v_o = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

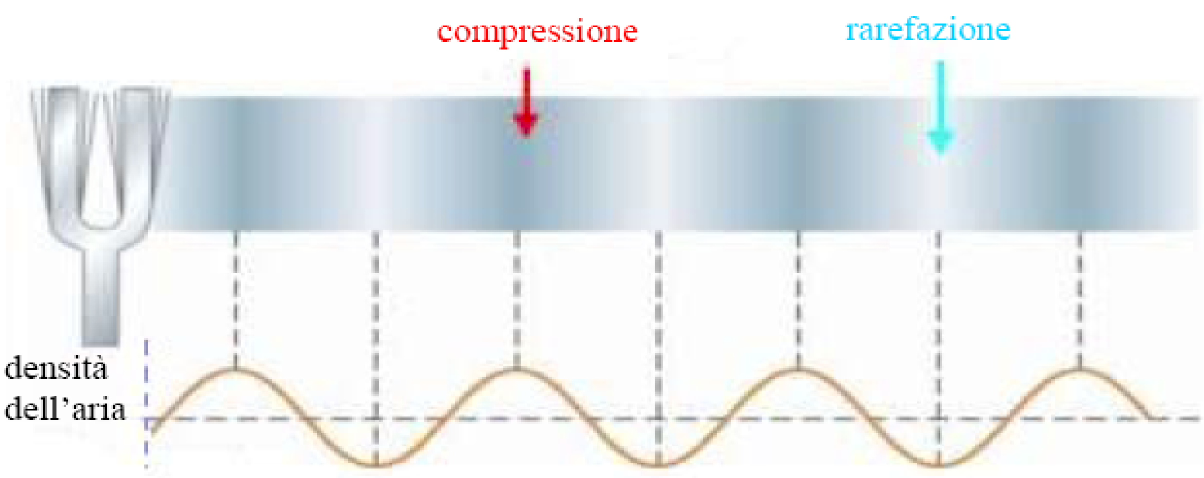
La velocità dell'onda trasversale dipende solo dal mezzo in cui si propaga ovvero è fissata dalla densità lineare di massa μ (proprietà inerziale) e dalla tensione T a cui è tesa la coda (proprietà elastica).

6) Onde longitudinali: il suono

Ogni volta che un oggetto vibra in aria produce delle onde longitudinali. Tali vibrazioni, alternativamente, avvicinano o allontanano le molecole di aria che si trovano in loro prossimità generando delle zone di compressione o di rarefazione dell'aria che si propagano: le molecole di aria compresse spingono altre attigue lasciando dietro di sé zone di rarefazione.



Queste vibrazioni vengono, per un ampio intervallo di frequenze e di energia trasportata, percepite dall'orecchio come "*suono*" quindi il suono è un'onda longitudinale che nasce con delle vibrazioni nell'aria,(ma anche in liquidi e solidi) come quelle prodotte dalle corde di una chitarra, dalle corde vocali o dai coni degli altoparlanti.



Come per le onde trasversali, anche qui la velocità di propagazione è fissata dal mezzo ed è determinata dalla proprietà elastica e dalla proprietà inerziale del mezzo:

$$v_0 = \sqrt{\frac{proprietà\ \ elastica}{proprietà\ \ inerziale}} = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \qquad \textbf{(4)}$$

La proprietà elastica viene espressa dal ***coefficiente di comprimibilità B*** del mezzo.

Considerando un volume V_0 di un materiale, se conseguentemente alla variazione di pressione Δp su esso si ha una variazione ΔV di V_0 a temperatura costante, B è cosi definito:

$$B = -\frac{\Delta p}{\frac{\Delta V}{V_0}} \quad \text{in } N/m^2$$

Il segno − permette di avere $B > 0$ in quanto Δp e ΔV hanno sempre segno opposto fra loro.

B rappresenta la facilità di compressione di un corpo sottoposto a degli sforzi normali: se è numericamente piccolo il mezzo si comprimerà facilmente, viceversa se B è numericamente grande.

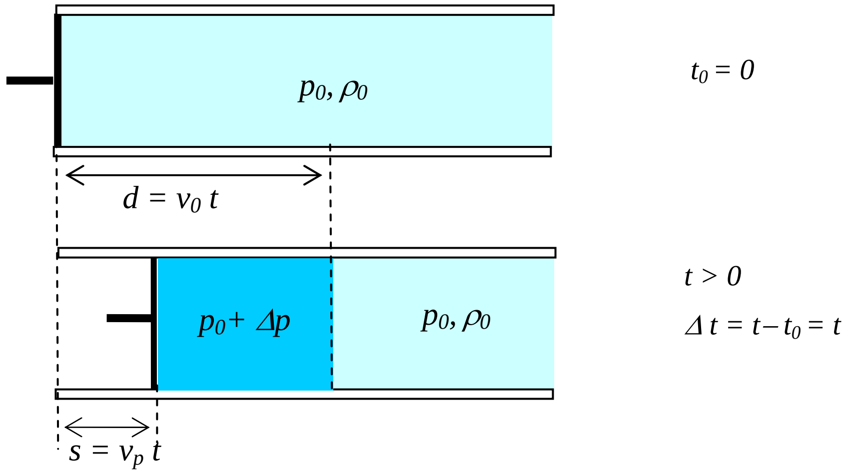
La proprietà inerziale è la densità volumetrica ρ del mezzo.

La reazione 4 permette di calcolare la ***velocità del suono*** in un mezzo; di seguito il valore della velocità del suono in alcuni mezzi:

materiale	Velocità del suono (m/s)
Aria (a T = 0° C)	331
Aria (a T = 25° C)	343
Acqua distillata (a T = 25° C)	1486
Acqua di mare (a T = 25° C)	1520
Rame	3800
Acciaio	5000-7000

6.1) Velocità delle onde longitudinali.

Dobbiamo ora dimostrare la relazione (4). Supponiamo di creare una perturbazione in un tubo cilindrico di sezione A contenente un fluido di densità ρ_0 a pressione p_0. Il tubo è chiuso ad una estremità da un pistone a tenuta che può muoversi senza attrito. Muovendo il pistone con velocità costante v_p, creiamo una perturbazione (un'onda longitudinale) che si muoverà parallelamente al pistone con velocità v_o. Si assume che sia $v_p < v_o$.



Il pistone si muove di un tratto $s = v_p \Delta t = v_p t$ comprimendo il fluido**.** Nella zona dove il fluido è compresso si ha un aumento di pressione Δp. Nello stesso tempo, l'onda progredisce di un tratto $d = v_o \Delta t = v_o t$. I punti della zona di transizione fra il fluido compresso e non compresso (ovvero il fronte d'onda) non sono in equilibrio in quanto su essi è applicata una forza F non nulla, infatti: $F = (p_0 + \Delta p)A - p_0 A = \Delta p A$. **(*)**

Usando la seconda legge della dinamica in termini di variazione della quantità di moto possiamo scrivere:

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} \Rightarrow F\Delta t = M\Delta v \Rightarrow Ft = M\Delta v \quad \textbf{(**)} \text{ con:}$$

- M la massa posta in movimento dal pistone $\Rightarrow M = V\rho = Ad\rho = Av_o t\rho$
- Δv la variazione di velocità di $M \Rightarrow \Delta v = (v_{fin} - v_{iniz}) = v_p - 0 = v_p$.

Segue, usando (**) e (*): $\Delta pA\, t = Av_o t\rho\, v_p \Rightarrow \Delta p = \rho\, v_o v_p$.

Introduciamo il coefficiente di comprimibilità B e osserviamo che in questo caso:

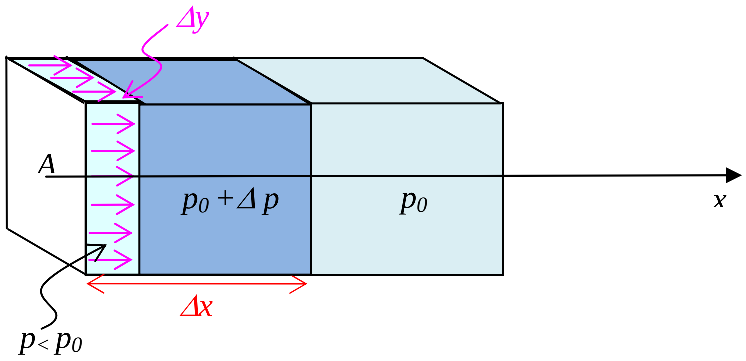
- $V_0 = Ad = A\, v_o\, t$,
- $\Delta V = -As = -Av_p\, t \Rightarrow$

$$B = -\frac{\Delta p}{\frac{\Delta V}{V_0}} = -\frac{\rho\, v_o v_p}{\frac{-Av_p t}{Av_o t}} \Rightarrow B = \rho v_o^2 \Rightarrow \quad \boxed{v_o = \sqrt{\frac{B}{\rho}}}$$

7) Onde di pressione.

Le onde longitudinali possono essere interpretate anche come onde di pressione.

Consideriamo un'onda piana longitudinale $y(x,t) = y_m\, sen(kx-\omega t)$. Mentre l'onda si propaga verso x positivo di un tratto Δx, le molecole di fluido della superficie A si muovono nella stessa direzione di un tratto Δy costringendo le molecole vicine in uno spazio minore in cui di conseguenza aumenta la pressione a $p_0 + \Delta p$.



Considerato un volume di riferimento V_0 (= $A\Delta x$), che subisce un aumento di pressione Δp con conseguente variazione di volume $\Delta V = A\Delta y$, abbiamo $\Rightarrow$

$$B = -\frac{\Delta p}{\frac{\Delta V}{V_0}} \Rightarrow \Delta p = -B\frac{\Delta V}{V_0} = -B\frac{A\Delta y}{A\Delta x} = -B\frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \Delta p = -B\frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (*)$$

(il segno – testimonia che il volume diminuisce all'aumentare della pressione)

Per essere precisi, Δx deve essere piccolissimo ($\Delta x \to 0$) ed in tal caso $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ può essere ricavato derivando, rispetto ad x, l'espressione dell'onda:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{\partial}{\partial x}\left(y_m sen(kx-\omega t)\right) = y_m k\, cos(kx-\omega t)$ che sostituito in (*) porta a:

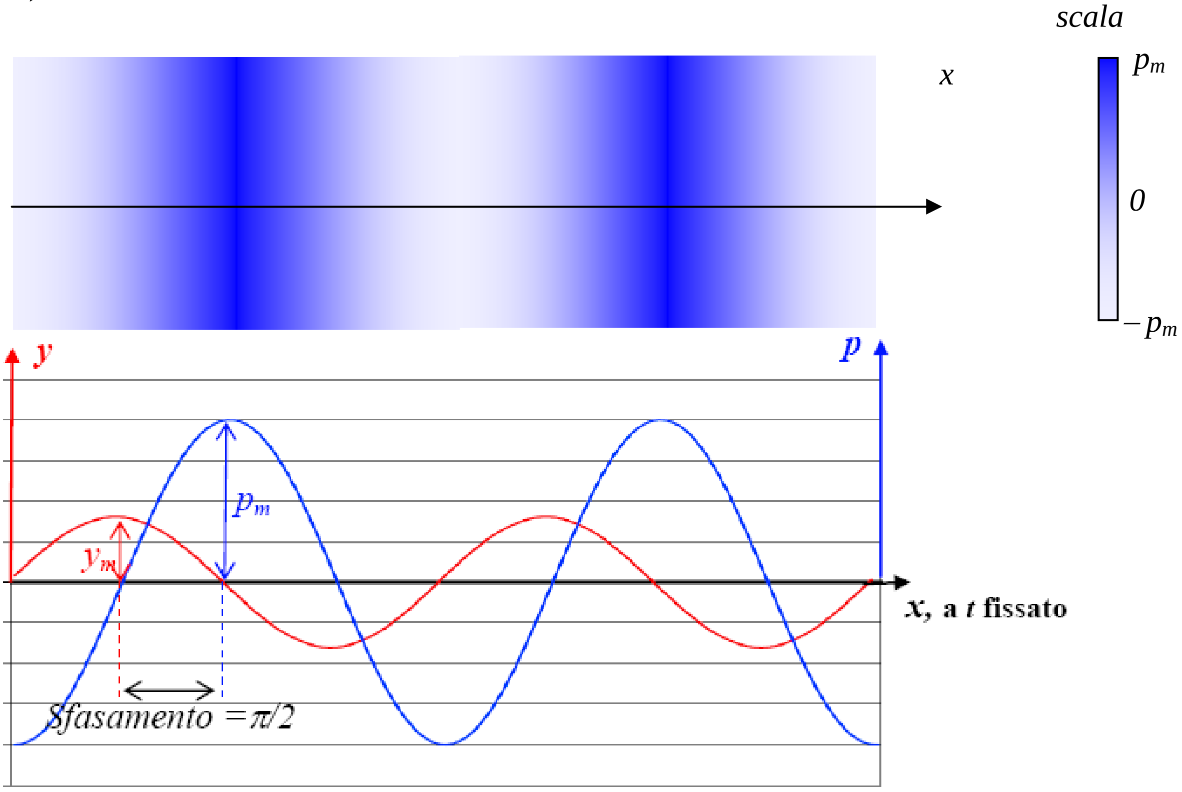
(7.1) $$\Delta p = -By_m k\, cos(kx-\omega t)$$

Il termine By_mk è una pressione (infatti $\frac{N}{m^2}m\frac{1}{m} = \frac{N}{m^2}$) e poniamo $p_m = By_mk$. Esso rappresenta il massimo valore raggiunto dalla pressione relativa nel mezzo in cui si propaga l'onda (ampiezza di pressione). Se conveniamo di indicare Δp con p ovvero la pressione relativa nel mezzo in cui si propaga l'onda possiamo scrivere:

(7.2) $p(x,t) = -p_m\, cos\,(kx-\omega t) = p_m\, sen\,(kx-\omega t - \pi/2)$ ossia un'onda di pressione.

Si nota che l'onda di pressione, rispetto all'onda di spostamento :

1) ha la stessa λ (e la stessa f)
2) è sfasata di $\pi/2$.



(osservazione: da $v_o = \sqrt{\dfrac{B}{\rho}}$ e $p_m = B y_m k$ segue: **(7.3)** $p_m = v_o^2 \rho \, y_m k$).

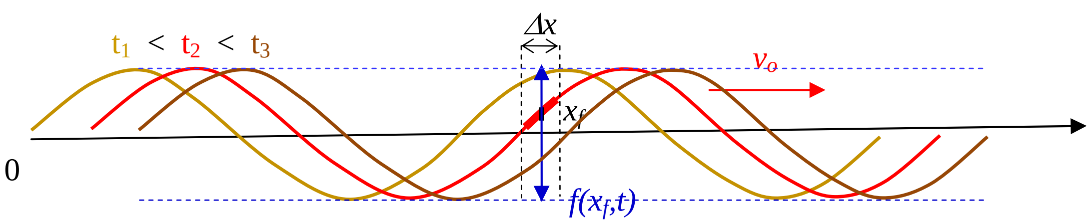
8) Potenza ed intensità di un'onda

Consideriamo un'onda trasversale sinusoidale che si propaga lungo x in una corda tesa di densità lineare di massa μ: $y(x,t) = y_m sen(kx - \omega t)$.

Poniamo l'attenzione ad un tratto della corda lungo Δx intorno ad un generico punto fissato x_f. Il tratto Δx ha una massa $m = \mu \Delta x$ che si muove con equazione del moto:

$$y(x_f, t) = y_m sen(kx_f - \omega t) = y_m sen(\omega t + \phi) \text{ con } \phi = kx_f + \pi = cost$$

ovvero il tratto Δx intorno ad x_f si muove di moto armonico con la stessa frequenza dell'onda.



Ricordando che l'energia totale di una massa in moto armonico è tutta cinetica nel centro di oscillazione, dove si muove con velocità massima v_{max}, possiamo scrivere l'energia totale ΔE_T del tratto di corda Δx come:

(8-1) $$\Delta E_T = \frac{1}{2} m v_{max}^2 = \frac{1}{2} \mu \Delta x (y_m \omega)^2 \Rightarrow \Delta E_T = \frac{1}{2} \mu \, \Delta x \, y_m^2 \, \omega^2 .$$

L'onda muovendosi con velocità v_o copre il tratto Δx in un tempo $\Delta t \Rightarrow \Delta x = v_o \, \Delta t$, e quindi:

(8-2) $$\Delta E_T = \frac{1}{2} \mu \, \Delta t \, v_o \, y_m^2 \, \omega^2 .$$

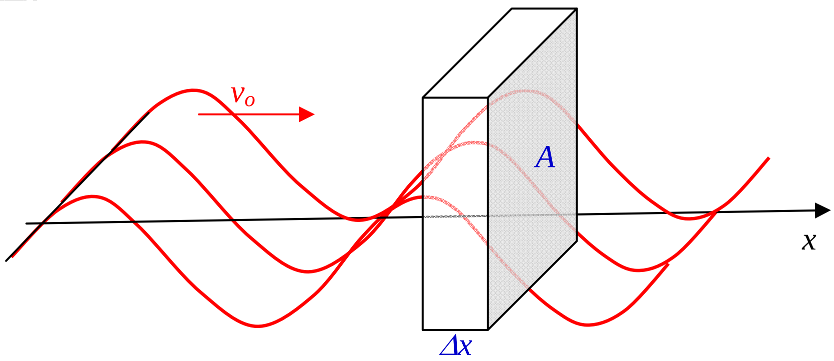
Le relazioni precedenti esprimono l'energia totale ΔE_T posseduta da un tratto di corda Δx in cui si propaga l'onda, ma la 8-2 permette di interpretare ΔE_T come l'energia transitata in un tempo Δt attraverso un piano perpendicolare alla corda a causa del propagarsi dell'onda quindi la 8-2 può essere usata per calcolare:

l'energia media trasportata ad un'onda per unità di tempo $\quad \dfrac{\Delta E_T}{\Delta t} = \dfrac{1}{2} \mu \, v_o \, y_m^2 \, \omega^2$

ovvero ***la potenza media trasportata da un'onda sinusoidale unidimensionale***:

(8-3) $$\bar{P} = \frac{\Delta E_T}{\Delta t} = \frac{1}{2} \mu \, v_o \, y_m^2 \, \omega^2 .$$

Il caso più interessante è quello di un'onda tridimensionale che si propaga in un volume. In tal caso, la massa disturbata dall'onda in un tempo Δt è $m = \rho \Delta V$ con ΔV elemento di volume $\Delta V = A \Delta x$



$m = \rho \Delta V = \rho \, A \, \Delta x$ osserviamo che $\rho \, A$ ha dimensioni $\Rightarrow \dfrac{kg}{m^3} m^2 = \dfrac{kg}{m}$ ovvero le stesse dimensioni di μ, quindi dalla 8-3 sostituendo μ con $\rho \, A$ otteniamo ***la potenza media trasportata da un'onda sinusoidale tridimensionale:***

(8-4) $$\bar{P} = \frac{\Delta E_T}{\Delta t} = \frac{1}{2} \rho \, A \, v_o \, y_m^2 \, \omega^2 .$$

Per le onde tridimensionali si introduce il concetto di ***Intensità dell'onda***: l'energia trasportata dall'onda per unità di tempo e per unita di superficie ovvero la potenza trasportata dall'onda per unità di superficie. Dalla 8-4, segue che l'intensità media $\bar{I}$ di un'onda sinusoidale tridimensionale è

(8-5) $$\bar{I} = \frac{\bar{P}}{A} = \frac{\Delta E_T}{\Delta t\, A} = \frac{1}{2}\rho\, v_o\, y_m^2\, \omega^2 .$$ (in W/m^2) ricordando che $\omega = 2\,\pi f \Rightarrow$

(8-6) $$\bar{I} = 2\pi^2 \rho\, v_o\, f^2\, y_m^2 \; .$$

Osservazioni:

1) La relazione (8-6) ci dice che l'intensità di un'onda di frequenza f, essendo ρ e v_o fissati dal mezzo, può essere variata solo cambiando l'ampiezza dell'onda.
2) L'intensità dipende dal quadrato dell'ampiezza
3) Per un'onda di pressione, dalla 7-3 segue:

$$\bar{I} = \frac{\Delta E_T}{\Delta t\, A} = \frac{1}{2}\rho\, v_o \left(\frac{p_m}{\rho k v_o^2}\right)^2 \omega^2 = \frac{1}{2}\frac{p_m^2}{\rho v_o^3}\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{2}\frac{p_m^2}{\rho v_o^3}\left(f^2\lambda^2\right) = \frac{1}{2}\frac{p_m^2}{\rho v_o^3} v_o^2 = \frac{1}{2}\frac{p_m^2}{\rho v_o}$$

(8-6) $$\bar{I} = \frac{1}{2}\frac{p_m^2}{\rho v_o} = \frac{1}{2}\frac{p_m^2}{\sqrt{B\rho}}$$

L'intensità dipende solo dal quadrato dell'ampiezza di pressione.

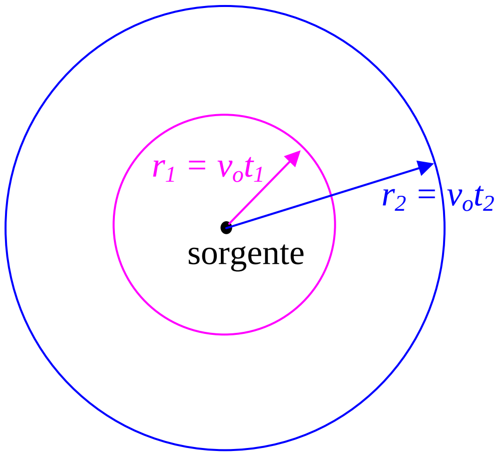
L'intensità del suono percepibile dall'orecchio umano va da circa $10^{-12}\ W/m^2$ ad un massimo di circa $100\ W/m^2$ ossia un intervallo enorme; 14 ordini di grandezza! Per permettere ciò, la percezione dell'intensità da parte dell'orecchio umano non è lineare ma solo logaritmica: se l'intensità ad esempio aumenta di un fattore 1000 la nostra percezione aumenta solo di un fattore 3 ossia del $\log_{10}1000$. A causa di questa relazione fra la sensazione soggettiva e il valore dell'intensità dell'onda, si preferisce parlare, invece che d'intensità I, di ***livello sonoro*** $\boldsymbol{\beta}$ misurato in ***decibel (dB)*** cosi definito:

$$\beta\,(\text{in } dB) = 10 \log_{10}\frac{I}{I_0}$$ con $I_0 = 10^{-12}\ W/m^2$ minima intensità percepibile.

Livelli sonori	***dB***	**Potenza** (W/m^2)
Soglia dell'udibile	0	10^{-12}
Fruscio di foglie	10	10^{-11}
Conversazione	65	$3.2\cdot10^{-6}$
Ristorante, uffici rumorosi, traffico	70	10^{-5}
Asciuga capelli, aspirapolvere	85-90	$0{,}5\text{-}1\ 10^{-3}$
Discoteca, sirena (a 30 *m*)	100	0,1
Concerto rock (a 50 *m*)	120	1
Soglia del dolore	120	1
Jet (a 30 *m*)	140	100

9) Equazione delle onde sferiche

Un'onda prodotta da una sorgente puntiforme immersa in un mezzo omogeneo ed isotropo ha un fronte d'onda sferico: la perturbazione prodotta a $t_0 = 0$ nell'origine si propaga in tutte le direzioni con la stessa velocità v_o percorrendo in un tempo t lo stesso spazio $r = v_o t$ in ogni direzione. Al tempo t tutti i punti in fase (fronte d'onda) sono quelli che costituiscono una superficie sferica di raggio $r = v_o t$.



$t_2 > t_1 > t_0$

Poiché l'energia si conserva, all'istante t_1 sulla sfera S_1 di raggio r_1 si trova la stessa energia che all'istante t_2 sulla sfera S_2 di raggio r_2, ovvero l'energia trasportata dall'onda in un Δt intorno a t_1 e t_2 è la stessa.

$$E_1 = E_2 \Rightarrow I_1 S_1 \Delta t = I_2 S_2 \Delta t \quad \Rightarrow \quad I_1 4\pi r_1^2 = I_2 4\pi r_2^2 \quad \Rightarrow \quad I_1 r_1^2 = I_2 r_2^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}.$$

L'intensità di un'onda sferica diminuisce con il quadrato della distanza dalla sorgente, e ricordando che

$$I \propto y_m^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{y_{m,1}^2}{y_{m,2}^2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{y_{m,1}}{y_{m,2}} = \frac{r_2}{r_1} \quad \text{segue che}$$

L'ampiezza di un'onda sferica diminuisce con la distanza dalla sorgente.

L'equazione di un'onda sferica sinusoidale è:

$y(r,t) = \frac{y_m}{r} \sin(kr - \omega t)$ con r distanza dalla sorgente.