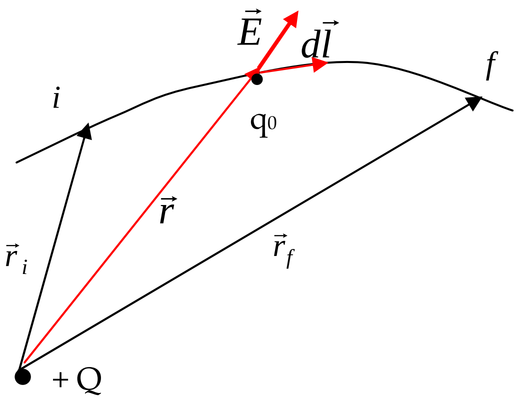
IL Potenziale elettrostatico

1) La forza elettrica è conservativa

Partiamo col verificare che la forza elettrica è conservativa, limitandoci inizialmente al caso di cariche elettriche puntiformi.
Posta una carica $+Q$ ferma in un punto origine, calcoliamo il lavoro fatto dalla forza elettrica $\vec{F}_{el}$ per portare una carica $+q_0$ da un punto iniziale $i\,(\vec{r}_i)$ ad un punto $f\,(\vec{r}_f)$.

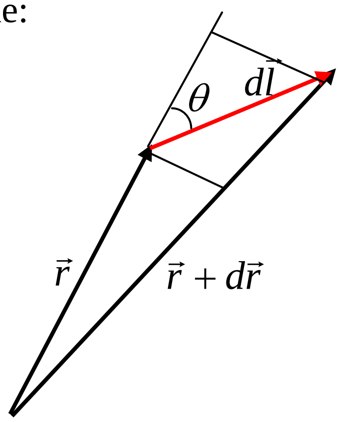


$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}$$

$$\vec{F}_{el} = q_0\vec{E}$$

(1) $$W_{el,i\to f} = \int_i^f \vec{F}_{el}\cdot d\vec{l} = q_0\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{q_0 Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_i^f \frac{1}{r^2}\hat{r}\cdot d\vec{l}$$

osservando che:



$$\hat{r}\cdot d\vec{l} = 1\cdot dl\cdot\cos\theta = dr$$

Dalla (1)$\Rightarrow$ **(2)** $$W_{el,i\to f} = \frac{q_0 Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_i^f \frac{1}{r^2}dr = \frac{q_0 Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_i^f = \frac{q_0 Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_i}-\frac{1}{r_f}\right)$$

Il lavoro W_{el} non dipende dal percorso ma solo dalla posizione del punto iniziale i e da quello finale f quindi **la forza elettrica è conservativa.**

2) Energia potenziale elettrostatica

Si può quindi definire (vedi eq. 6 della lezione Energia Potenziale) una funzione energia potenziale elettrostatica $U_{el} = U$. Dalla (2) segue:

(3) $$\Delta U_{el} = -\int_i^f \vec{F}_{el} \cdot d\vec{l} = \frac{q_0 Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right) = \frac{q_0 Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_f} - \frac{q_0 Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_i}$$

La variazione di energia potenziale dipende dalla posizione del punto finale *f* e del punto iniziale *i*.
Poiché solo le differenze di energia potenziale hanno senso fisico, per semplificare le relazioni si conviene di scegliere il punto iniziale *i* ovvero il punto di riferimento in $\vec{r}_i = \vec{r}_{rif} = \infty$, ponendo $U(\vec{r}_{rif} = \infty) = 0$ come conseguenza del fatto che $\frac{q_0 Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\infty} = 0$.

Questo è coerente con l'osservazione che cariche molto distanti fra loro, praticamente non interagiscono e quindi il contenuto di energia potenziale è nullo.

$$\Delta U_{el} = U_{el,f} - U_{el,\infty} = U_{el,f} - 0 = -\int_\infty^f \vec{F}_{el} \cdot d\vec{l} = \frac{q_0 Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{\infty}\right) = \frac{q_0 Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_f} \Rightarrow$$

(4) $$\boxed{U_{el}(\vec{r}) = \frac{q_0 Q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$ (per cariche puntiformi Q e q_0)

L'energia potenziale della forza elettrostatica fra due puntiformi cariche Q ed q_0è data dalla eq. **(4)**, posto che nel punto di riferimento (cariche a distanza infinita) sia $U_{el}(r=\infty)=0$. (Ricordarsi che $U_{el}(r)$ è sempre una differenza rispetto al punto di riferimento).

Significato: una carica q_0 a distanza r da una carica Q ferma, ha una energia potenziale che è il lavoro necessario alla forza elettrica per portare la carica q_0 dalla posizione r all'∞ ovvero (vedi oss. 3, lezione Energia Potenziale) il lavoro fatto da una forza applicata per portare la carica q_0, con velocità costante, dall'∞ in posizione r. L'energia potenziale elettrostatica è posseduta da una carica in quanto occupa una posizione rispetto ad una altra carica con essa interagente (energia associata alla configurazione del sistema).

Possiamo generalizzare il risultato precedente, ricordando che $\vec{F}_{el} = q_0\vec{E}$ e quindi:

$$U_{el}(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{F}_{el} \cdot d\vec{l} = -q_0 \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow$$

(5) $$\boxed{U_{el}(\vec{r}) = -q_0 \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l}}$$

Si può dimostrare, ma lo tralasciamo, che l'espressione (5), qui ottenuta per un campo $\vec{E}$ generato da una carica puntiforme, vale qualunque sia il campo $\vec{E}$ e pertanto la (5) è l'espressione dell'energia potenziale elettrostatica di una carica q_0 posta in un generico campo elettrico.

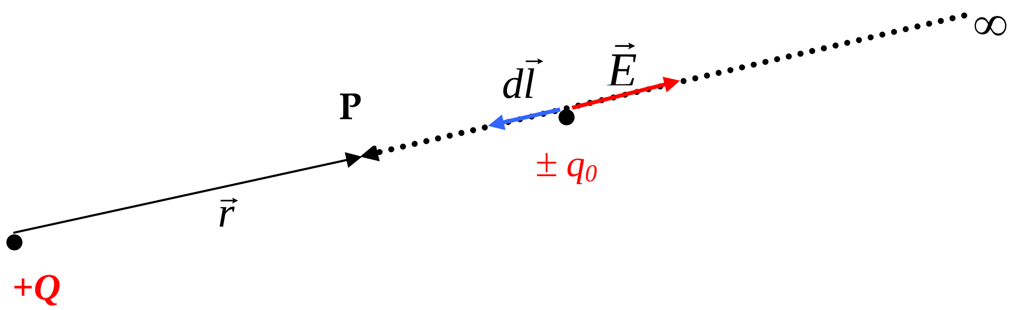
Osservazione: l'espressione (4) evidenzia che:

a) se le cariche hanno lo stesso segno, U_{el} è positiva,
b) se le cariche hanno segno opposto, U_{el} è negativa (come per potenziale gravitazionale)

Questo è confermato avviamente dalla eq. 5. Infatti supponiamo di andare dall'∞ ad un punto P a distanza $\vec{r}$ dalla carica Q lungo un percorso rettilineo coincidente con la direzione di $\vec{r}$ (la forza elettrica è conservativa e quindi il percorso è irrilevante):

a) $dU_{el} = -(+q_0)\vec{E} \cdot d\vec{l} = -q_0 Edl \cos\pi = -q_0 Edl(-1) = q_0 Edl > 0,$

b) $dU_{el} = -(-q_0)\vec{E} \cdot d\vec{l} = q_0 Edl \cos\pi = q_0 Edl(-1) = -q_0 Edl < 0,$



Questo si spiega ricordando che U_{el} rappresenta il lavoro fatto da $\vec{F}_{ap}$ per portare la carica da ∞ in r a velocità costante; tale lavoro è positivo se le cariche si respingono (ovvero hanno lo stesso segno), negativo se le cariche si attraggono .

3) Il potenziale elettrostatico

Si definisce ***potenziale elettrostatico (V)*** l'energia potenziale elettrica per unità di carica; ossia per $q_o = 1\ C$ quindi:

$$V(\vec{r}) = \frac{U_{el}(\vec{r})}{q_0} \quad \text{con}\ V(\vec{r}) = 0 \ \text{ per } \vec{r}_{rif} = \infty$$

$$V(\vec{r}) = -\frac{\int_{\infty}^{\vec{r}} q_0 \vec{E}\cdot d\vec{l}}{q_0} = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}\cdot d\vec{l} \qquad \Rightarrow \textbf{(6)} \qquad \boxed{V(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}\cdot d\vec{l}}$$

$V(\vec{r})$ è il lavoro fatto da $\vec{F}_{ap}$ per portare una carica unitaria da ∞ a $\vec{r}$ in condizioni di equilibrio.

Unità di misura:

$$potenziale = \frac{lavoro}{carica} = \frac{1\cdot J}{1\cdot C} = 1\cdot Volt = 1\cdot V$$

$$CampoElettrico = \frac{forza}{carica} = \frac{N}{C} = \frac{N\cdot m}{C\cdot m} = \frac{J}{C\cdot m} = \frac{V}{m}$$

Ovviamente nell'espressione (6) il campo $\vec{E}$ è il campo totale dovuto a tutte le cariche presenti nella zona di spazio considerato, ma allo stesso risultato si può giungere sfruttando il principio di sovrapposizione. Infatti da quanto detto il potenziale dovuto ad una carica puntiforme Q è dato da:

$$V(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}, \qquad \text{con } V(\vec{r}) = 0 \text{ per } \vec{r}_{rif} = \infty$$

mentre, se abbiamo un insieme di cariche, il potenziale totale è la somma algebrica dei potenziali delle singole cariche

$$V(\vec{r}) = \sum_i V_i(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{Q_i}{r_i}$$ e al limite per una distribuzione continua di carica

$$V(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r},$$ dove dq è la carica posseduta dal volume dV.

Osservazioni:

1) Il potenziale elettrico in un punto è una proprietà del punto in quanto sede del campo elettrico e non dell'eventuale carica nel punto.
2) L'energia potenziale elettrica U_{el} è l'energia posseduta da una carica q_0 posta in un punto caratterizzato da un potenziale elettrico V con $U_{el} = q_0 V$

4) *La differenza di potenziale elettrostatico*

Più utile del valore del potenziale in un punto è la **differenza di potenziale (d.d.p)** ***ΔV*** fra due punti.
La forza elettrica è conservativa e i percorsi non sono rilevanti, quindi scegliamo di andare da ∞ ad f lungo un percorso passante per i e che fino ad i coincida con quello usato per andare da ∞ ad i.

$$\Delta V = V_f - V_i = -\int_{\infty}^{f} \vec{E}\cdot d\vec{l} - \left(-\int_{\infty}^{i} \vec{E}\cdot d\vec{l}\right) = -\int_{\infty}^{i} \vec{E}\cdot d\vec{l} - \int_{i}^{f} \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_{\infty}^{i} \vec{E}\cdot d\vec{l} \Rightarrow$$

(7) $$\boxed{\Delta V = V_f - V_i = -\int_{i}^{f} \vec{E}\cdot d\vec{l}}$$ **definizione di d.d.p.**

quindi la d.d.p. è il lavoro fatto da una forza applicata (l'opposto del lavoro di una forza elettrostatica) per portare da un punto iniziale i ad un punto finale f una carica unitaria in condizioni di equilibrio.

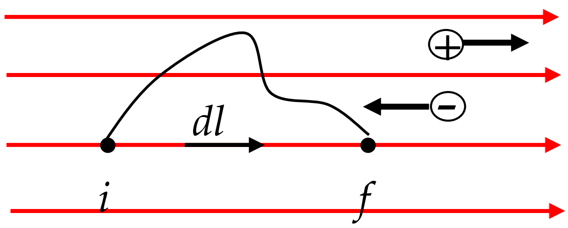
Se $i \equiv f$, ossia se la carica unitaria è spostata su un cammino chiuso Γ, essendo la forza elettrica conservativa la d.d.p. è pari a zero cioè:

(8) $$\boxed{\oint_{\Gamma} \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0}$$ detto: **teorema della circuitazione per il campo elettrico.**

La (8) esprime formalmente il fatto che ***il campo elettrico è conservativo***

Osservazione#1

Calcoliamo la d.d.p. fra due punti i ed f posti sulla stessa linea di campo, in un campo $\vec{E}$ uniforme.



La d.d.p. non dipende dal percorso $\Rightarrow$ cammino lungo una linea di campo $\Rightarrow$ $\vec{E} // d\vec{l}$

$$d.d.p = \Delta V = V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_i^f E dl = -E \cdot d_{if} \Rightarrow \Delta V = -E \cdot d_{if}$$

poiche $E > 0$ e la distanza da i ad f = $d_{if} > 0 \Rightarrow \Delta V = V_f - V_i < 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_f < V_i}$

Quindi il potenziale diminuisce spostandosi lungo le linee di campo, concordemente al verso delle stesse.

Ricordando il verso del moto delle cariche in E, si osserva che:

- cariche positive di muovono spontaneamente verso potenziali decrescenti
- cariche negative di muovono spontaneamente verso potenziali crescenti

Osservazione#2

In una regione sede di un $\vec{E}$, l'insieme dei punti dello spazio caratterizzati dallo stesso potenziale elettrostatico costituisce una superficie equipotenziale.

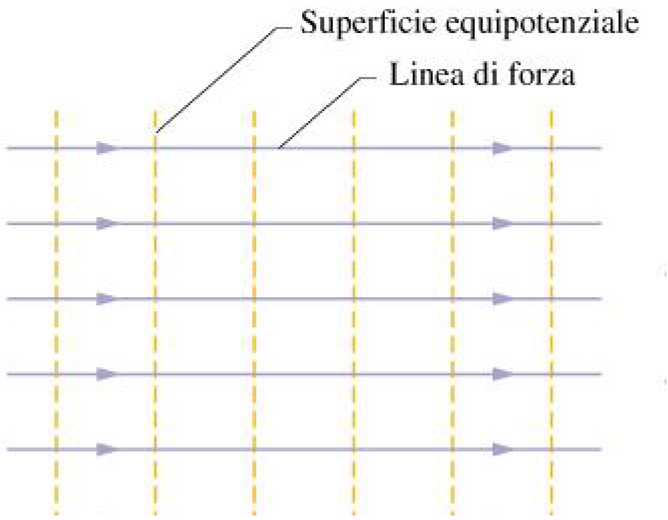
Per percorsi su superfici equipotenziali sia ha per definizione $\Delta V = 0$

$$\Rightarrow \Delta V = -\int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0; \qquad \text{ma } \vec{E} \neq 0, d\vec{l} \neq 0 \Rightarrow \vec{E} \perp d\vec{l} \Rightarrow$$

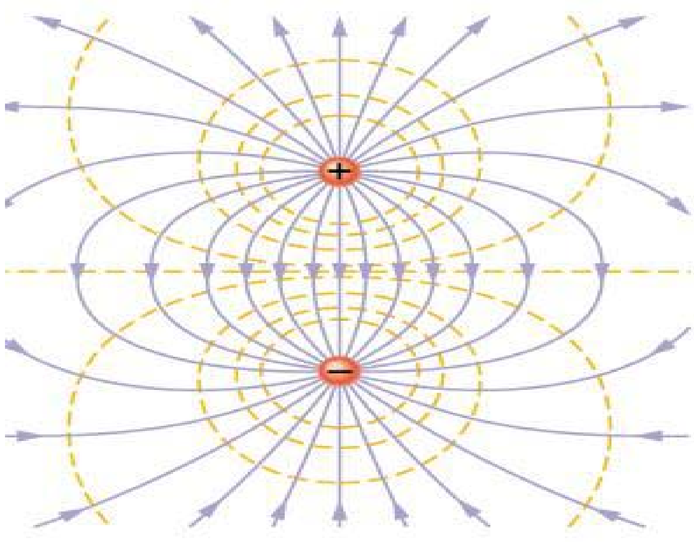
le linee di campo sono perpendicolari alle superfici equipotenziali

Esempi di linee di campo e superfici equipotenziali:

Per campo uniforme:



Sistema di cariche opposte:

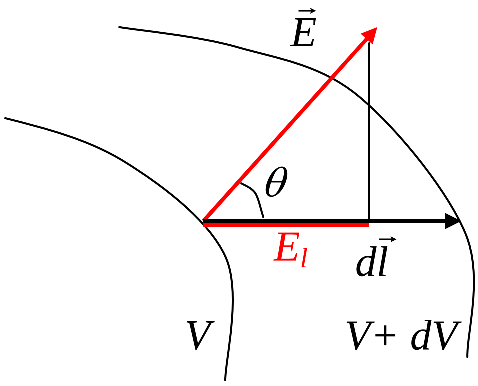


5) Il lavoro delle forze elettriche in termini di ΔV

Se si sposta una carica q_0 fra una ΔV, le forze elettriche fanno un lavoro che può essere scritto, usando la definizione di U_{el} e di ΔV, come:

$W_{el,i\to f} = -\Delta U_{el} = -q_0 \Delta V$, mentre $W_{ap,i\to f} = q_0 \Delta V$

6) Calcolo del campo elettrico dal potenziale



Da $\Delta V = -\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{l} \Rightarrow$

$dV = -\vec{E}\cdot d\vec{l} \Rightarrow$

$dV = -E\cdot dl.\cos\theta = -(E\cdot\cos\theta)\cdot dl$

Indicando con $E_l = E\cos\theta$ la componente del campo lungo $d\vec{l}$ $\Rightarrow$

$dV = -E_l \cdot dl \Rightarrow E_l = -\dfrac{dV}{dl}$

Ossia: in un punto la componente del campo in una direzione l generica è data dalla variazione, cambiata di segno, del potenziale V su un piccolo spostamento lungo l.

Per il caso semplice di $\vec{E}$ uniforme, da (8) $\Rightarrow$ $E = -\dfrac{\Delta V}{\Delta l}$ (con $\Delta l = d_{if}$)

Esempio:

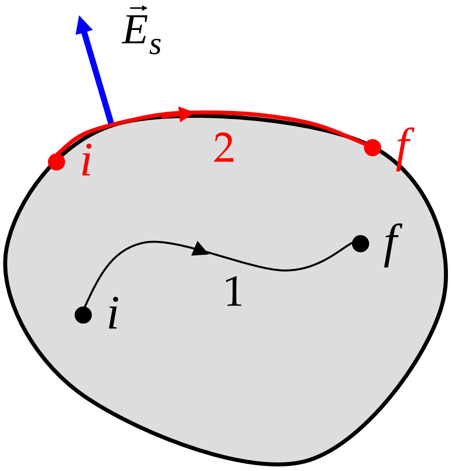
Il potenziale generato da una carica puntiforme Q in un punto $\vec{r}$ è:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} \Rightarrow$$

$$-\frac{dV(\vec{r})}{dr} = -\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}\right) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r^2}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} = E_r$$

7) Un conduttore in equilibrio è equipotenziale

Consideriamo due percorsi 1 = tutto interno al conduttore
2 = sulla superficie del conduttore



Percorso 1) $\Rightarrow \Delta V = -\int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{l} =$

ma $\vec{E}_{INT} = 0 \Rightarrow \Delta V = 0 \Rightarrow V_f = V_i$

Percorso 2) $\Rightarrow \Delta V = -\int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_i^f \vec{E}_s \cdot d\vec{l}$

ma $\vec{E}_s = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n} \Rightarrow \vec{E} \perp d\vec{l} \Rightarrow \Delta V = 0 \Rightarrow V_f = V_i$

In ogni caso $V_f = V_i$ e data la genericità dei punti *i* ed *f* $\Rightarrow$ è vero per tutti i punti $\Rightarrow$ il conduttore è equipotenziale.