Le macchine termiche e il secondo principio della termodinamica

1) Definizione di macchina termica

È sperimentalmente verificato che nel rispetto del primo principio della termodinamica (ovvero della conservazione dell'energia) non c'è nessun limite e/o difficoltà nell'ottenere in modo continuo calore dal lavoro; basti pensare alle situazioni in cui è presente l'attrito. Il problema base della termodinamica è indagare la possibilità, permessa dal primo principio, di trasformare con continuità il calore in lavoro.
È evidente che ciò si può ottenere con una singola trasformazione; ad esempio (*fig.1*), possiamo, assorbendo calore Q, fare espandere molto lentamente un sistema, costituito da un gas ideale contenuto in un cilindro ideale, chiuso da un pistone, con pareti adiabatiche e fondo conduttore in contatto con una sorgente di calore a temperatura T (ovvero una espansione isoterma).

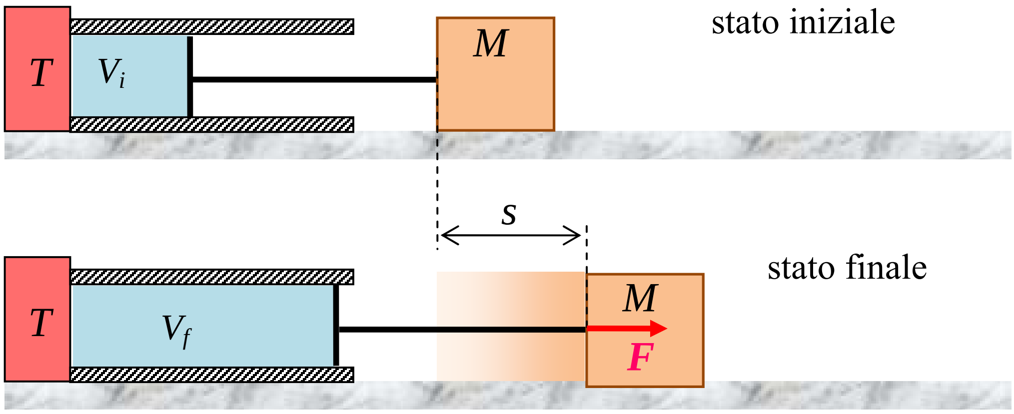


Fig. 1

Infatti, in una trasformazione isoterma di un gas ideale $\Delta U_{Int} = 0$ e per il primo principio $Q = W$, quindi in assenza di attrito, tutto il calore assorbito è trasformato in lavoro:

$$W = \int pdV = \int Fds > 0 \text{ con } Q_{ass} = W > 0$$

Questo non è interessante perché il processo si ferma una volta raggiunto un dato stato finale, con il sistema in configurazione diversa da quella iniziale (vedi *fig. 1*). Per avere ancora lavoro dovremmo trovare il modo di riportare il sistema nella configurazione iniziale e inoltre, affinché il processo sia conveniente, dovremmo spendere in questa fase meno lavoro di quello ottenuto nella fase di espansione: ciò sarà possibile, essendo $|\Delta V|$ lo stesso, solo se la pressione con cui si riporta il sistema nelle condizioni iniziali è mediamente minore di quella con cui si è effettuata l'espansione.

Risulta quindi evidente che per trasformare con continuità Q in W dobbiamo avere una serie di trasformazioni che riportano il sistema indietro al punto di partenza, passando per pressioni minori, come schematizzato in *fig. 2,* ossia una trasformazione ciclica o semplicemente ***un ciclo.*** Infatti, nella fase di espansione si ha $W_{A\rightarrow B} > 0$ *(area tratteggiata in rosso in fig. 2a),* mentre $W_{B\rightarrow A} < 0$ *(area tratteggiata in celeste in fig. 2b)* nella fase successiva di compressione.

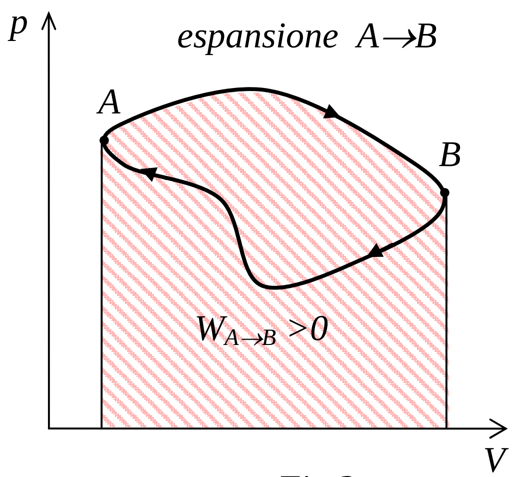


Fig 2a

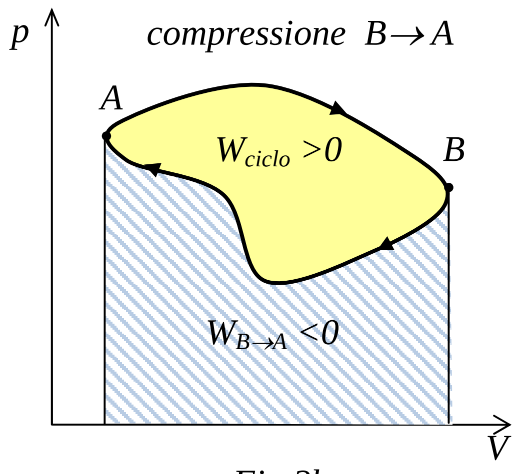


Fig 2b

Il lavoro totale fatto compiendo il ciclo (*area in giallo in fig. 2d)* è:

$W_{ciclo} = W_{A\rightarrow A} = W_{A\rightarrow B} + W_{B\rightarrow A} > 0$

Per una qualunque successione di trasformazioni che formano un ciclo percorso come in *fig. 2* (cioè in senso orario), essendo U_{Int} una variabile di stato, segue dal primo principio della termodinamica che:

$\Delta U_{Int} = U_{Int}(A) - U_{Int}(A) = 0 \Rightarrow W_{ciclo} = Q > 0$

Accade in genere che in alcune trasformazioni del ciclo il sistema assorba calore, in altre lo ceda; posto Q_{ass} e Q_{ced} rispettivamente la somma dei calori assorbiti e ceduti dal sistema durante tutto il ciclo si ha:

1.1 $W_{ciclo} = Q = Q_{ass} - |Q_{ced}| > 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{ass} > |Q_{ced}|$.

Conclusione: un sistema costituito da una sostanza, che chiameremo *fluido motore,* che esegue una opportuna trasformazione ciclica riesce a trasformare il calore in lavoro; vedremo in seguito (par. 6) che ci sono forti limitazioni in questo processo.

Realizziamo adesso un ciclo con delle specifiche trasformazioni:

a) Iniziamo con fare espandere isotermicamente a temperatura T_1 un gas ideale da uno stato iniziale *a* a uno stato finale *b* (*fig. 3*) ottenendo con tale trasformazione che tutto il calore assorbito Q_1 si trasforma in lavoro $W_{a\to b} = Q_1 > 0$.

b) Se vogliamo tornare allo stato iniziale *a*, scambiando calore alla stessa temperatura T_1, *l'unica* trasformazione che possiamo effettuare è una compressione isoterma sempre a temperatura T_1. Ma è evidente (come mostrato in *fig. 3*) che dovremmo in tal caso spendere esattamente lo stesso lavoro, in modulo, ottenuto nell'espansione: $W_{b\to c} = -W_{a\to b} \Rightarrow W_{ciclo} = 0$; quindi per ottenere lavoro da un ciclo, il fluido motore deve scambiare calore con almeno due temperature. Si trova sperimentalmente che questo è sempre vero. Come abbiamo sottolineato, per ottenere lavoro è necessario inoltre che la pressione media a cui si compie il percorso di ritorno deve essere minore di quella della fase di espansione.

c) Per quanto detto al punto precedente, se vogliamo tornare allo stato iniziale scambiando calore soltanto ad una temperatura (oltre T_1) e avere contemporaneamente $W_{ciclo} > 0$ (vedi *fig. 4*) la compressione deve essere svolta lungo una isoterma a temperatura T_2 con $T_2 < T_1$. Durante questa compressione il fluido motore cede un calore $Q_2 = W_{b\to c} < 0$ con $|W_{b\to c}| < W_{a\to b}$.

d) Resta da stabilire come passare da una isoterma all'altra, e questo sarà visto in seguito.

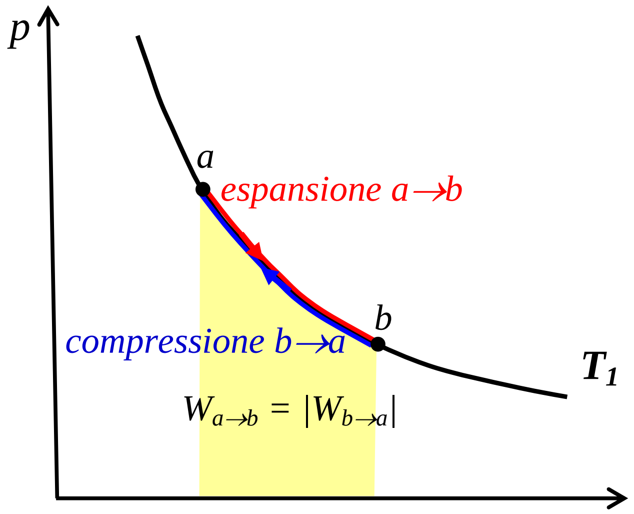


fig. 3

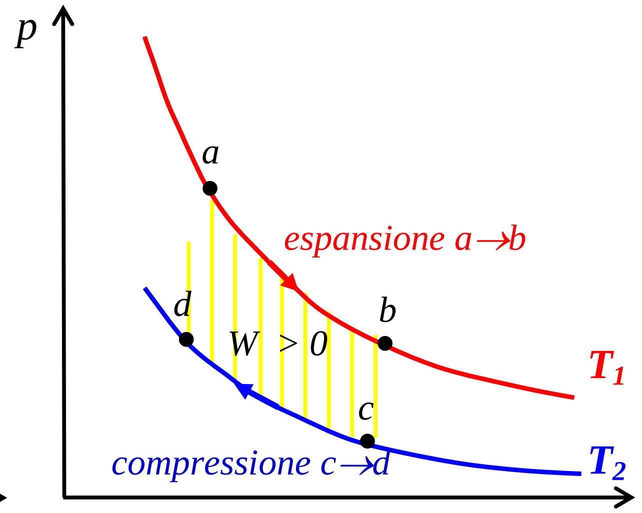
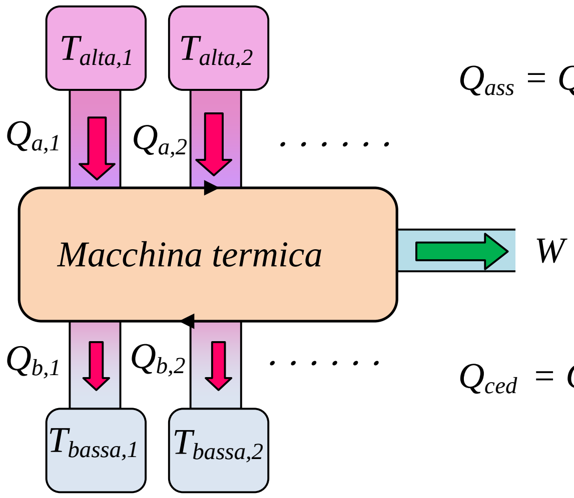


fig. 4

In ogni caso, possiamo concludere osservando che per ottenere lavoro con un ciclo, un fluido motore, deve assorbire calore da sorgenti a date temperature e cedere calore a sorgenti a temperatura più basse; chiameremo ***macchina termica*** un dispositivo che attraverso una trasformazione ciclica di un fluido motore scambia ovvero assorbe calore a temperature più alte $Q_{ass} = Q_{sc,Talte}$, ne scambia ovvero cede una quantità a temperatura più basse$|Q_{ced}| = |Q_{sc,Tbasse}|$ e fornisce un lavoro $W = Q_{ass} - |Q_{ced}| = Q_{sc,Talte} - |Q_{sc,Tbasse}|$ come schematizzato in *fig. 5*.



$$Q_{ass} = Q_{sc,Talte} = Q_{a,1} + Q_{a,1} + \cdots\cdots$$

$$Q_{ced} = Q_{sc,Tbasse} = Q_{b,1} + Q_{b,1} + \cdots\cdots$$

fig. 5

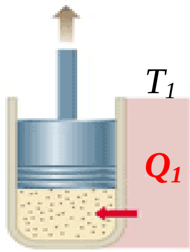
Si definisce ***rendimento η*** di una macchina termica la quantità:

1.2
$$\eta = \frac{W_{ciclo}}{Q_{ass}} = \frac{Q_{ass} - |Q_{ced}|}{Q_{ass}} = 1 - \frac{|Q_{ced}|}{Q_{ass}} = 1 - \frac{|Q_{sc,Tbasse}|}{Q_{sc,Talte}}$$

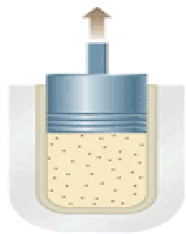
2) *Il ciclo di Carnot*

Se si vuole costruire un ciclo in cui il fluido motore scambia calore solo a due temperature T_1 e T_2 con $T_1 > T_2$ è evidente, per quanto detto in precedenza, che il fluido deve compiere due trasformazioni isoterme e che inoltre in passaggio dalla temperatura T_1 e T_2 e viceversa può avvenire solo con delle trasformazioni adiabatiche. Per un gas ideale, ricordando che nel piano p-V la pendenza delle trasformazioni adiabatiche è maggiore di quella delle isoterme, si è sempre sicuri di poter chiudere il ciclo. Il ciclo cosi realizzato è detto ***ciclo di Carnot*** (rappresentato in fig. 6).
Esso è pertanto costituito da:

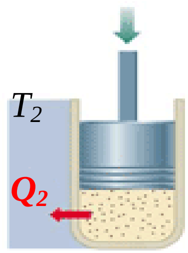
1) *Espansione isoterma* ($a \rightarrow b$): il fluido motore, in contatto termico con una sorgente a temperatura T_1, preleva da essa una quantità di calore Q_1 e questo provoca un suo aumento di volume, una diminuzione di pressione e il compimento di un lavoro meccanico $W_{a\rightarrow b} = Q_1 > 0$.



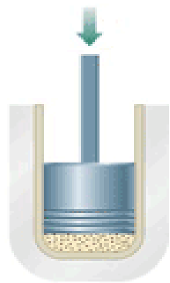
2) *Espansione adiabatica* ($b \rightarrow c$): il fluido motore è isolato dalla sorgente e viene mantenuto in modo che non scambi calore con l'esterno. Tramite un'adiabatica esso continua a espandersi compiendo un lavoro $W_{b\rightarrow c} > 0$. Per il primo principio, $\Delta U_{Int} = -W_{b\rightarrow c} \Rightarrow \Delta U_{Int} < 0$ e ne consegue un abbassamento della temperatura fino a T_2 ($< T_1$).



3) *Compressione isoterma* ($c \rightarrow d$): il fluido motore è ora messo in contatto termico con una sorgente a temperatura T_2 e viene compresso svolgendo un lavoro esterno, questo provoca un aumento della pressione e la cessione di quantità di calore Q_2 alla sorgente con $W_{c\rightarrow d} = Q_2 < 0$.



4) *Compressione adiabatica* ($d \rightarrow a$): il fluido motore è nuovamente isolato dalla sorgente e viene mantenuto in modo che non scambi calore con l'esterno. Tramite un'adiabatica continua a essere compresso subendo un lavoro meccanico $W_{d\rightarrow a} < 0$. Per il primo principio, $\Delta U_{Int} = -W_{a\rightarrow b} \Rightarrow \Delta U_{Int} > 0$ e ne consegue un aumento della temperatura fino a T_1.



Ricordando che $W_{ciclo} = Q_1 - |Q_2|$ segue:

2.1 $$\eta = \frac{W_{ciclo}}{Q_1} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1}$$

Il ***rendimento di un ciclo di Carnot***, quando il fluido motore è un gas ideale (la *macchina di Carnot)* può essere valutato in modo più specifico ricordando le equazioni caratteristiche delle isoterme e delle adiabatiche per un gas ideale;
$pV=nRT$ e $TV^{\gamma-1} = cost.$

Isoterma $a \rightarrow b$
$W_{a\rightarrow b} = nRT_1 ln(V_b/V_a) > 0$ essendo $V_b > V_a$
$Q_1 = W_{a\rightarrow b}$ (calore assorbito)

Adiabatica $b \rightarrow c$
$W_{b\rightarrow c} = -\Delta U_{Int} = -nc_V\,(T_2 - T_1) = nc_V\,(T_1 - T_2) > 0$
$Q_{b\rightarrow c} = 0$

Isoterma $c \rightarrow d$
$W_{c\rightarrow d} = nRT_2 ln(V_d/V_c) < 0$ essendo $V_d < V_c$
$Q_2 = Q_{c\rightarrow d} = W_{c\rightarrow d}$ (calore ceduto)

Adiabatica $d \rightarrow a$
$W_{d\rightarrow a} = -\Delta U_{Int} = -nc_V\,(T_1 - T_2) = nc_V\,(T_2 - T_1) < 0$
$Q_{d\rightarrow a} = 0$

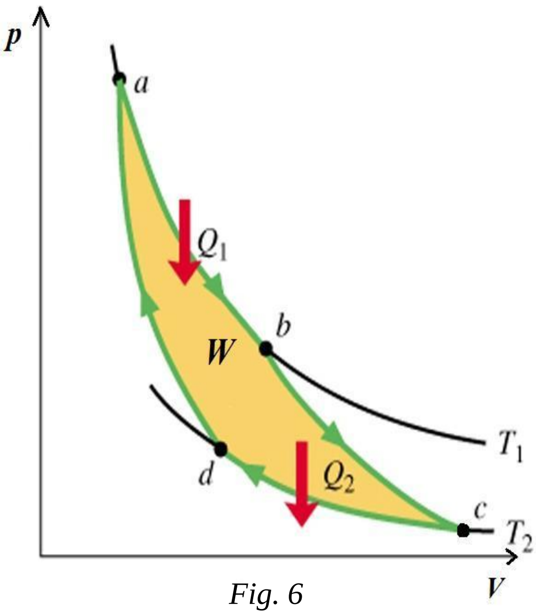


Fig. 6

Il lavoro totale è quindi: $W_{ciclo} = Q_1 - |Q_2| = nRT_1 ln(V_b/V_a) - nRT_2 ln(V_c/V_d) \Rightarrow$

$W_{ciclo} = nR[T_1 ln(V_b/V_a) - T_2 ln(V_c/V_d)]$

Osserviamo che i punti *ad* e *bc* sono rispettivamente su una stessa adiabatica:

$T_1 V_a^{\gamma-1} = T_2 V_d^{\gamma-1}$; $T_1 V_b^{\gamma-1} = T_2 V_c^{\gamma-1}$; dividendo membro a membro $\Rightarrow$

$\frac{V_a^{\gamma-1}}{V_b^{\gamma-1}} = \frac{V_d^{\gamma-1}}{V_c^{\gamma-1}} \Rightarrow \frac{V_a}{V_b} = \frac{V_d}{V_c}$; sostituendo nell'espressione di W_{ciclo} $\Rightarrow$

$W_{ciclo} = nR(T_1 - T_2) ln(V_b/V_a)$; sostituendo nell'espressione di η $\Rightarrow$

$$\eta_C = \frac{W_{TOT}}{|Q_1|}\frac{nR(T_1 - T_2)\ln\frac{V_b}{V_a}}{nRT_1 \ln\frac{V_b}{V_a}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \Longrightarrow$$

2.2 $\eta_C = 1 - \frac{T_2}{T_1} < 1$, essendo sempre $T_2 > 0$ e $T_2 < T_1$.

Si noti che il rendimento di una macchina di Carnot dipende solo dal rapporto delle temperature delle sorgenti con cui si scambia calore (e non dal numero di moli, dalle pressioni e volumi in gioco).

Osservazione.
Dalla definizione di rendimento, rel 2.1, e dalla 2.2, segue per una macchina di Carnot che:

$$\eta_C = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{Q_2}{Q_1} \Rightarrow \qquad \frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$$

ossia in una macchina di Carnot *i calori scambiati con le sorgenti sono inversamente proporzionali alle temperature delle sorgenti stesse.*

3) *Cicli che scambiano calore con più sorgenti di calore*

Diversamente dal ciclo di Carnot, il passaggio fra la temperatura T_1 dell'espansione isoterma $a \to b$ e la temperatura T_2 ($< T_1$) della successiva compressione isoterma $c \to d$ può essere fatto tramite delle trasformazioni isocore, come rappresentato in *fig. 7*, ottenendo il cosiddetto *ciclo di Stirling*. Per il primo principio, nelle trasformazioni isocore di un gas ideale (in cui $W = 0$) la variazione della temperatura è conseguente allo scambio di calore Q del fluido motore ($Q = \Delta U_{Int} \propto \Delta T$) con una sorgente a *temperatura variabile gradualmente e con continuità fra le due temperature limite* T_1 e T_2. Ovviamente nella trasformazione $b \to c$ il fluido motore cede un calore Q poiché la temperatura diminuisce, viceversa nella trasformazione $d \to a$ dove è invece assorbita la stessa quantità di calore Q.

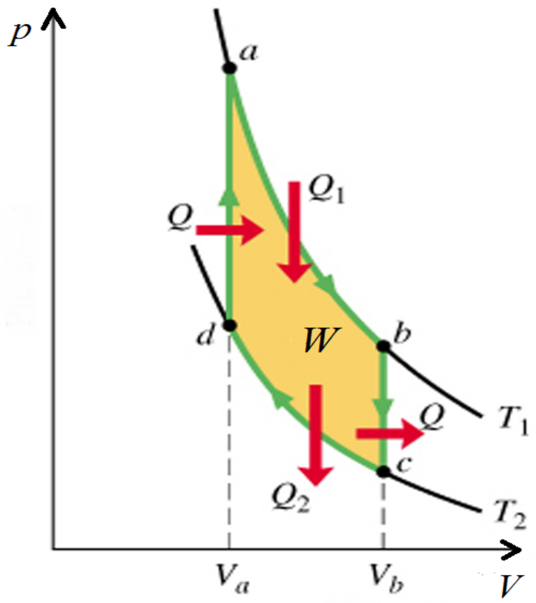


Fig. 7

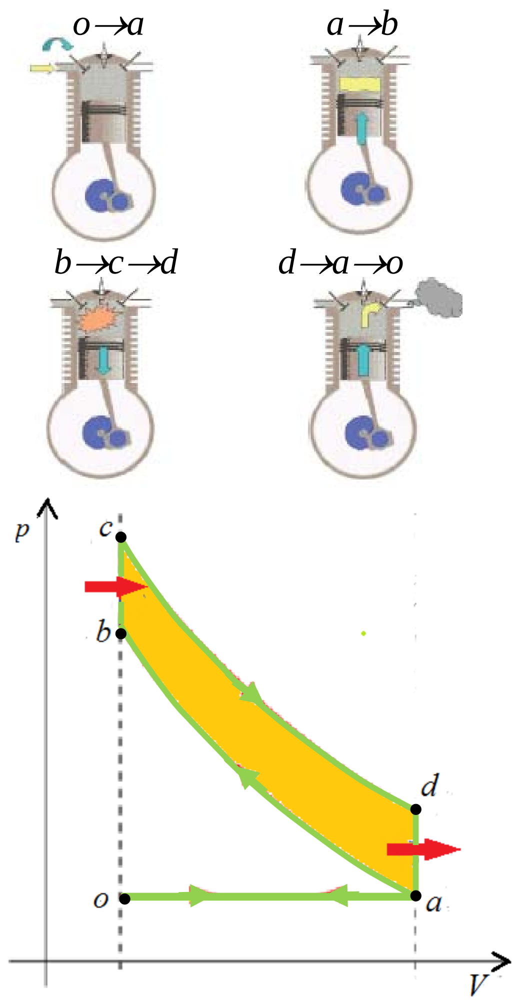
In questo ciclo lo scambio di calore avviene quindi durante tutte le quattro trasformazioni e con più sorgenti a temperature diverse comprese fra T_1 e T_2, pertanto anche se il fluido fosse un gas ideale, *il rendimento non può essere calcolato con la 2.2* ma deve essere usata direttamente la sua definizione (rel. 1.1):

3.1 $$\eta = \frac{W_{ciclo}}{Q_{ass}} = \frac{Q_{ass} - |Q_{ced}|}{Q_{ass}} = \frac{Q_1 + Q - |Q_2| - |Q|}{Q_1 + Q} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1 + Q}$$

È evidente, confrontando la 3.1 con la 2.1, che il rendimento del ciclo di Stirling che operi fra le temperature limite T_1 e T_2 è minore del rendimento di un ciclo di Carnot che operi fra le stesse due temperature.

Altri esempi di cicli che scambiano calore con più sorgenti a temperature diverse sono mostrati in *fig. 8*, dove il fluido motore è, nel ciclo Otto, una miscela di benzina-aria e nel ciclo Diesel una miscela nafta-aria considerati gas ideali. Si tralascia il calcolo dei rispettivi rendimenti.

Ciclo dI Otto (motore a scoppio)



o→a : Aspirazione a pressione costante

a→b: Compressione adiabatica (perchè rapida)
$W_{ab}=nc_V(T_a-T_b)$; $Q_{ab}=0$

b→c: Autocombustione graduale della miscela
$W_{bc}=p_b(V_c-V_b)$
$Q_{bc}= nc_P(T_c-T_b)$

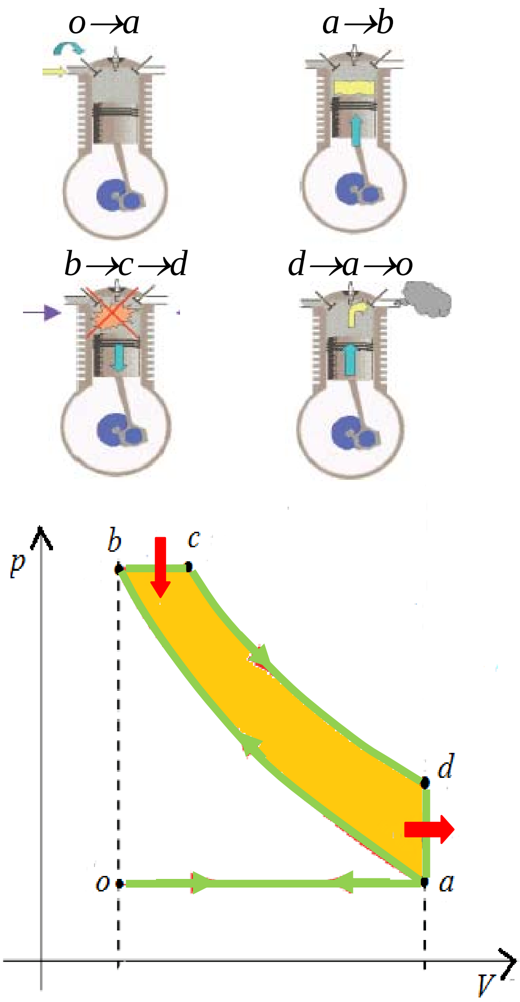
c→b: Espansione adiabatica (perchè rapida)

d→a: Decompressione (apertura valvola)
$W_{da}=0$; $Q_{da}= nc_V(T_a-T_d)$

o→a: Scarico

fig. 8a

Ciclo Diesel



o→a : Aspirazione a pressione costante

a→b: Compressione adiabatica (perchè rapida)
$W_{ab}=nc_V(T_a-T_b)$; $Q_{ab}=0$

b→c: Autocombustione graduale della miscela
$W_{bc}=p_b(V_c-V_b)$
$Q_{bc}= nc_P(T_c-T_b)$

c→b: Espansione adiabatica (perchè rapida)

d→a: Decompressione (apertura valvola)
$W_{da}=0$; $Q_{da}= nc_V(T_a-T_d)$

o→a: Scarico

fig. 8b

4) La macchina frigorifera

Se il ciclo su cui si basa una macchina termica è fatto solo di trasformazioni reversibili, come quelli fin qui visti, esso può essere svolto in verso opposto; ossia, con riferimento alla *fig. 2,* in verso antiorario. In questo verso, nella fase di compressione il lavoro è $W_{B\to A} > 0$ (*fig. 2b*) mentre nella successiva fase di espansione il lavoro è $W_{A\to B} < 0$, (*fig. 2a*).

Il lavoro totale fatto compiendo un ciclo è:

$W_{ciclo} = W_{A\to A} = W_{B\to A} + W_{A\to B} < 0$ ossia è un lavoro fatto dall'esterno sul sistema.

Per quanto visto nel *par.1* circa le temperature a cui si scambia calore in un ciclo di una macchina termica, possiamo dire che se il relativo ciclo è percorso in senso inverso si ha che il fluido motore preleva calore $Q_{sc,Tbasse}$ dalle sorgenti a temperature più basse usando un lavoro esterno e cede calore $Q_{sc,Talte}$ alle sorgenti a temperatura più alte. In questo caso, dalla *rel. 1.1*, segue:

$W_{ciclo} = Q_{sc,Tbasse} - |Q_{sc,Talte}| < 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{sc,Tbasse} < |Q_{sc,Talte}|$ con

4.1 $\quad |Q_{sc,Talte}| = Q_{sc,Tbasse} + |W_{ciclo}|$.

In conclusione, si realizza una macchina termica, detta ***macchina frigorifera,*** il cui schema di principio è dato in *fig 9*, che usando un lavoro esterno preleva calore dalle sorgenti a più bassa temperatura e lo cede alle sorgenti a temperature più alte soddisfacendo alla rel. 4.1.

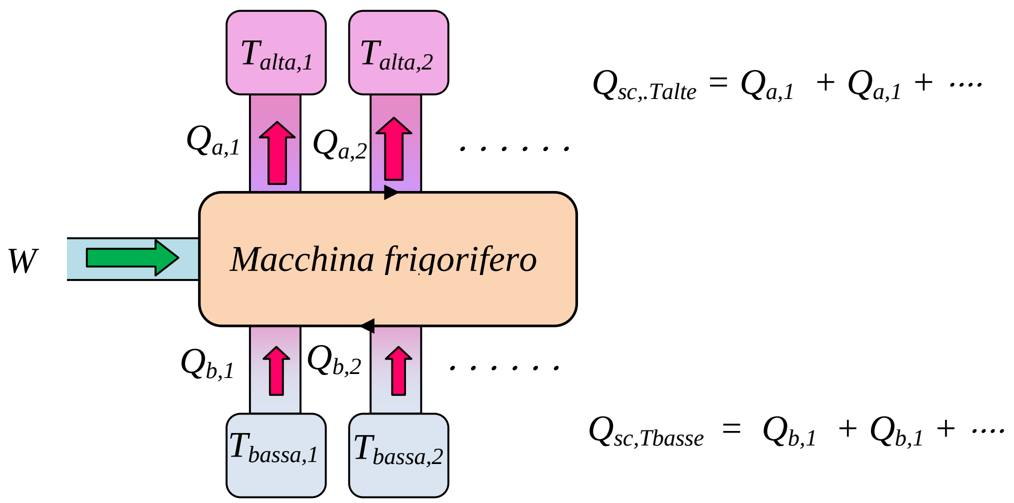


Fig. 9

Per caratterizzare una macchina frigorifera, usata per trasferire calore da una sorgente fredda ad una a temperatura più alta, più utile del rendimento è l'***efficienza*** ε:

$$\varepsilon = \frac{|Q_{sc,Tbasse}|}{|W_{ciclo}|} = \frac{|Q_2|}{Q_1 - |Q_2|}$$

dove la seconda vale, con ovvio significato dei simboli, per un ciclo che scambia calore <u>solo</u> con due temperature T_1 e T_2 con $T_1 > T_2$.

Usando la 1.1, si trova che: $\varepsilon = \frac{1-\eta}{\eta}$

infatti $\varepsilon = \frac{|Q_{sc,Tbasse}|}{|W_{ciclo}|} = \frac{|Q_{sc,Tbasse}|}{\eta Q_{sc,Talte}} = \frac{1}{\eta}\frac{|Q_{sc,Tbasse}|}{Q_{sc,Talte}} = \frac{1}{\eta}(1-\eta) = \frac{1-\eta}{\eta}$.

5) *Il secondo principio delle termodinamica*

Studiando i meccanismi di trasformazione e di trasferimento del calore si riscontra sperimentalmente che:

a) il rendimento di una macchina termica è sempre minore di 1 ovvero il calore ceduto alle sorgenti a temperature più basse non è mai zero e pertanto il calore assorbito dalle sorgenti di calore a temperature più alta non è mai interamente trasformato in lavoro.
b) Non si osserva mai il passaggio spontaneo di calore da un corpo a temperatura più bassa verso un corpo a temperatura più alta.

Entrambe le situazioni potrebbero avvenire in compatibilità con il primo principio della termodinamica, ovvero con la conservazione dell'energia.

Il fatto che non si osservino sta a indicare *l'esistenza di un verso naturale con cui procedono spontaneamente gli eventi*; le trasformazioni procedono in natura in un certo verso, ma non nel verso opposto. Questa direzionalità della natura è espressa dal ***secondo principio della termodinamica.***

In conseguenza delle due evidenze sperimentali, nella termodinamica classica esistono due formulazioni equivalenti di questo principio. Esse sono:

1. È impossibile realizzare una trasformazione ciclica il cui unico risultato sia la trasformazione in lavoro di tutto il calore assorbito da una sorgente (formulazione di Kelvin-Planck); ovvero non esistono macchine termiche perfette (o ideali) il cui rendimento sia pari al 100%.

2. È impossibile realizzare una trasformazione ciclica il cui unico risultato sia quello di trasferire calore da un corpo più freddo a uno più caldo (formulazione di Clausius); ovvero non esistono macchine frigorifero perfette (o ideali).

Nella termodinamica moderna, il secondo principio è associato, tramite una grandezza detta *entropia*, al concetto che lo stato termodinamico più probabile è quello più disordinato. Ma qui non discuteremo questo.

Limitandoci a macchine che scambiano calore con due sole sorgenti, in *fig. 9a* è riportato lo schema di una macchina termica ideale (che viola il secondo principio) e in *fig. 9b* quello di una macchina termica reale (coerente con il secondo principio); lo stesso in *fig. 10* per una macchina frigorifera. Nelle figure si è indicato con T_1 e T_2 le temperature delle due sorgenti di calore in uso, con $T_1 > T_2$, con Q_1 e Q_2 il calore scambiato alle corrispondenti temperature e con W il lavoro in gioco.

Macchina termica ideale
($Q_2 = 0$, impossibile)

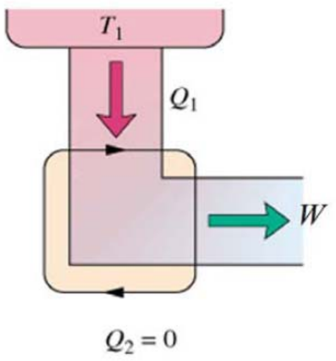


Fig. 9a

Macchina termica reale
($Q_2 \neq 0$, $W = Q_1 - |Q_2|$)

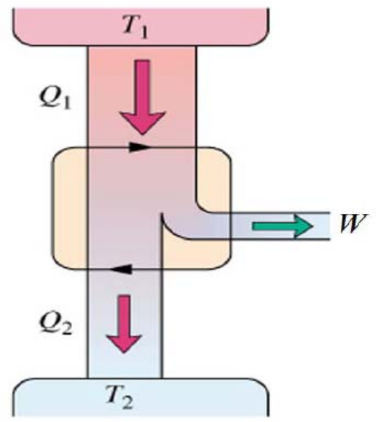


Fig. 9b

Macchina frigorifero ideale
($W = 0$, impossibile)

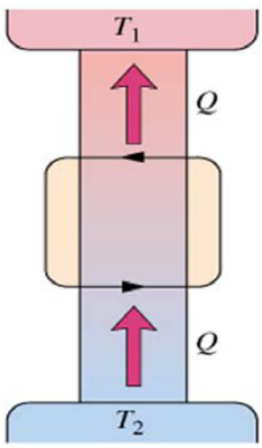


Fig. 10a

Macchina frigorifero reale
($W \neq 0$, $|Q_1| = W + Q_2$)

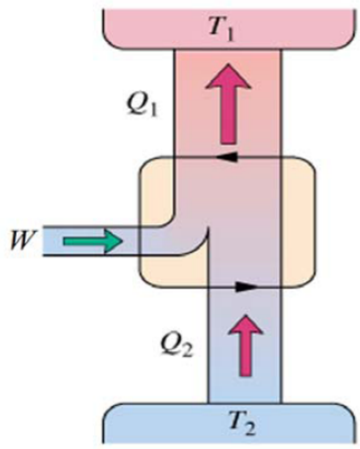


Fig. 10b

6) *Equivalenza fra le due precedenti formulazioni*

Vogliamo ora dimostrate che i due enunciati sono equivalenti. Ciò sarà dimostrato osservando che se si nega la validità di un enunciato, necessariamente saremmo costretti a negare anche l'altro (dimostrazione per assurdo).

Supponiamo che esista una macchina frigorifera ideale, ma non esista una macchina termica ideale, come schematizzato in *fig. 11a*.

La macchina frigorifera ideale trasferisce un calore Q_2 dalla temperatura T_2 alla temperatura T_1 $(T_1 > T_2)$ senza impiego di lavoro. La macchina termica reale è tale da assorbire un calore Q_1 alla temperatura T_1 e cedere esattamente il calore Q_2 alla temperatura T_2, compiendo un lavoro $W = Q_1 - Q_2$.

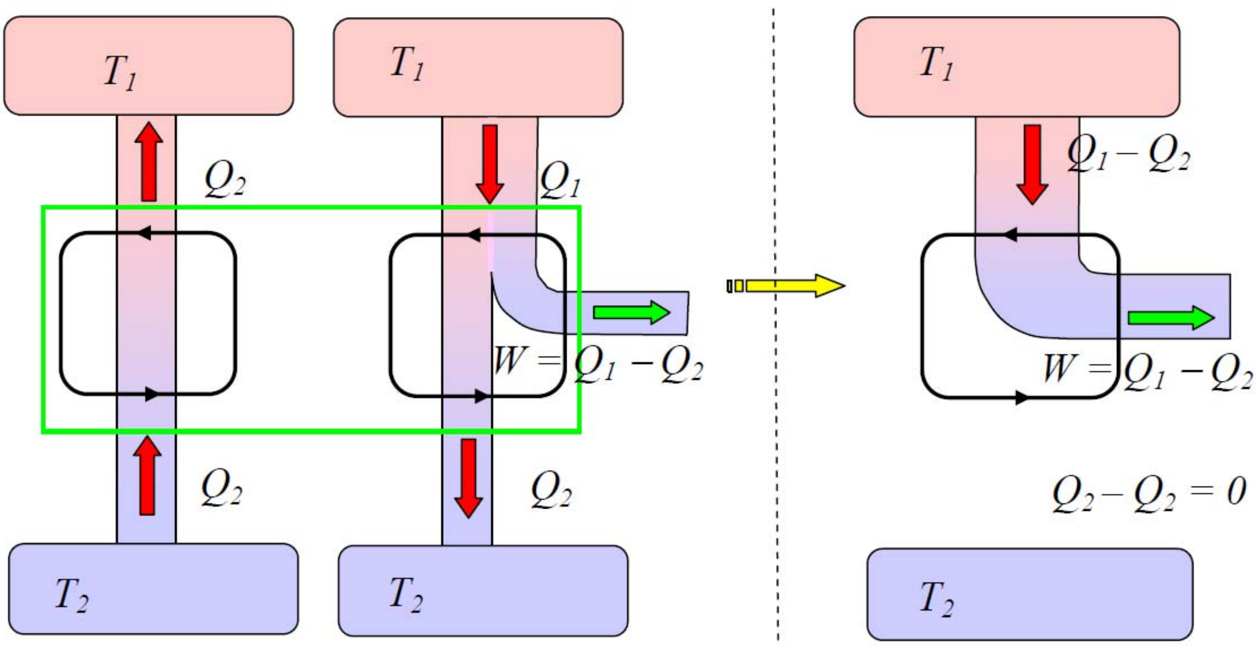


Fig. 11a *Fig. 11b*

Immaginiamo di far operare le due macchine insieme (rettangolo verde), otteniamo una macchina termica schematizzata in *fig. 11b* che trasforma in lavoro W tutto il calore $(Q_1 - Q_2)$ prelevato da T_1, ovvero otteniamo una macchina termica ideale che si è assunto non esistere; quindi è errata l'affermazione di partenza.

Supponiamo che esista una macchina termina ideale, ma non esista una macchina frigorifera ideale come schematizzato in *fig. 12a.*

La macchina termica ideale preleva un calore Q_1 dalla temperatura T_1 e lo trasforma tutto in lavoro: $W = Q_1$. Questo lavoro è usato da una macchina frigorifera per trasferire un calore Q_2 dalla temperatura T_2 alla temperatura T_1 $(T_1 > T_2)$ cedendovi un calore: $|Q_3| = Q_2 + W$.

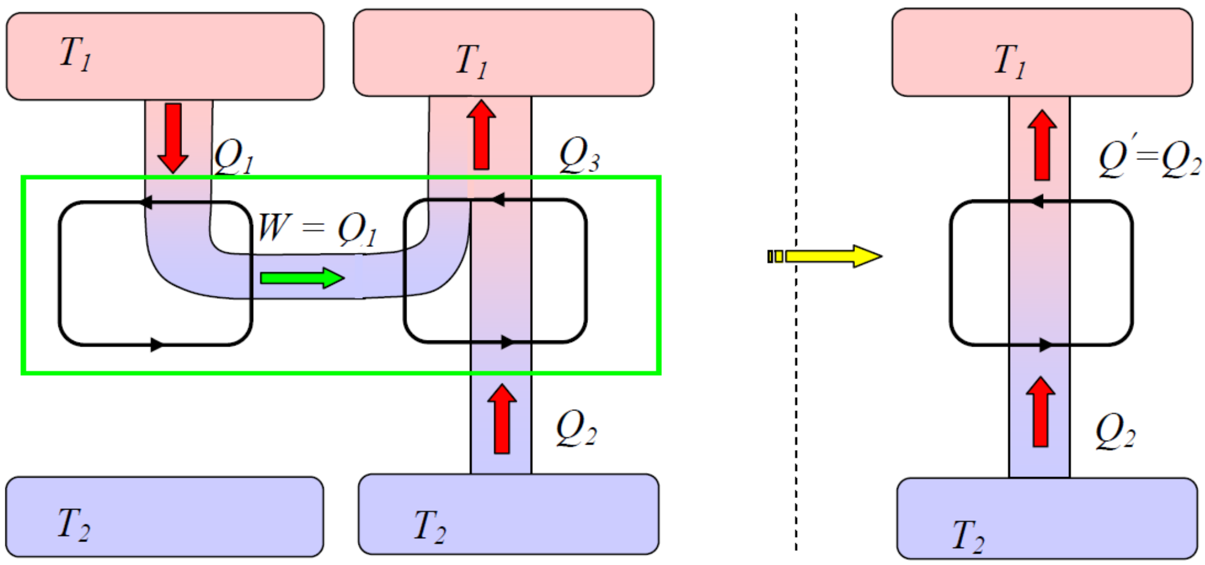


Fig. 12a

Fig. 12b

Immaginiamo di far operare le due macchine insieme (rettangolo verde), otteniamo una macchina termica schematizzata in *fig. 12b* che assorbe un calore Q_2 dalla temperatura T_2 e cede un calore Q' alla temperatura T_1 senza bisogno di lavoro. Osserviamo che il calore totale Q' scambiato a temperatura T_1 è:

$$Q' = |Q_3| - Q_1 = (Q_2 + W) - Q_1 \quad \text{con} \quad W = Q_1 \quad \Rightarrow \quad Q' = (Q_2 + Q_1) - Q_1 = Q_2$$

Otteniamo che la macchina termica in *fig. 12b* trasferisce una quantità di calore Q_2 dalla temperatura T_2 ad una temperatura T_1 senza impiego di lavoro ovvero è un macchina frigorifera ideale che si è assunto non esista. Segue che è errata l'affermazione di partenza.

7) Il rendimento delle macchine termiche

Visto che il secondo principio stabilisce che per una macchina termica $\eta < 1$, è naturale chiedersi se esiste, fissate le temperature fra cui far lavorare una macchina termica, un rendimento ottimale. La risposta è data dal *Teorema di Carnot* che stabilisce:

a) Tutte le macchine termiche reversibili che utilizzano due sole sorgenti di calore a temperature T_1 e T_2 (con $T_1 > T_2$) hanno lo stesso rendimento η_R, pari a quello (η_C) di una macchina di Carnot che operi fra la medesima coppia di sorgenti: $\eta_R = \eta_C$

b) Le macchine termiche irreversibili che utilizzano due sole sorgenti di calore a temperature T_1 e T_2 (con $T_1 > T_2$) hanno un rendimento η_{Irr} sempre minore di quello (η_C) di una macchina di Carnot che operi fra la stessa coppia di sorgenti: $\eta_{Irr} < \eta_C$

La dimostrazione si effettua ragionando *per assurdo*, assumendo cioè che il rendimento di una macchina reversibile sia maggiore di quello della macchina di Carnot. Si dimostra che la conseguenza di questa ipotesi è la violazione del secondo principio della termodinamica.

Dimostrazione (parte a)

Siano H_{R1} ed H_{R2} due macchine termiche reversibili che operano tra le sorgenti a temperature T_1 e T_2 ($T_1>T_2$) con rendimento rispettivamente η_{R1} e η_{R2}. Supponiamo che $\eta_{R1} > \eta_{R2}$. Essendo le macchine reversibili, facciamo compiere un ciclo inverso (frigorifero) a H_{R2} usando esattamente il lavoro prodotto in un ciclo dalla macchina H_{R1} come schematizzato in *fig. 13a*.
Dalla definizione di rendimento e dalla condizione $\eta_{R1} > \eta_{R2}$ segue:

$$\frac{W}{|Q'_1|} > \frac{W}{|Q_1|} \Rightarrow \frac{1}{|Q'_1|} > \frac{1}{|Q_1|} \Rightarrow |Q'_1| < |Q_1|.$$ Da ciò e dalla definizione di lavoro:

$$W = |Q'_1| - |Q'_2| = |Q_1| - |Q_2| \Rightarrow Q_2| - |Q'_2| = |Q_1| - |Q'_1|| = Q > 0$$

Se ora immaginiamo di far operare le due macchine insieme (rettangolo verde) otteniamo una macchina termica schematizzata in *fig. 13b*. Osserviamo che essa preleva dalla sorgente a temperatura T_2 un calore $Q = |Q_2| - |Q'_2| > 0$ e trasferisce dalla sorgente a temperatura T_1 ($T_1 > T_2$) un calore $Q = |Q_1| - |Q'_1| > 0$ senza impiego di lavoro esterno ossia: *H è una macchina frigorifera perfetta*. Poiché non esiste una macchina frigorifera perfetta, non può essere $\eta_{R1} > \eta_{R2}$.

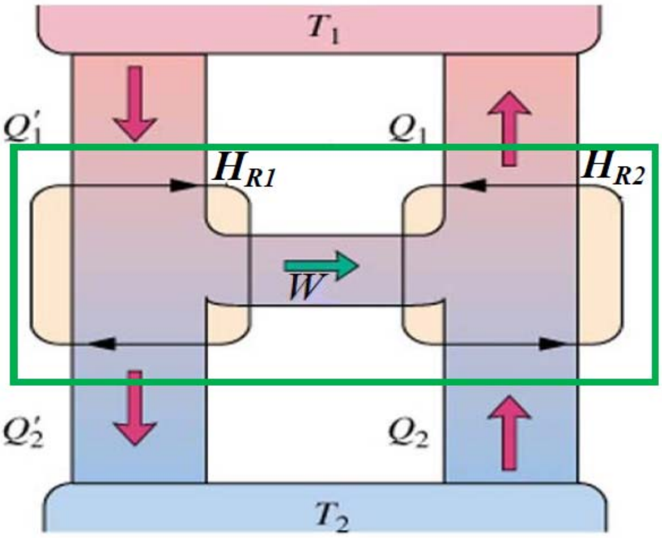


fig. 13a

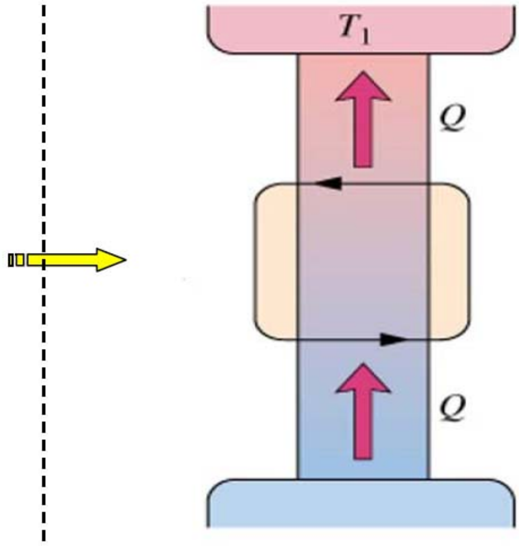


fig. 13b

Supponiamo ora che sia $\eta_{R2} > \eta_{R1}$. Ripetendo il ragionamento precedente, scambiato il ruolo di H_1e H_2, si arriva alla conclusione che non può essere $\eta_{R2} > \eta_{R1}$

Quindi $\Rightarrow$ $\eta_{R1} = \eta_{R2}$ $\Rightarrow$ $\eta_R = \eta_C$

Dimostrazione (parte b)

Siano H_{Irr} una macchina termica irreversibile e H_R una macchina termica reversibile entrambe operanti tra le sorgenti a temperature T_1 e T_2 ($T_1 > T_2$) con rendimento rispettivamente η_{Irr} e η_C. Supponiamo che $\eta_{Irr} > \eta_C$. Facciamo compiere un ciclo inverso (macchina frigorifera) a H_R (reversibile) usando esattamente il lavoro prodotto in un ciclo dalla macchina $H_{Irr.}$ Procedendo come prima si arriva alla conclusione che non può essere $\eta_{Irr} > \eta_C$. L'altra condizione ($\eta_C < \eta_{Irr}$) non essere esclusa perché la macchina termica H_{Irr} non può compiere un ciclo inverso, essendo irreversibile,

quindi $\Rightarrow$ $\eta_{Irr} \leq \eta_C$

Conclusione: Nessuna macchina termica può avere un rendimento maggiore della corrispondente macchina di Carnot operante fra le stesse temperature; nel migliore dei casi il rendimento può essere pari a quello di Carnot. In ciò risiede l'importanza del ciclo ovvero della macchina di Carnot.