Equilibrio dei corpi rigidi- Statica

Ci riferiamo solo a situazioni particolari in cui i corpi rigidi non si muovono in nessun modo: ne traslano ($\vec{a}_{CM} = 0$), ne ruotano ($\vec{\alpha} = 0$), ossia sono fermi in un opportuno sistema di riferimento inerziale $\Rightarrow$ equilibrio statico

Dalla dinamica sappiamo che, per un corpo rigido di massa M e momento di inerzia I,

1) le traslazioni sono regolate da $M\vec{a}_{CM} = \vec{F}^R_{est}$
2) le rotazioni sono regolate da $I\vec{\alpha} = \vec{\tau}^R_{est}$

quindi, affinché il corpo sia in equilibrio statico, deve risultare:

$$\vec{F}^R_{est} = \sum \vec{F}_{est} = 0 \qquad \text{equilibrio delle forze}$$

$$\vec{\tau}^R_{est} = \sum \vec{\tau}_{est} = 0 \qquad \text{equilibrio dei momenti}$$

Due osservazioni importanti:

1) le precedenti sono due equazioni vettoriali indipendenti, ossia non è possibile ricavare $\vec{\tau}^R_{est}$ da $\vec{F}^R_{est}$
2) per calcolare $\vec{\tau}^R_{est}$ serve un punto origine O; ma si dimostra che se un insieme di forze ha $\vec{F}^R_{est} = 0$, allora $\vec{\tau}^R_{est}$ è indipendente dal punto rispetto al quale è calcolato e se risulta nullo per un punto O lo è anche per qualunque altro punto.

Trovare le condizioni di equilibrio di un corpo equivale quindi a trovare le condizioni che soddisfano contemporaneamente le equazioni vettoriali:

$$\begin{cases} \sum \vec{F}_{est} = 0 \\ \sum \vec{\tau}_{est} = 0 \end{cases}$$

ovvero le seguenti a 6 equazioni scalari:

equilibrio delle forze

$$\sum F_{est,x} = 0 \qquad \sum F_{est,y} = 0 \qquad \sum F_{est,z} = 0$$

equilibrio dei momenti

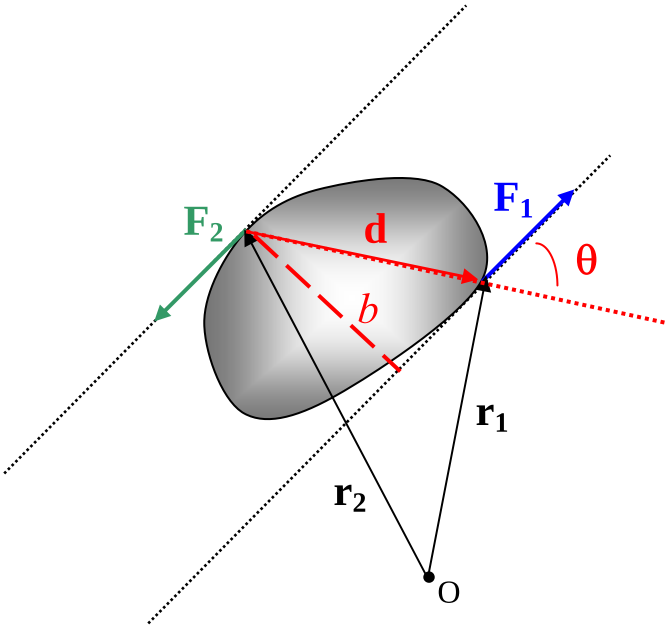
$$\sum \tau_{est,x} = 0 \qquad \sum \tau_{est,y} = 0 \qquad \sum \tau_{est,z} = 0$$

Concettualmente è semplice, in pratica può risultare molto difficile.

Il problema si semplifica molto se le forze agenti sono tutte in un piano (assunto piano *xy*). In tal caso i momenti hanno solo la componente *z* e quindi devono essere soddisfare solo le 3 seguenti equazioni:

1.1 $\Sigma F_{est,x} = 0$ $\Sigma F_{est,y} = 0$ $\Sigma \tau_{est,z} = 0$.

Giustifichiamo ora le precedenti *osservazioni* con un esempio: un insieme di forze costituito da due sole forze uguali in modulo, di verso opposto che agiscono lungo direzioni parallele distanti b; quindi $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$



Con riferimento alla figura,

$$\vec{F}^R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

$$\vec{\tau}^R = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$

Ricordando che $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ e posto $\vec{d} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, si ha

$$\vec{\tau}^R = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 - \vec{r}_2 \times \vec{F}_1 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 \Rightarrow \tau^R = dF_1 sen\theta = (dsen\theta)\vec{F}_1 = b \cdot F_1 \neq 0$$

Risulta che questo insieme di forze ha:

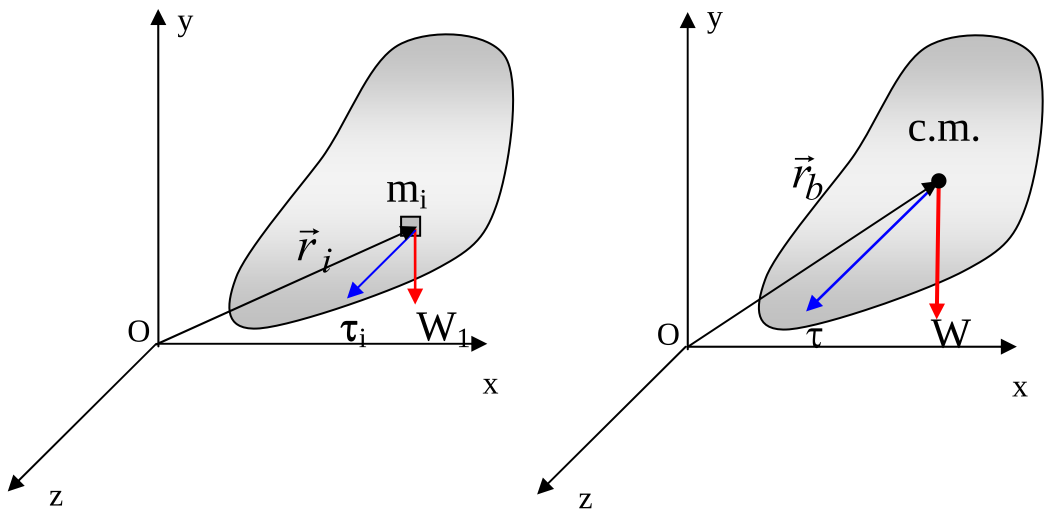
1) $\vec{F}^R = 0$ e $\vec{\tau}^R \neq 0$, e quindi $\vec{\tau}^R$ non può essere calcolato da $\vec{F}^R$, ovvero $\vec{\tau}^R$ è indipendente da $\vec{F}^R$ come detto nell'osservazione.

2) $\tau^R = b \cdot F_1$ non dipendente da O, in accordo all''osservazione.

Poichè $\vec{\tau}^R_{est}$ non può essere ricavato fa $\vec{F}^R_{est}$, un insieme di forze applicate ad un corpo sarà riducibile al più in:

una sola forza $\vec{F}^R_{est}$ applicata al CM responsabile delle traslazioni	+	un solo momento delle forze $\vec{\tau}^R_{est}$ responsabile delle rotazioni.

C'è una eccezione (importante perché è il caso della forza peso) quando le forze che agiscono sono tutte parallele fra loro.



1.2 $\vec{F}^R = \sum m_i\vec{g} = \left(\sum m_i\right)\vec{g} = M\vec{g}$ con $M = \sum m_i$

1.3 $\vec{\tau}^R = \sum \vec{\tau}_i = \sum\left(\vec{r}_i \times m_i\vec{g}\right) = \sum\left(m_i\vec{r}_i \times \vec{g}\right) = \left(\sum m_i\vec{r}_i\right)\times \vec{g}$,

dalla 1.2 segue che $\vec{F}^R // \vec{g}$, mentre dalla 1.3 su ha che $\vec{\tau}^R \perp \vec{g} \quad \Rightarrow \vec{\tau}^R \perp \vec{F}^R$.
Pertanto potrà esistere un punto, individuato da raggio vettore $\vec{r}_x$ tale che:

1.4 $\vec{\tau}^R = \vec{r}_x \times \vec{F}^R = \vec{r}_x \times M\vec{g}$.

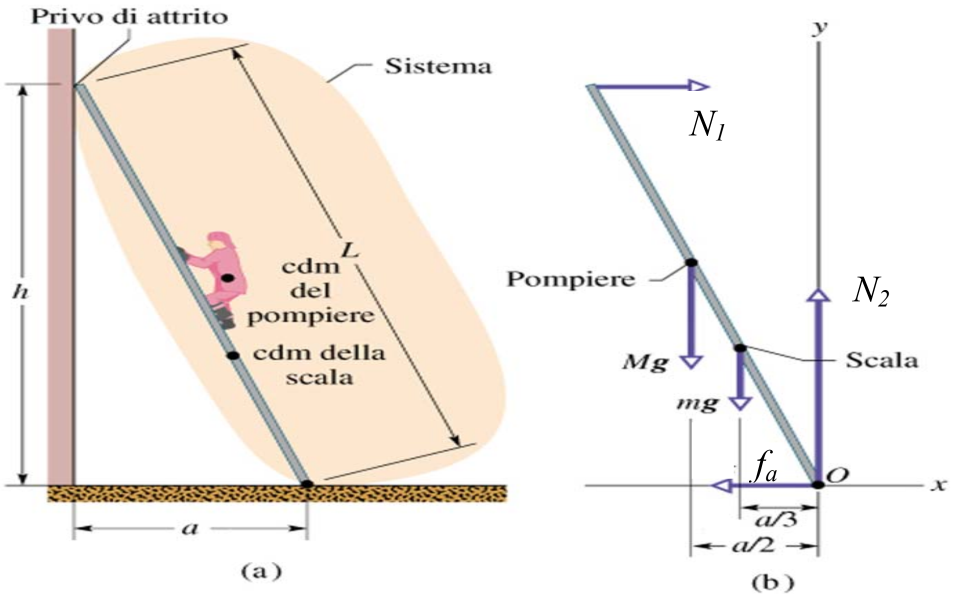
Confrontando la 1.3 con la 1.4 segue:

$$\vec{r}_x \times M\vec{g} = \left(\sum m_i\vec{r}_i\right)\times\vec{g} \Rightarrow \vec{r}_x \times \vec{g} = \left(\sum m_i\vec{r}_i / M\right)\times\vec{g} \Rightarrow \vec{r}_x = \frac{\sum m_i\vec{r}_i}{M} = \vec{r}_{cm}$$

Nel caso della forza peso, l'azione dell'insieme delle forze è equivalente a una sola forza risultante applicata al centro di massa (**baricentro**).

Esempi di corpo rigidi in equilibrio

1) Scala (di massa m) poggiata a un muro (privo di attrito) con un pompiere di massa M a metà di essa. (dimensioni e posizione del cdm della scala in figura)



N_1 e N_2 sono i vincoli normali esercitati rispettivamente dalla parete e dal piano; f_a è la forza di attrito statico.

Usando le condizioni di equilibrio (eq. 1.1) e il punto O come punto di riferimento per il calcolo dei momenti otteniamo.

1.5 $\sum F_x = 0, \quad \Rightarrow N_1 - f_a = 0$

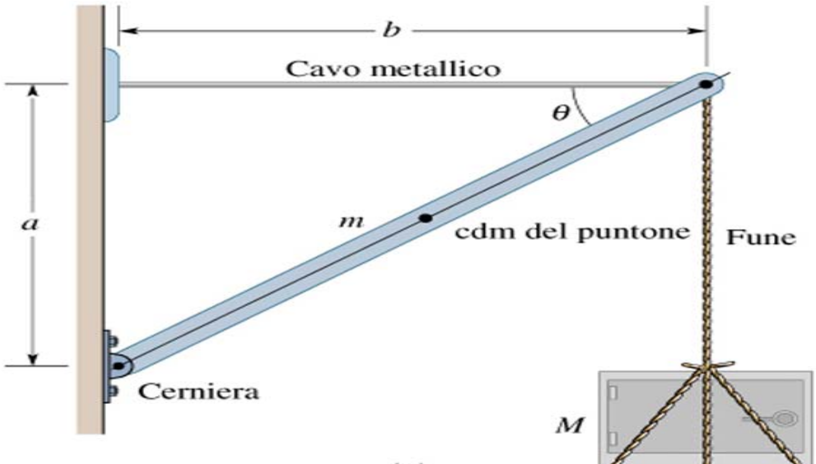
1.6 $\sum F_y = 0, \quad \Rightarrow N_2 - Mg - mg = 0$

1.7 $\sum \tau_z = 0, \quad \Rightarrow Mg\dfrac{a}{2} + mg\dfrac{a}{3} - hN_1 = 0$

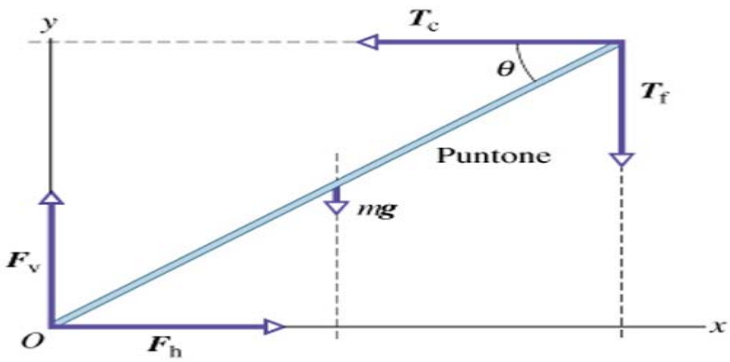
Nel calcolo dei momenti (per il quale si è usato il metodo di moltiplicare la forza per il braccio) si deve notare che il momento di N_1 è opposto ai momenti delle forze peso, assunti positivi.

La 1.5 mostra che la forza di attrito statico è, in questo caso, indispensabile per avere l'equilibrio

2) Massa m sostenuta da un'asse e da un cavo.
(dimensioni e posizione del cdm del asse in figura)



(a)



(b)

.

Usando le condizioni di equilibrio (eq. 1.1) e il punto O come punto di riferimento per il calcolo dei momenti otteniamo che per l'equilibrio deve aversi:

$\sum F_x = 0, \qquad \Rightarrow F_h - T_c = 0$

$\sum F_y = 0, \qquad \Rightarrow F_v - T_f - mg = 0 \quad (T_f = Mg)$

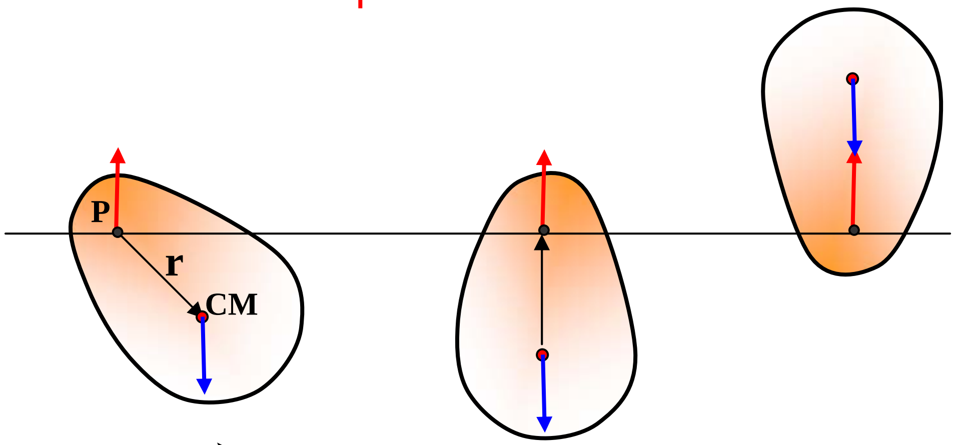
$\sum \tau_z = 0, \qquad \Rightarrow bT_f + (b/2)mg - aT_c = 0$

Nel calcolo dei momenti (per il quale si è usato il metodo di moltiplicare la forza per il braccio) si deve notare che il momento di T_c è opposto al momento delle forza peso e al momento di T_f.

Casi particolari di corpo rigido in equilibrio

a) Corpo con un solo punto di sospensione P, privo di attrito

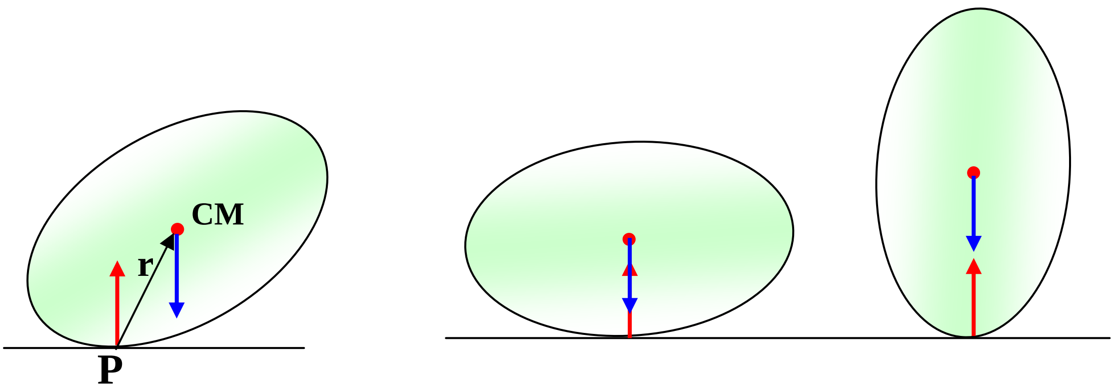
W = forza peso N = vincolo forza risultante nulla



$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{W} \neq 0$	$\vec{\tau} = 0$ $U_p^{CM}\, min$	$\vec{\tau} = 0$ $U_p^{CM}\, max$
Non equilibrio	equilibrio stabile	equilibrio instabile

b) Corpo con un solo punto di contatto P su un piano privo di attrito

W = forza peso N = vincolo forza risultante nulla



$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{W} \neq 0$	$\vec{\tau} = 0$ $U_p^{CM}\, min$	$\vec{\tau} = 0$ $U_p^{CM}\, max$
Non equilibrio	equilibrio stabile	equilibrio instabile

C) Corpo con una base di appoggio su un piano privo di attrito

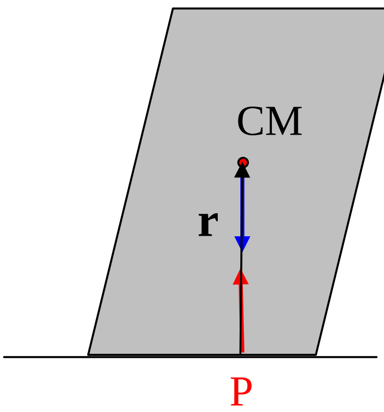
Dato un corpo di massa M poggiato su un piano orizzontale, si dimostra che i vincoli che si sviluppano per ogni punto di contatto all'interno della base di appoggio hanno una risultante $\vec{N} = \sum \vec{N}_i = -M\vec{g}$ applicata:

a) nel punto P di intersezione della verticale passante per il CM ed il piano di appoggio, se P è all'interno del perimetro dei punti di contatto,

b) nel punto di contatto Q più vicino a P, se P è fuori del perimetro dei punti di appoggio.

W = forza peso   N = vincolo   forza risultante nulla

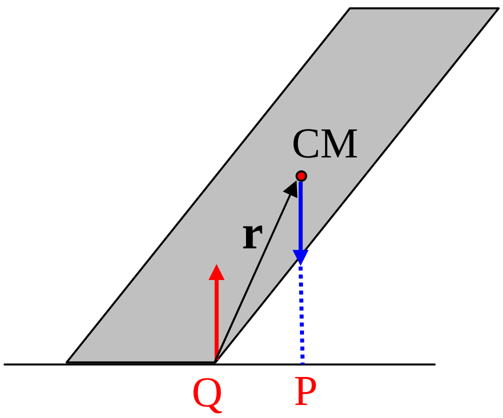
caso a)



$\vec{\tau}_P = 0$

equilibrio stabile

caso b)



$\vec{\tau}_Q = \vec{r} \times \vec{W} \neq 0$

non equilibrio