

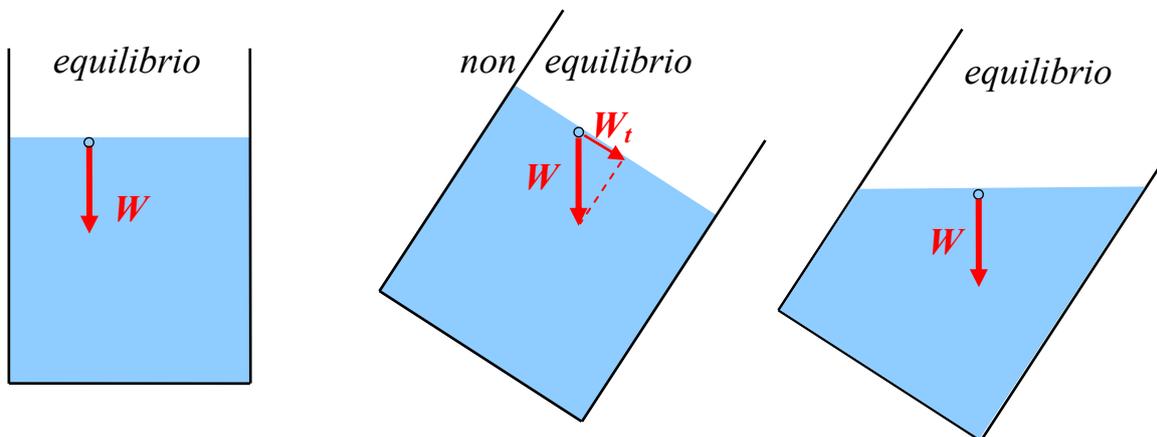
La statica dei fluidi

1) Introduzione

La materia si presenta in tre stati di aggregazione, in conseguenza della diversa intensità delle interazioni che legano insieme i componenti (molecole) delle sostanze:

- solido: le sostanze hanno forma e volume definito a causa di interazioni molto intense fra i costituenti,
- liquido: le sostanze hanno un volume definito, ma non una forma propria, a causa di interazioni deboli fra i costituenti,
- aeriformi (gas): le sostanze non hanno un volume definito e occupano tutto lo spazio a disposizione poiché le interazioni fra i costituenti sono praticamente nulle.

Genericamente gas e liquidi sono detti fluidi. Una definizione più quantitativa di fluido: **un fluido non è in grado di sostenere uno sforzo di taglio** (una forza parallela alla superficie libera) ovvero si deforma fino a che le forze parallele alla superficie diventano nulle. Questo è evidente in *fig.1*: la superficie libera del fluido all'equilibrio è sempre orizzontale perché solo in tal modo le forze agenti (la forza peso delle molecole della superficie) non hanno componenti parallele alla superficie libera.



Recipiente verticale

fig. 1a

*Recipiente obliquo,
immediatamente dopo
la rotazione*

fig. 1b

Recipiente obliquo

fig. 1c

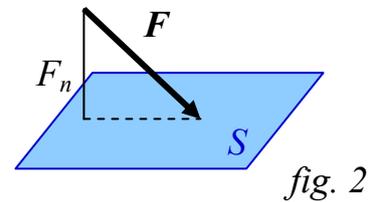
Per studiare i fluidi, poiché non hanno una forma propria, più utili del concetto di massa e forza sono:

- a) la **densità**: $\rho = \frac{M}{V}$ con M massa del fluido che occupa il volume V (in Kg/m^3). La densità è costante per i solidi e può essere considerata ragionevolmente costante anche per i liquidi, mentre per i gas dipende fortemente dalle condizioni ambientali.

Alcuni esempi: $\rho_{Fe} = 7,8 \cdot 10^3 \text{ Kg/m}^3$, $\rho_{Al} = 2,7 \cdot 10^3 \text{ Kg/m}^3$, $\rho_{Acqua} = 1 \cdot 10^3 \text{ Kg/m}^3$.

- b) la **pressione** $p = \frac{F_n}{S}$

con F_n componente normale della forza \vec{F} incidente su una superficie piana S (in N/m^2) (vedi fig. 2). Si nota che la pressione è una grandezza scalare e la forza che possiamo calcolare come pS è solo la componente della forza normale alla superficie S. L'unità di misura N/m^2 è anche indicata come *Pascal* (Pa) $\Rightarrow 1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$. La pressione è anche misurata in *atmosfera* (Atm) che definiremo in seguito.



2) Legge di Stevino

Iniziamo con osservare che i fluidi in equilibrio contenuti in un recipiente esercitano delle forze sulle le pareti. Questo è evidente in fig. 3b: un foro nelle parete causa il movimento del fluido per l'azione di una forza F_ℓ generata dal fluido, che altrimenti è annullata dalla rigidità T_p della parete (fig. 3a). La direzione di uscita del fluido, perpendicolare alla parete, suggerisce che F_ℓ agisce perpendicolarmente alla parete.

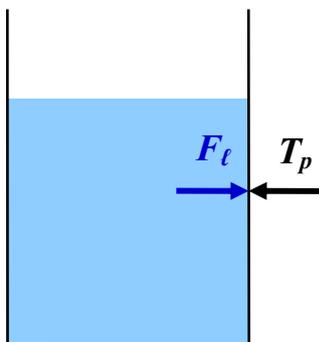


fig. 3a

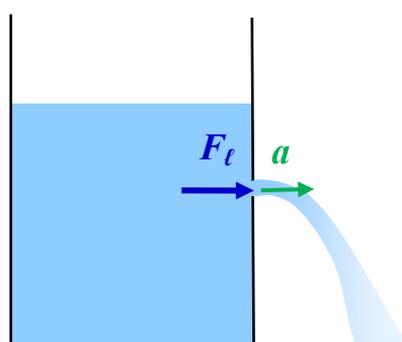


fig. 3b

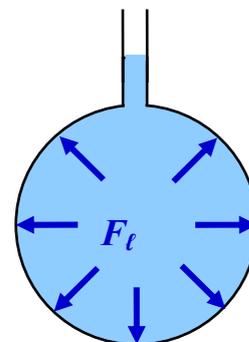


fig. 3c

Un'ulteriore prova di ciò si ha riempiendo con un fluido un recipiente avente pareti perfettamente elastiche, questo assume una forma sferica che è l'unica in grado di garantire che F_ℓ sia perpendicolare a ogni punto della parete (fig. 3c).

Un'altra semplice osservazione permette di affermare che anche all'interno di un fluido in equilibrio si esercitano delle forze F_ℓ generate dal fluido stesso. Se togliamo del fluido all'interno di un recipiente con una cannuccia (fig. 4a), il "buco" che istantaneamente creiamo è immediatamente riempito dalle molecole attigue che per muoversi devono risentire di una forza F_ℓ . Inoltre poiché ogni piccolissimo elemento di fluido, di superficie ΔS , comunque orientata e dovunque nel fluido, deve essere in equilibrio segue che le forze F_ℓ (vedi fig. 4b) devono essere sempre perpendicolari a ΔS , agire su entrambe le sue facce e puntare verso di esse.

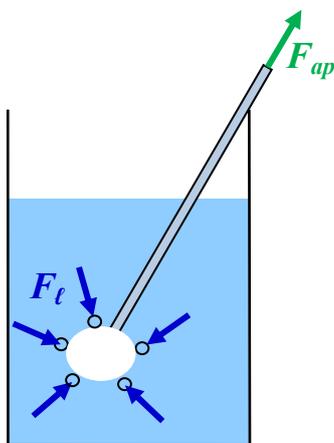


fig. 4a

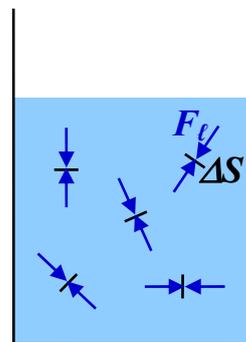


fig. 4b

Poiché le forze F_ℓ sono perpendicolari sia alle pareti sia a una qualsiasi superficie ΔS interna al fluido si parla generalmente di **pressione p esercitata dal fluido** e la forza F_ℓ , detta **forza di pressione**, esercitata su una superficie S può valutata come:

$$F_\ell = F = pS.$$

Il problema è ora di calcolare p . Consideriamo un fluido in equilibrio di densità ρ e concentriamoci su una sua porzione cilindrica di altezza $\Delta y = y_2 - y_1$ e di area di base S sufficientemente piccola da poter assumere le pressioni costanti su ciascuna delle due basi. (vedi fig. 5). Indichiamo con p_1 e p_2 le pressioni nelle posizioni y_1 e y_2 rispettivamente.

Le forze agenti su questo cilindretto sono:

- la forza peso: $\vec{W} = m\vec{g} = \rho V\vec{g} = \rho S\Delta y\vec{g}$
- le forze di pressione sulla base superiore \vec{F}_2 in modulo $F_2 = p_2 S$
- le forze di pressione sulla base inferiore \vec{F}_1 in modulo $F_1 = p_1 S$
- le forze di pressione sulla superficie laterale \vec{F}_3 .

Poiché la porzione di fluido è in equilibrio deve essere:

$$a) \sum \vec{F}_3 = 0$$

$$b) \vec{W} + \vec{F}_2 + \vec{F}_1 = 0$$

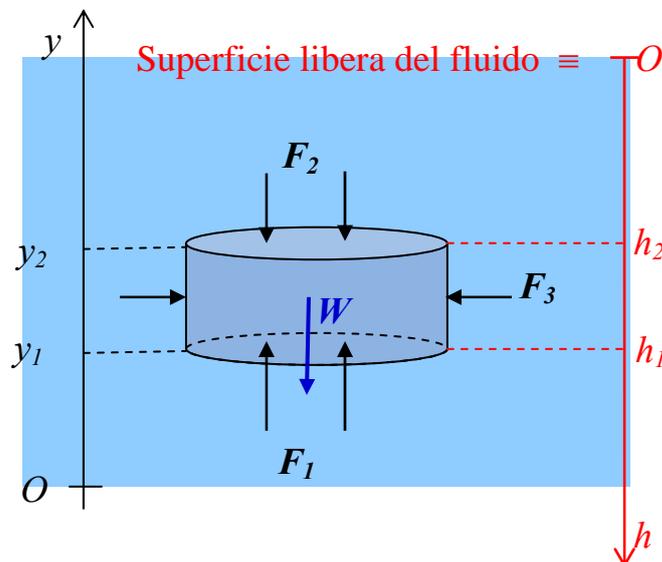


fig. 5

Dalla b, segue: $p_1 S - \rho S \Delta y g - p_2 S = 0 \Rightarrow$

$$2.1 \quad p_1 = p_2 + \rho \Delta y g.$$

Poiché in pratica per un punto immerso in un fluido è più comodo misurare la *profondità* h (vedi fig. 5) piuttosto che l'*altezza* y rispetto al fondo, sostituiamo nella 2.1 Δy con $\Delta h = h_1 - h_2 \Rightarrow$

$$2.2 \quad p_1 = p_2 + \rho (h_1 - h_2) g$$

La 2.2 vale per qualsiasi h_1 e/o h_2 quindi scriviamola per un generico punto a profondità $h = h_1$ e con $h_2 = 0$ (ossia sulla superficie libera del fluido) osservando che in questo caso $p_2 = p_0$ sarà eventualmente dovuta a cause esterna al fluido ($p_0 =$ *pressione esterna* ovvero pressione sulla superficie del fluido). Segue:

$$2.3 \quad p(h) = p_0 + \rho g h \quad \text{detta } \textit{legge di Stevino}$$

Questa relazione mostra che la pressione in un punto dipende solo dalla *posizione verticale del punto rispetto al fluido* e che essa aumenta con la *profondità* h del punto.

Si sottolinea che, a dispetto del nome, la 2.3 non è una nuova legge ma solo una riformulazione del principio di equilibrio, in termini più opportuni per i fluidi. Essa ci spiega l'origine della pressione nei fluidi: *la pressione è una manifestazione della forza peso*. Infatti, la pressione dovuta al fluido in un punto a profondità h , ovvero il termine $\rho g h$, è la forza peso esercitata da colonna di fluido di sezione unitaria e

altezza h sopra il punto. Se, ad esempio, il fluido è acqua ($\rho = 1000 \text{ Kg/m}^3$) e la profondità $h = 10 \text{ m}$ si ha $\rho gh = 9,8 \cdot 10^4 \text{ Pa}$ all'incirca uguale alla pressione esercitata dall'aria sulla superficie terrestre (*pressione atmosferica*, vedi par. 3.3) pari a $\approx 10^5 \text{ Pa}$.

Dobbiamo sottolineare che la relazione precedente è essenzialmente valida solo per i liquidi infatti è ricavata assumendo che $\rho = \text{cost}$, situazione che sicuramente non è valida per grosse quantità di gas dove $\rho = \rho(h)$. Ma essa non spiega neanche la pressione esercitata da modeste quantità di gas racchiuse in un recipiente quando la condizione $\rho = \text{cost}$ può essere valida; infatti per un gas ($\rho \approx 1 \text{ Kg/m}^3$) e per una profondità $h = 10 \text{ m}$ si ha $\rho gh = 98 \text{ Pa}$ ossia un valore completamente trascurabile rispetto alla pressione atmosferica; di conseguenza un gas in un recipiente dovrebbe essere sempre a pressione atmosferica; cosa che non si verifica sperimentalmente. Dovremmo trovare un'altra causa per spiegare la pressione nei gas (vedi par 6).

3) Conseguenza della legge di Stevino.

3.1) Il principio dei vasi comunicanti.

Consideriamo recipienti di forma diversa riempiti dello stesso fluido, collegati fra loro e superiormente aperti (*fig. 6*). All'equilibrio, affinché il fluido sia fermo, deve aversi che punti qualsiasi A e B della retta orizzontale r devono avere la stessa pressione, altrimenti il fluido si muoverebbe da punti a pressione maggiore (soggetti a forze più intense) verso punti a pressione minore (soggetti a forze meno intense), quindi:

$$p_A = p_B \Rightarrow p_0 + \rho gh_A = p_0 + \rho gh_B \Rightarrow h_A = h_B = h$$

ossia **il livello del fluido è lo stesso in tutti i contenitori a prescindere dalla loro forma** (fatto noto con il nome di *principio dei vasi comunicanti*).

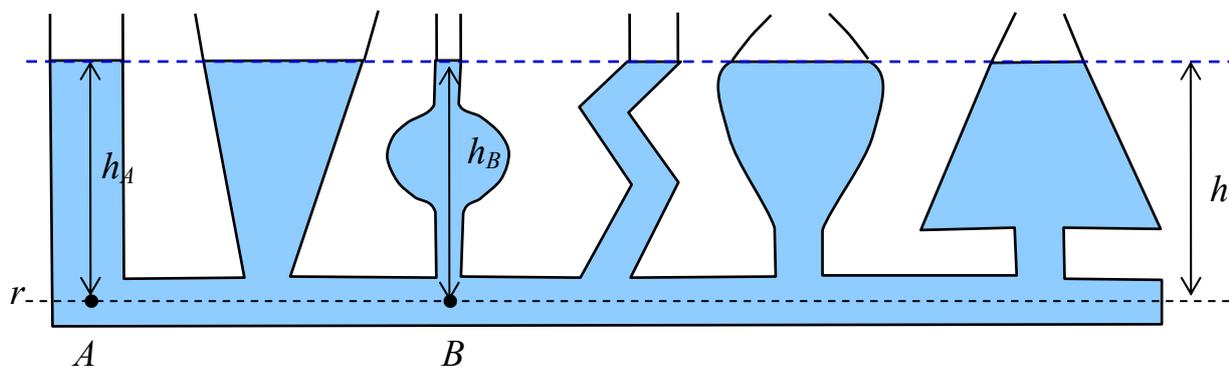


fig. 6

3.2) Equilibrio di liquidi diversi e non miscibili.

Consideriamo due fluidi diversi, di densità ρ_1 e ρ_2 , non miscibili posti in due recipienti comunicanti e aperti superiormente. Poiché abbiamo appena visto che la forma dei recipienti è irrilevante, assumiamo che si tratta di un tubo piegato a U come in *fig. 7*.

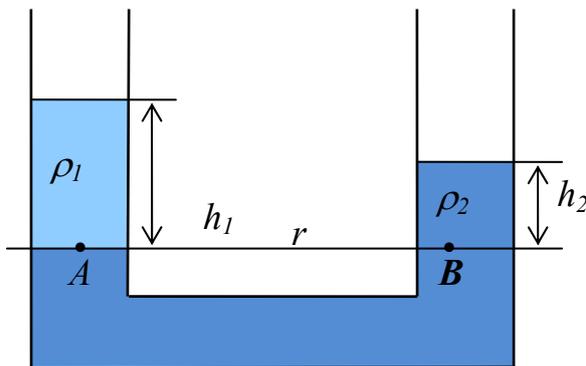


fig. 7

All'equilibrio, affinché i fluidi siano fermi, deve aversi che i punti della retta orizzontale r devono avere la stessa pressione, quindi:

$$p_A = p_B \Rightarrow p_0 + \rho_1 g h_1 = p_0 + \rho_2 g h_2 \\ \Rightarrow \rho_1 h_1 = \rho_2 h_2.$$

Se le densità sono diverse, all'equilibrio i fluidi hanno altezze diverse; assumendo (come in *fig. 7*) $\rho_1 < \rho_2 \Rightarrow h_1 > h_2$.

3.3) La misura della pressione atmosferica.

La verifica dell'esistenza della pressione atmosferica e la sua misura sono dovute a E. Torricelli (nel 1644) con una esperienza, che porta il suo nome, qui schematicamente descritta. Se un tubo chiuso superiormente, in cui è stata tolta l'aria, è immerso in un liquido si nota, al raggiungimento dell'equilibrio, un innalzamento del fluido nel tubo fino alla quota h (vedi *fig. 8*). Affinché il fluido sia fermo, deve aversi che punti diversi a livello della superficie libera del fluido devono avere la stessa pressione, quindi: $p_A = p_B$ con

$p_A = p_0$, essendo A sulla superficie libera del fluido,

$p_B = p_0' + \rho g h$; ma la pressione nella parte libera del tubo è $p_0' = 0$ (questo perché in esso è stata tolta l'aria) $\Rightarrow p_B = \rho g h$.

Segue che $p_0 = \rho g h$ ovvero h è determinato dalla pressione atmosferica.

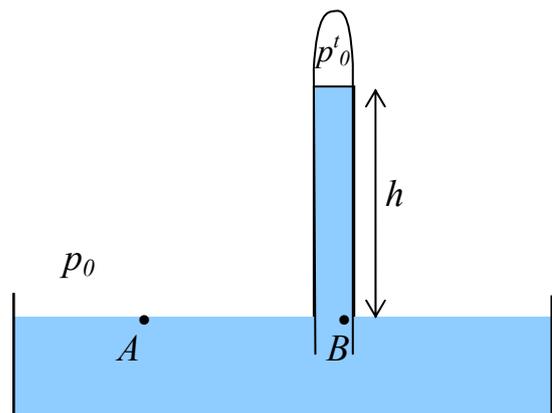


fig. 8

Torricelli usò come fluido il mercurio ($\rho = 13600 \text{ Kg/m}^3$) e, operando al livello del mare, trovò $h \sim 760 \text{ mm}$ e quindi $p_0 \sim 1,013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$. Poiché si notò subito che h variava leggermente con le condizioni metereologiche e con l'altezza dal livello del mare, si definì l'unità di misura della pressione, detta *atmosfera (Atm)*, quella pressione che causava un innalzamento $h = 760 \text{ mm}$ e quindi:

$$1 \text{ Atm} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$$

4) Il principio di Pascal.

Consideriamo un fluido ideale ($\rho = \text{cost}$) chiuso con un pistone a tenuta in un recipiente e supponiamo di variare la pressione esterna p_0 sul pistone di una quantità Δp (fig. 9). Per la legge di Stevino, in un punto qualsiasi A nel fluido, dove originariamente c'era una pressione $p_{i,A} = p_0 + \rho g h_A$ avremo ora:

$$p_{f,A} = p_0 + \Delta p + \rho g h_A = (p_0 + \rho g h_A) + \Delta p \Rightarrow p_{f,A} = p_{i,A} + \Delta p$$

ossia anche in A si ha lo stesso aumento di pressione Δp . Vista la genericità del punto A , possiamo dire che: **in un fluido incompressibile una variazione di pressione in un punto si trasmette identica su ogni punto.** (**Principio di Pascal**).

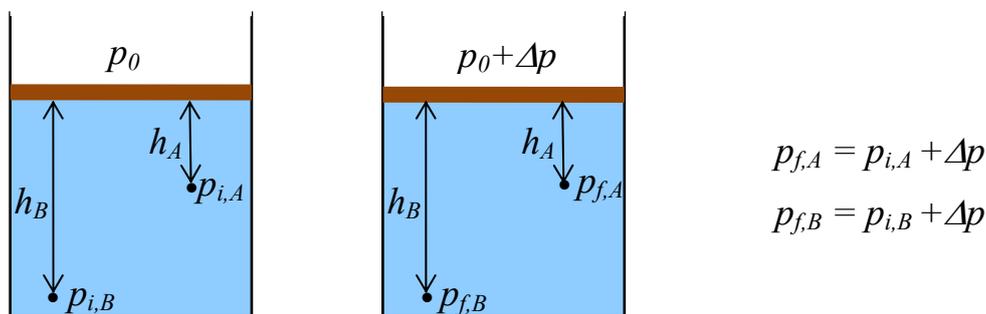


fig. 9

Ad esempio, applichiamo il principio di Pascal per fare uscire il dentifricio dal tubetto, dopo aver tolto il tappo, esercitando una pressione su esso; ma l'applicazione più importante si ha nella pressa idraulica.

4.1) La pressa idraulica

Consideriamo due recipienti comunicanti, riempiti con un fluido ideale ($\rho = \text{cost}$), di sezioni A_1 e A_2 , con $A_1 < A_2$, chiusi superiormente da pistoni a tenuta (fig.10). Esercitiamo su A_1 , una forza normale F_1 ; ciò corrisponde ad aumentare la pressione

sul fluido in contatto con A_1 di $\Delta p = F_1/A_1$. Per il principio di Pascal, lo stesso aumento lo troviamo sul fluido a contatto con A_2 dove si manifesta una forza F_2 :

$$F_2 = A_2 \Delta p = A_2 \frac{F_1}{A_1} = F_1 \frac{A_2}{A_1} \quad \Rightarrow F_2 > F_1 \quad \text{essendo } \frac{A_2}{A_1} > 1.$$

La forza F_2 risulta amplificata di un fattore A_2/A_1 ossia **la pressa idraulica ci permette di amplificare una forza.**

Notiamo che ciò può avvenire solo compatibilmente con la conservazione dell'energia, ossia il lavoro W_1 fatto da F_1 deve essere uguale al lavoro W_2 fatto da F_2 . Con riferimento alla *fig. 10*, se assumiamo che per azione delle forze gli spostamenti di A_1 e A_2 sono rispettivamente h_1 e $h_2 \Rightarrow$

$$W_1 = W_2 \Rightarrow F_1 h_1 = F_2 h_2 \Rightarrow F_1 h_1 = F_1 \frac{A_2}{A_1} h_2 \Rightarrow h_2 = h_1 \frac{A_1}{A_2} \quad \Rightarrow h_2 < h_1 \quad \text{essendo } \frac{A_1}{A_2} < 1,$$

cioè se sul lato 2 riusciamo ad ottenere una forza più intensa, allora lo spostamento sarà minore dello stesso fattore.

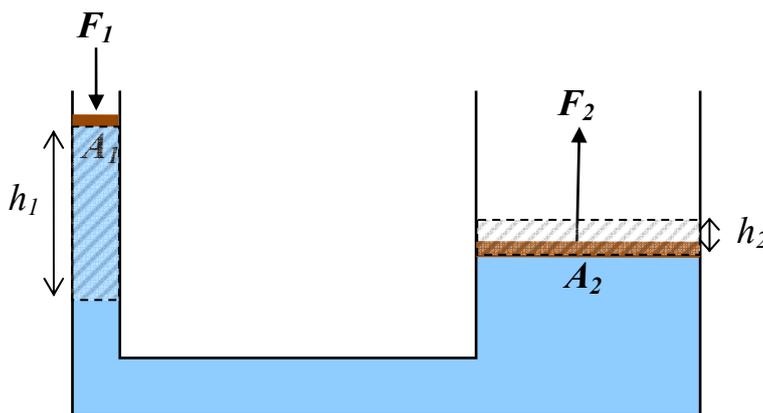


fig. 10

Alla stessa conclusione possiamo giungere usando la conservazione della massa: la quantità di massa che si sposta dal lato 1 (Δm_1) al lato 2 (Δm_2) deve essere la stessa:

$$\Delta m_1 = \Delta m_2 \Rightarrow \rho h_1 A_1 = \rho h_2 A_2 \Rightarrow h_1 A_1 = h_2 A_2 \Rightarrow h_2 = h_1 A_1 / A_2$$

5) Il principio di Archimede.

Consideriamo una porzione, di massa m , di un fluido in equilibrio (vedi *fig. 11a*). Affinché questa porzione sia in quiete deve essere $\vec{F}^R = 0$, ma poiché essa risente della forza peso $\vec{W} = m\vec{g}$ dobbiamo necessariamente pensare all'esistenza un'altra forza \vec{S} verticale, verso l'alto di modulo mg : $\vec{W} + \vec{S} = 0 \Rightarrow \vec{S} = -m\vec{g}$. L'esistenza di

questa forza \vec{S} , detta *Spinta di Archimede*, è conseguenza delle forze di pressione che agiscono sulla superficie del corpo; queste, per la legge di Stevino, sono più intense (vedi *fig. 11*) sulla parte più in profondità del corpo e quindi danno una risultante verso l'alto. Poiché le forze di pressione agiscono sulla superficie della porzione di fluido e dipendono dal fluido al suo esterno, se la porzione di fluido è sostituita con un corpo di forma identica (*fig. 11b*), esso continuerà a sentire la spinta \vec{S} ovvero un corpo immerso in un fluido riceve una spinta verticale dal basso verso l'alto, pari alla forza peso del volume V di fluido occupato. (Principio di Archimede).

5.1

$$S = \rho_L V g$$

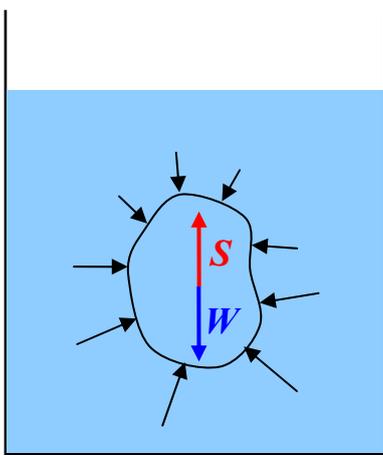


fig. 11a

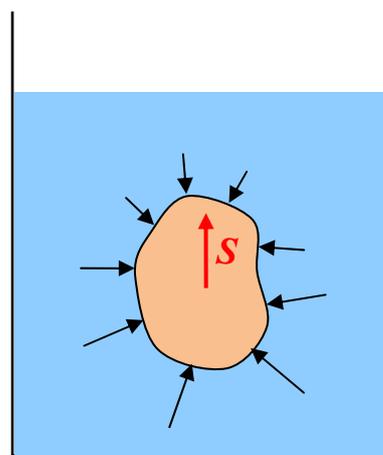


fig. 11b

L'affermazione che il principio di Archimede è una conseguenza delle forze di pressione, può essere visto più analiticamente considerando una porzione cilindrica

(di base S e altezza $h = h_1 - h_2$ come in *fig. 12*) di un fluido in equilibrio e calcolando le forze di pressione su di esso agenti.

All'equilibrio, le forze di pressione sulla superficie laterale hanno risultante nulla. Lungo la verticale abbiamo invece:

$$F_1 = p_1 S \quad \text{e} \quad F_2 = p_2 S \quad \text{con}$$

$$p_1 = p_0 + \rho g h_1 \quad \text{e} \quad p_2 = p_0 + \rho g h_2 \Rightarrow$$

$$F_1 = p_0 S + \rho g h_1 S$$

$$F_2 = p_0 S + \rho g h_2 S$$

con $F_1 > F_2$ essendo $h_1 > h_2$.

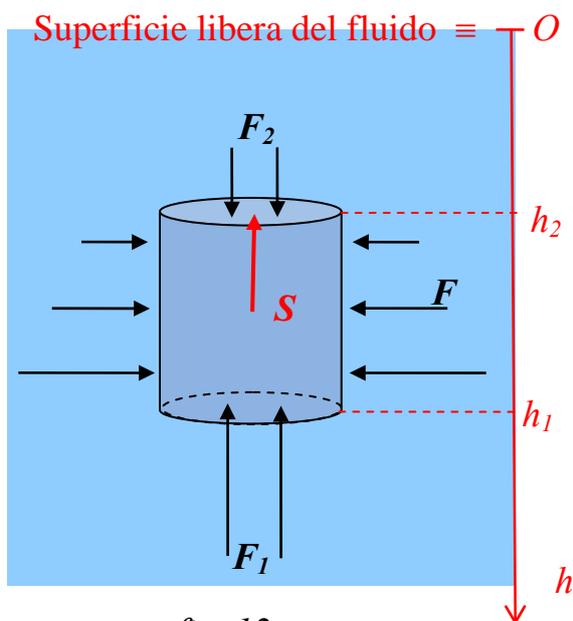


fig. 12

Di conseguenza, la risultante delle forze di pressione verticale è diversa da zero, è diretta verso l'alto e costituisce la **spinta S** . Infatti il suo modulo è pari a:

$$S = F_1 - F_2 = p_0 S + \rho g h_1 S - p_0 S - \rho g h_2 S = \rho g (h_1 - h_2) S = \rho g V = Mg$$

con V volume del cilindretto, $M = \rho V$ massa del cilindretto e Mg modulo della forza peso dovuto alla porzione di fluido racchiusa nel cilindretto, come atteso.

Si sottolinea che **la spinta è applicata al baricentro del volume del fluido occupato**.

5.1 Il galleggiamento

Se il cilindretto di base S e altezza h di *fig. 12* non è più una porzione di fluido ma un corpo solido di densità ρ_S il ragionamento precedente continua a valere per cui il corpo risentirà di una spinta $\vec{S} = -M\vec{g} = -\rho_L V \vec{g}$ e di una forza peso $\vec{W} = M_S \vec{g} = \rho_S V \vec{g}$ con $\vec{F}^R = \vec{W} + \vec{S} = \rho_S V \vec{g} - \rho_L V \vec{g} = (\rho_S - \rho_L) V \vec{g}$. Per capire ciò che succede dobbiamo distinguere tre casi:

- $\rho_S = \rho_L \Rightarrow |\vec{S}| = |\vec{W}| \Rightarrow \vec{F}^R = 0$ il corpo è in equilibrio.
- $\rho_S > \rho_L \Rightarrow |\vec{W}| > |\vec{S}| \Rightarrow \vec{F}^R$ è concorde con \vec{g} , il corpo si muove verso il basso (affonda) risentendo di una forza in modulo $(\rho_S - \rho_L) V g$ (detta **peso apparente**) minore della sua forza peso.
- $\rho_S < \rho_L \Rightarrow |\vec{S}| > |\vec{W}| \Rightarrow \vec{F}^R$ è discorde con \vec{g} , il corpo si muove verso l'alto risentendo di una forza in modulo $(\rho_L - \rho_S) V g$ fino a raggiungere una condizione di equilibrio (galleggiamento) caratterizzata da una configurazione in cui il corpo emerge parzialmente dal fluido (*fig. 13*). Infatti, essendo $\vec{W} = cost$, la condizione di equilibrio può essere raggiunta solo se \vec{S} diminuisce ovvero se il volume di fluido occupato V' diminuisce: $V' < V$.
All'equilibrio quindi si ha: $|\vec{W}| = |\vec{S}'| \Rightarrow \rho_L V g = \rho_S V' g \Rightarrow$

$$5.2 \quad \rho_L V = \rho_S V'$$

La 5.2 mostra che in effetti si può avere il galleggiamento anche di un corpo di densità $\rho_S > \rho_L$ giocando opportunamente con i volumi ossia realizzando, in questo caso, la condizione $V' < V$. Questo succede, come schematizzato in sezione in *fig. 14*, per esempio quando un tegame in acciaio (ρ_S) galleggia

sull'acqua (ρ_L). Al calcolo della forza peso interviene il volume V (in grigio in *fig. 14*) $W = \rho_S V g$, mentre la spinta è determinata dal volume V' (tratteggiato in celeste in *fig. 14*) $S = \rho_L V' g$: $\rho_S > \rho_S$ ma $V' < V$ e si ottiene l'equilibrio.

Si sottolinea che mentre \vec{S} è applicato al centro di massa di V' , \vec{W} è applicata al centro di massa di V : se i due centri non sono allineati con la verticale si generano delle rotazioni del corpo che qui tralasciamo di descrivere.

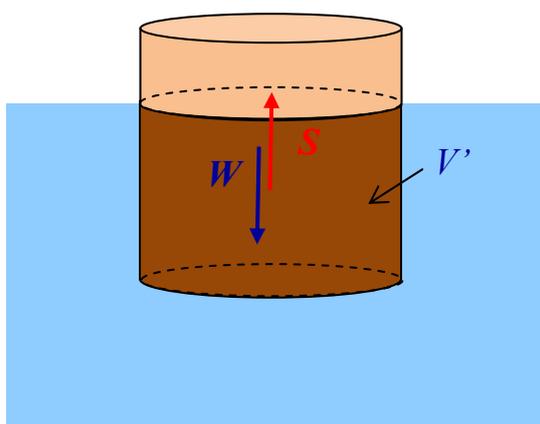


fig. 13

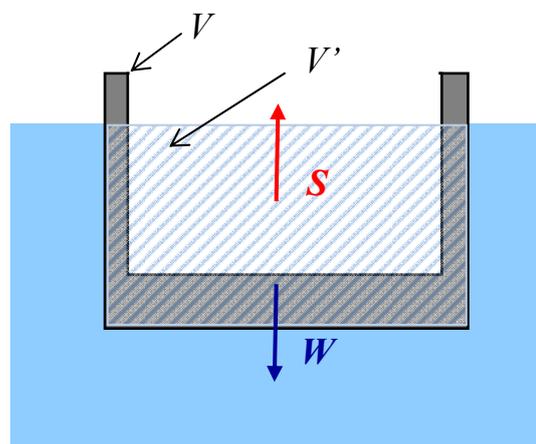


fig. 14

6) La pressione nei gas.

Per spiegare l'origine della pressione nei gas, dobbiamo costruirne un modello e chiameremo **gas ideale** il gas descritto da tale modello. Si sottolinea che tutti i gas in un ampio intervallo di condizioni possono essere considerati gas ideali. Il **modello di un gas ideale** si basa sulle seguenti assunzioni:

- Esso consiste di un numero N molto elevato di particelle puntiformi identiche ed indistinguibili di massa m ,
- le particelle si muovono di moto casuale e sono distribuite uniformemente nel volume occupato dal gas,
- il volume occupato dall'insieme delle particelle è trascurabile rispetto al volume occupato dal gas,
- le particelle non interagiscono fra loro, tranne nel momento in cui si urtano,
- tutti gli urti sono elastici e sono istantanei.

Oggi questo modello non sembra oggi sorprendente perché sappiamo che la materia è fatta di molecole il cui comportamento è molto simile a quello delle particelle del modello, ma al momento in cui il modello fu proposto era assolutamente innovativo e rivoluzionario in quanto si pensava ancora alla materia come un continuo; assolutamente originale era l'assunzione di particelle sempre in movimento.

Consideriamo un gas ideale contenuto in un cubo di lato ℓ e facciamo coincidere l'origine di un sistema riferimento cartesiano con un vertice del cubo come in *fig. 15a*.

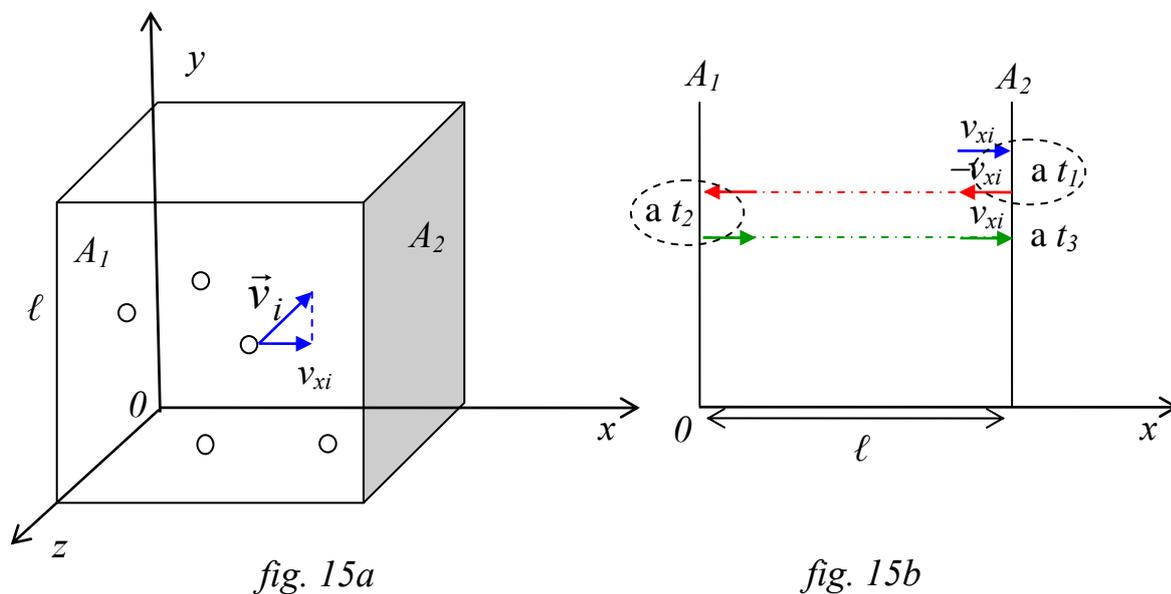


fig. 15a

fig. 15b

Ogni particella ha una velocità \vec{v}_i , scomponibile nelle sue componenti v_{xi} , v_{yi} , v_{zi} . Limitiamoci a vedere cosa succede lungo x , osservando che la casualità del moto delle particelle impone che ciò che succede lungo x sarà identico a quanto succede lungo y e z .

Assumiamo che a $t_0 = 0$, una generica particella abbia una v_{xi} nel verso positivo d'asse x e quindi essa da un certo istante t_1 colpisce la parete A_2 con un urto elastico (*fig. 15b*). Posto $v_{xi} = v_i$, $v'_{xi} = v_f$, M la massa della parete (con ovviamente $M \gg m$) e v_p la velocità finale della parete (che invece è inizialmente ferma), segue:

$$\begin{cases} mv_i = mv_f + mv_p & \text{conservazione della quantità di moto} \\ \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}Mv_p^2 & \text{conservazione della energia meccanica} \end{cases}$$

Risolviendo il sistema si ottiene:

6.1
$$v_f = \frac{m - M}{m + M} v_i \quad \text{e} \quad v_p = \frac{2m}{m + M} v_i$$

Queste, ricordando che $m \ll M$, diventano: $v_f = \frac{-M}{M} v_i \Rightarrow v_f = -v_i$ e $v_p \approx 0$ ossia la particella m rimbalza all'indietro con la stessa velocità in modulo (fig. 15b):

$$v_f = -v_i \Rightarrow v_f = -v_{xi}$$

A quest'urto corrisponde una variazione della quantità di moto Δp_{xi} di m e una variazione della quantità di moto ΔP_{xi} della parete con $\Delta p_{xi} + \Delta P_{xi} = 0 \Rightarrow$

$$\Delta P_{xi} = -\Delta p_{xi}$$

$$\text{Ma } \Delta p_{xi} = p_f - p_i = -mv_{xi} - (mv_{xi}) = -2mv_{xi} \quad \Rightarrow \Delta P_{xi} = 2mv_{xi}$$

ossia **in ogni urto alla parete è ceduta una quantità di moto pari a $2mv_{xi}$.**

Ora m si muove nel verso negativo di x e, assumendo^(vedi nota) che non urti altre particelle, a un tempo t_2 urta la parete A_1 dove si ripete quanto appena visto per cui, dopo t_2 , m starà nuovamente muovendosi nel verso positivo di x e urterà nuovamente la parete A_2 al tempo t_3 (vedi fig 15b). Essendo il moto fra due urti successivi rettilineo e uniforme segue che l'intervallo di tempo fra due urti successivi di m con

la stessa parete è: $t_3 - t_1 = 2 \frac{\ell}{v_{xi}}$ essendo $t_2 - t_1 = \frac{\ell}{v_{xi}} = t_3 - t_2$.

Di conseguenza, in un tempo di osservazione $\Delta t \gg t_3 - t_1$, il numero n di urti della particella con la stessa parete è: $n = \frac{\Delta t}{t_3 - t_1} = \frac{\Delta t}{2\ell/v_{xi}} = \frac{v_{xi}\Delta t}{2\ell}$ e quindi la quantità

di moto $\Delta P_{\Delta t, xi}$ ceduta alla parete dalla singola particella nel tempo Δt è n volte $\Delta P_{\Delta t, xi}$

$$\Delta P_{\Delta t, xi} = n \Delta P_{xi} \Rightarrow \Delta P_{\Delta t, xi} = \frac{v_{xi}\Delta t}{2\ell} 2mv_{xi} = \frac{mv_{xi}^2}{\ell} \Delta t.$$

Poiché abbiamo N particelle e ognuna si comporta nello stesso modo, la quantità di moto totale ceduta alla parete da tutte le N particelle ($\Delta P_{TOT, x}$) nel tempo Δt è la somma delle N quantità di moto $\Delta P_{\Delta t, xi}$:

$$\Delta P_{TOT, x} = \sum_{i=1}^N \Delta P_{\Delta t, xi} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{mv_{xi}^2}{\ell} \Delta t \right) = \frac{m}{\ell} \left(\sum_{i=1}^N v_{xi}^2 \right) \Delta t.$$

Questa implica che:

Nota: Questa affermazione è giustificata dal fatto che in un urto centrale elastico fra particelle identiche queste si scambiano la velocità. Questo si può vedere dalle 5.2 infatti, ponendo $M = m$ e ricordando che una particella ha velocità iniziale v_i e l'altra è ferma, si ottiene $v_f = 0$, $v_p = v_i$. Quindi se stiamo seguendo la particella 1 che ha velocità v_{1x} ed essa urta una particella 2, dopo l'urto potremmo seguire la particella 2 che ha sempre velocità v_{1x} . Essendo le particelle 1 e 2 indistinguibili, questo equivale a ignorare l'urto nella nostra trattazione.

$$\frac{\Delta P_{TOT,x}}{\Delta t} = \frac{m}{\ell} \left(\sum_{i=1}^N v_{xi}^2 \right).$$

Ricordando che la variazione nel tempo della quantità moto è equivalente a una forza, la precedente è la forza totale $F_{TOT,x}$, nella direzione x , esercitata sulla parete dalle N particelle a causa dei loro urti. Questa forza è normale alla parete, per cui dividendola per l'area della parete (ℓ^2) otteniamo la pressione esercitata dalle particelle, ovvero dal gas, sulla parete in formule:

$$6.2 \quad p = \frac{F_{TOT,x}}{\ell^2} = \frac{m}{\ell} \left(\sum_{i=1}^N v_{xi}^2 \right) \frac{1}{\ell^2} = \frac{m}{\ell^3} \left(\sum_{i=1}^N v_{xi}^2 \right) = \frac{mN}{\ell^3} \frac{\sum_{i=1}^N v_{xi}^2}{N} = \frac{mN}{\ell^3} \overline{v_x^2}$$

dove si è indicato con $\overline{v_x^2} = \frac{\sum_{i=1}^N v_{xi}^2}{N}$ la media dei quadrati della velocità lungo x .

La casualità del moto impone che il valore medio della velocità nelle tre direzioni x , y e z deve essere lo stesso: $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$.

Se così non fosse, dopo un certo tempo, dovremmo trovare le particelle accumulate vicino ad una parete nella direzione in cui è maggiore la velocità media.

Ricordando inoltre la relazione fra modulo di un vettore e le sue componenti abbiamo:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \Rightarrow \overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} \Rightarrow \overline{v^2} = 3\overline{v_x^2} \Rightarrow \overline{v_x^2} = \frac{\overline{v^2}}{3},$$

con $\overline{v^2}$ il valore medio del quadrato del modulo della velocità detta *velocità quadratica media*. Sostituendo questo nella 6.2 abbiamo:

$$6.3 \quad p = \frac{mN}{\ell^3} \frac{\overline{v^2}}{3}$$

Osserviamo che mN è la massa totale del gas contenuto nel cubo, per cui il primo rapporto nella 6.3 è la densità ρ del gas per cui

$$6.4 \quad p = \frac{1}{3} \rho \overline{v^2}$$

Conclusione: la pressione esercitata da un gas è causata dagli urti fra le particelle del gas e le pareti e direttamente proporzionale alla velocità quadratica media delle particelle. E' implicito quindi che le particelle di un gas sono sempre in moto, ma su questo torneremo in seguito.