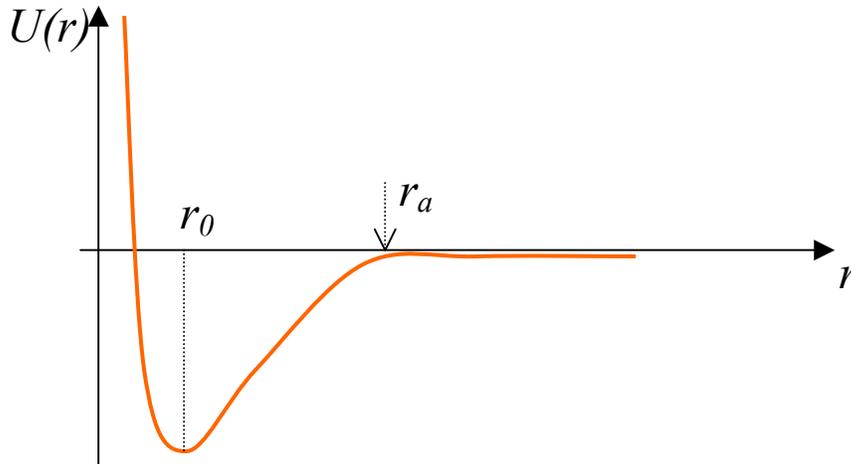


Fenomeni di superficie – Tensione superficiale

Caratteristiche del potenziale di interazione fra due molecole.

Assumiamo che le molecole siano a simmetria sferica, che r rappresenti la distanza fra due molecole e che una delle molecole sia ad $r = 0$. Il potenziale di interazione è del tipo:



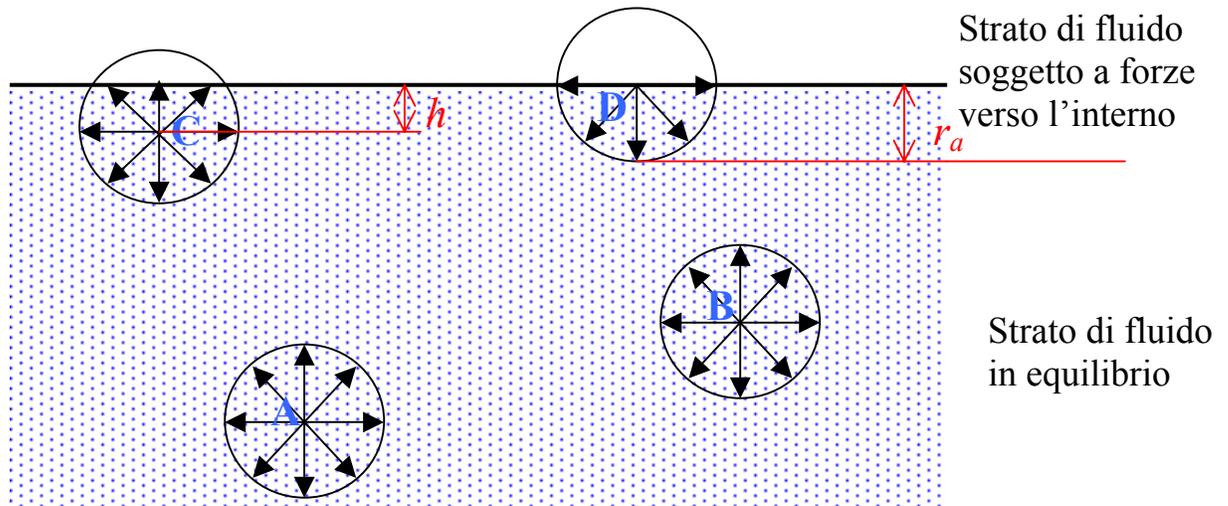
Ricordando che $F(r) = -dU/dr$, deduciamo che:

- a) per $r = r_0$ le due molecole sono in equilibrio,
- b) per $r < r_0$ l'interazione è **fortemente repulsiva**,
- c) per $r > r_0$ l'interazione è **attrattiva** ma decresce rapidamente con r ,
- d) per $r > r_a$ l'interazione è praticamente nulla.

La distanza r_0 è assunta come **diametro** della molecola dato che è praticamente impossibile portare due molecole ad una distanza minore, la distanza r_a è detta **raggio di azione** ed è tale che due molecole a distanza $r > r_a$ possano essere considerate non interagenti.

$r_a \approx 10^{-8} \text{ m}$ si dice pertanto che le forze molecolari sono **a corto raggio di azione**.

Trascurando l'interazione con il fluido esterno, ogni molecola (A,B,C,D) all'interno di un liquido interagisce, con le altre che la circondano contenute entro una sfera di raggio r_a



Per le molecole A e B, la sfera d'azione è interamente nel fluido. La risultante delle forze sulle molecole A e B è nulla. La molecola C, a distanza $h < r_a$ dalla superficie, è invece soggetta ad una forza risultante diretta verso l'interno del liquido. Tale forza è sempre più intensa al diminuire di h , e diventa massima per le molecole (D) sulla superficie ($h=0$).

Ne consegue una forza risultante, verso l'interno del fluido, che:

- tende a comprimere leggermente lo strato superficiale,
- porta il liquido, a causa della compressione, a minimizzare la sua area superficiale,
- fa comportare la superficie di un liquido come una membrana elastica.

La tensione superficiale

L'aumento della superficie libera (ΔS) di un liquido non può avvenire spontaneamente ma serve il lavoro (W) di una forza esterna \Rightarrow

$$W = \tau \cdot \Delta S \Rightarrow \tau = \text{tensione superficiale del fluido} = \frac{W}{\Delta S} = \frac{dW}{dS} \quad (1)$$

Dalla definizione, τ si misura in $J/m^2 = N \cdot m/m^2 = N/m$

Il valore di τ dipende anche dal fluido esterno (se questo non è specificato si assume sia l'aria) e dalla temperatura.

Fluido (20 °C)	τ (N/m)	Fluido	τ (N/m)
Alcool etilico	0.017	Acqua (0 °C)	0.076
Soluzione saponosa	≈ 0.025	Acqua (100 °C)	0.059
Benzina	0.029	Azoto (-80 °C)	0.020
Olio d'oliva	0.032		
Acqua	0.073		
Mercurio	0.427		
Olio d'oliva-acqua	0.021		
Benzina-acqua	0.034		
Mercurio-acqua	0.427		

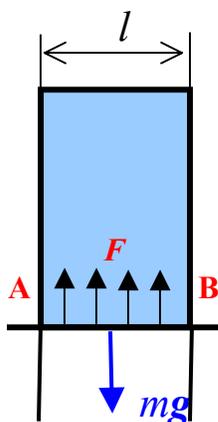
Per la (1), un volume V di fluido all'equilibrio deve minimizzare la sua area superficiale. Infatti, per conformarlo in una superficie S deve essere fatto lavoro sul fluido che è immagazzinato come energia potenziale U_V di configurazione. All'equilibrio stabile deve essere $\Rightarrow U_V$ minimo $\Rightarrow S$ minima \Rightarrow **S una sfera** di volume V .

Questo è evidente quando la tensione superficiale domina le altre forze esterne: sfere di mercurio in aria, sfere di azoto liquido, bolle sferiche di aria in acqua, bolle sferiche di acqua-saponata,.....

Per la (1) quindi, porzioni vicine di fluido tendono a riunirsi (due sferette di mercurio spontaneamente si fondono in una sola)

Definizione operativa di τ

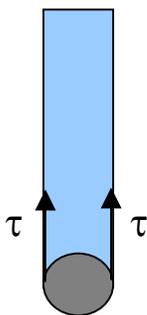
Usiamo delle pellicole liquide che si possono ottenere, con un telaietto rettangolare rigido, da un liquido a bassa tensione superficiale, ad esempio acqua saponata. Se il lato AB è mobile (di massa m relativamente piccola) si osserva una variazione della superficie della pellicola fino a raggiungere una condizione di equilibrio.



Se il telaietto è posto verticale, all'equilibrio si ha $\Rightarrow \vec{F} + m\vec{g} = 0$

Questo suggerisce l'esistenza di forze, tangenti alla superficie e perpendicolari al contorno, spiegabili in termini di tensione superficiale τ .

$$\tau = \frac{F}{L} \quad (2) \text{ con } L = \text{contorno} = 2l \Rightarrow \tau = \frac{F}{2l}$$



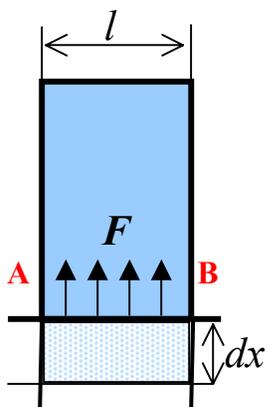
La definizione (2) (mediante il concetto di forza tangenziale) è equivalente alla (1) (mediante il lavoro per aumentare la superficie) infatti, se assumiamo che nel raggiungere l'equilibrio la pellicola si contrae di dx , si ha:

$$dW = F \cdot dx = 2l \cdot \tau \cdot dx = \tau \cdot 2(l \cdot dx)$$

$$l \cdot dx = dA \text{ variazione di una superficie}$$

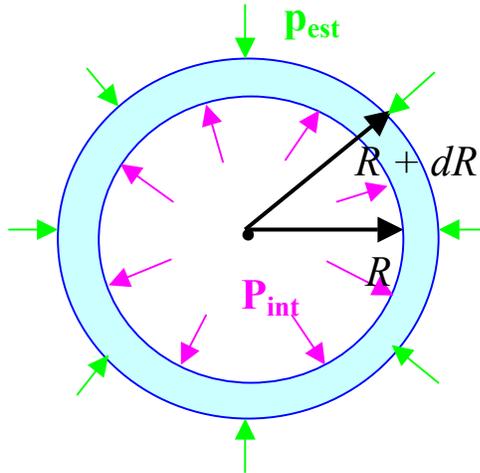
$$2 \cdot dA = dS \text{ variazione totale della super.}$$

$$dW = \tau \cdot 2 \cdot dA = \tau \cdot dS \Rightarrow \tau = \frac{dW}{dS}$$



Legge di Laplace

Consideriamo una lamina liquida sferica di raggio R e spessore dR (una bolla di sapone). La pressione esterna e la tensione superficiale per la (1) tendono a contrarre la bolla. Per l'equilibrio è necessario una pressione interna che deve tendere ad espandere la bolla, quindi



$$p_{int} > p_{est} \Rightarrow (p_{int} - p_{est}) > 0$$

Il lavoro delle forze di pressione per una espansione di dR è:

$$dW_p = F_p \cdot dR = (p_{int} - p_{est}) \cdot S \cdot dR$$

$$S = 4 \pi R^2 \Rightarrow$$

$$dW_p = (p_{int} - p_{est}) \cdot 4 \pi R^2 \cdot dR (> 0)$$

A questo aumento si oppone la tensione superficiale con un lavoro

$$dW_\tau = \tau \cdot dS (< 0)$$

$$S_{sfera\ int..} \approx S_{sfera\ est.} \approx 4 \pi R^2 \Rightarrow dS = dS_{sfera\ intr.} + dS_{sfera\ est.} = 2 \cdot d(4 \pi R^2)$$

$$dW_\tau = \tau \cdot dS = \tau \cdot 2 \cdot d(4 \pi R^2) = \tau \cdot 2 \cdot 8 \pi R \cdot dR = 16 \pi \cdot \tau \cdot R dR .$$

All'equilibrio il lavoro totale deve essere nullo $\Rightarrow |dW_\tau| = |dW_p| \Rightarrow$

$$16 \pi \cdot \tau \cdot R dR = (p_{int} - p_{est}) \cdot 4 \pi R^2 \cdot dR \Rightarrow 4 \cdot \tau = (p_{int} - p_{est}) R$$

$$\Rightarrow (1) \quad p_{int} - p_{est} = \frac{4\tau}{R} \quad (\text{sfera cava di fluido})$$

L'eccesso di pressione interna, necessario per tenere la bolla in equilibrio, dipende *direttamente da τ ed inversamente dal raggio R* .

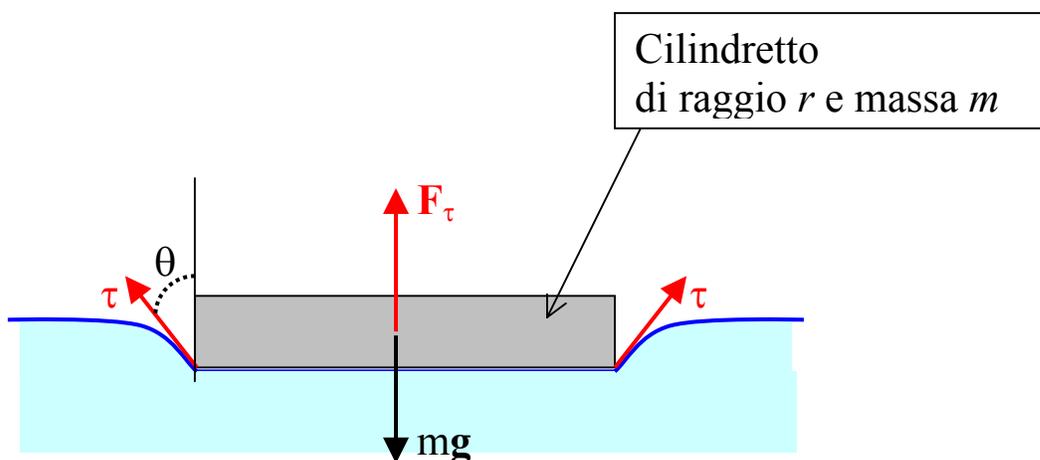
Se si tratta di un sfera di liquido, la p_{int} , detta *pressione di curvatura p_c* , è dovuta alla tensione superficiale che comprime il fluido, mentre l'esistenza di una sola superficie che delimita il fluido toglie un fattore 2 dalla dimostrazione precedente. Si ha pertanto

$$\Rightarrow (2) \quad p_c - p_{est} = \frac{2\tau}{R} \quad (\text{sfera piena di fluido})$$

Le equazioni (1) e (2) sono note come *Legge di Laplace*

Superficie di un fluido \Leftrightarrow membrana elastica

La superficie di un fluido può **sostenere** una massa deformandosi.



$$F_\tau = \tau \cdot L \cdot \cos\theta = \tau \cdot 2\pi r \cdot \cos\theta \quad \text{essendo } L = 2\pi r$$

$$W = mg$$

$$\text{All'equilibrio } \Rightarrow F_\tau = W \Rightarrow \tau \cdot 2\pi r \cdot \cos\theta = mg \Rightarrow \boxed{\cos\theta = \frac{mg}{2\pi r \cdot \tau}}$$

$\cos\theta$ aumenta (ovvero aumenta la deformazione della superficie) all'aumentare di m a parità di τ ed r .

Se per un dato m e/o τ , il rapporto $mg/2\pi r\tau$ è maggiore di 1 la superficie non può sostenere la massa m . (Essendo τ generalmente molto piccolo, solo piccole m possono essere sostenute.)