Vettori

Vogliamo individuare in modo non ambiguo la **posizione** di un oggetto A rispetto ad un punto di riferimento O. Serviamoci di un esempio: individuare la posizione di un oggetto A posto su un piano rettangolare orizzontale rispetto al suo centro O (vedi fig. 1). Per individuare univocamente la sua posizione ci serve conoscere contemporaneamente:

a) la distanza r a cui è posto l'oggetto rispetto ad O; questo individua un insieme di possibili punti coincidenti con la circonferenza di raggio r,
b) la direzione lungo cui si trova l'oggetto (ad esempio quella del lato lungo del piano); questo restringe a due i punti (A e A') in cui potrà trovarsi l'oggetto,
c) il verso in cui puntare (ad esempio quello a destra guadando la figura) e con questo si individua il solo punto A, dove effettivamente si trova l'oggetto.

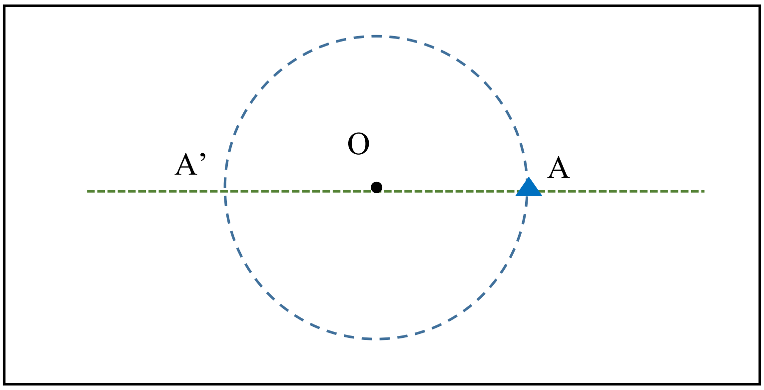


Fig. 1

Lo stesso avviene se facciamo uno **spostamento** di un oggetto da una posizione A ad una posizione B. Se vogliamo trovarlo in modo non ambiguo, dobbiamo sapere l'entità dello spostamento (ad esempio 2 m), la direzione dello spostamento (da esempio lungo la verticale) e il verso (ad esempio verso l'alto). Solo la conoscenza contemporanea di queste tre proprietà ci permettono di individuare lo spostamento effettuato.

Le grandezze fisiche, come la posizione e lo spostamento, che per essere completamente individuate necessitano della contemporanea conoscenza dell'entità (detta modulo), della direzione e del verso sono dette **grandezze vettoriali** o vettori.

Un vettore è una grandezza cui è associato un modulo, una direzione e un verso.

Le grandezze vettoriali saranno indicate con una lettera in grassetto (come ***a***, ***b***) o con una lettera con sopra una freccia (come $\vec{a}, \vec{b}$) e possono essere rappresentate graficamente da una freccia la cui lunghezza è proporzionale al modulo del vettore, la direzione è coincidente con la direzione del vettore, la punta con il verso.

Il punto di inizio di un vettore è detto punto di applicazione. Il modulo di un vettore $\vec{a}$ può scriversi come $|\vec{a}|$ oppure semplicemente a come faremo di seguito.

Le tre frecce in fig. 2a rappresentano lo stesso spostamento $\vec{s}$ avendo stesso modulo, direzione e verso. I due percorsi in fig. 2b danno lo stesso spostamento, quindi non va confuso lo spostamento con il percorso effettuato per ottenerlo.

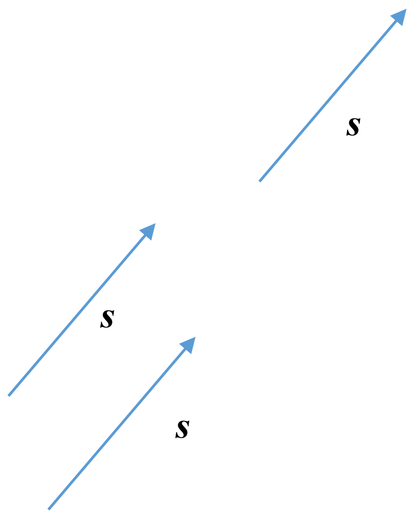


Fig. 2a

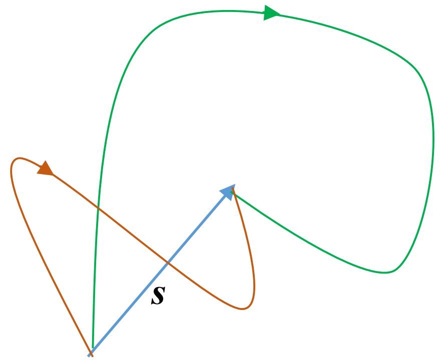


Fig. 2b

Ci sono grandezze fisiche che sono completamente determinate senza una direzione e un verso come ad esempio il tempo, la massa, l'energia e queste sono dette **grandezze scalari**.

Alle grandezze scalari si applica l'algebra ordinaria, per i vettori dobbiamo definire una opportuna algebra.

Somma dei vettori, metodo grafico.

Con riferimento alla fig. 3a dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$**,** definiamo il vettore somma $\vec{s}$ che scriviamo formalmente:

somma vettoriale $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$

il vettore così ottenuto (vedi fig. 3b): spostiamo parallelamente a loro stessi i due vettori (o uno solo) fino a farne coincidere il punto di applicazione e costruiamo un parallelogramma tracciando dei segmenti paralleli ai vettori e passanti per l'estremo della punta degli stessi, la diagonale del parallelogramma contente il punto di applicazione è il vettore somma.

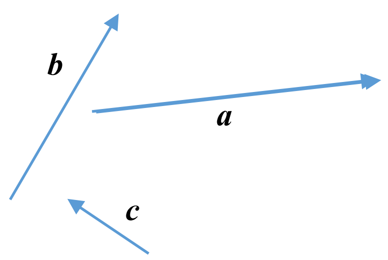


Fig. 3a

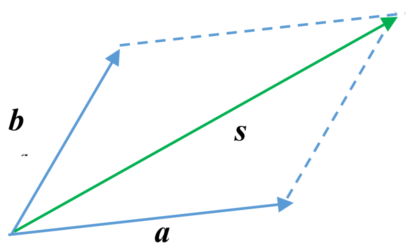


Fig. 3b

Si vede, sempre graficamente come mostrato in fig. 4, che si ottiene lo stesso vettore $\vec{s}$ se si porta a coincidere il punto di applicazione di $\vec{b}$ con la punta di $\vec{a}$ (ossia ponendo i vettori uno di seguito all'altro) e si definisce $\vec{s}$ come il vettore dal punto di applicazione di $\vec{a}$ alla punta di $\vec{b}$**.**

Si vede chiaramente che la somma vettoriale gode della proprietà commutativa: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

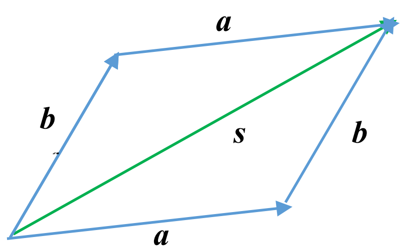


Fig. 4

La somma $\vec{s}$ di più vettori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$…… si ottiene (vedi fig. 5a) ponendo i vettori uno di seguito all'altro e definendo $\vec{s}$ come il vettore dal punto di applicazione di primo vettore alla punta d'ultimo**.**

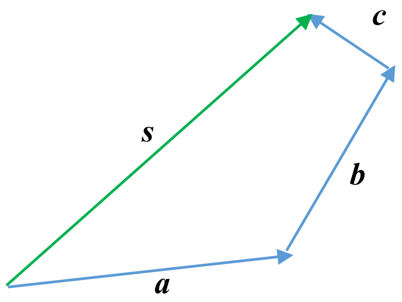


Fig. 5a

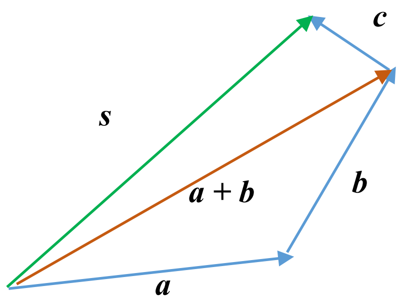


Fig. 5b

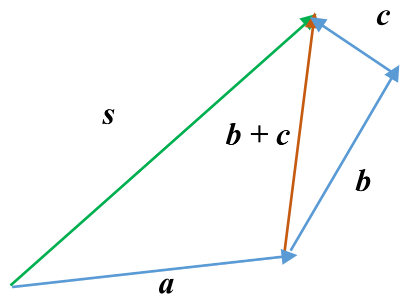


Fig. 5c

Si vede chiaramente nella fig. 5b e 5c che la somma vettoriale gode della proprietà associativa:

$$\vec{s}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}.\right)$$

La differenza $\vec{d}$ fra due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è definita come la somma di $\vec{a}$ con l'opposto di $\vec{b}$, dove l'opposto di un vettore è un vettore indicato $-\vec{\mathrm{b}}$, che ha stesso modulo, stessa direzione ma verso opposto.

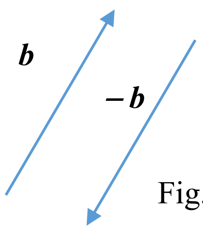


Fig. 6

Quindi $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$ è graficamente rappresentato in fig. 7a. Come mostrato in fig. 7b, il vettore differenza è l'altra diagonale del parallelogramma costruito per ottenere la somma.

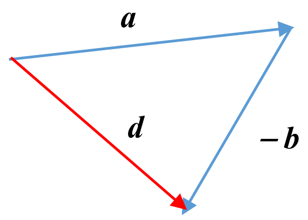


Fig. 7a

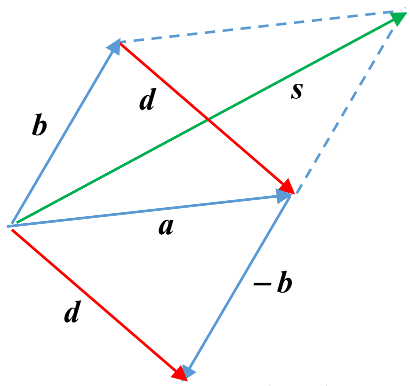


Fig. 7b

Porre attenzione al verso del vettore differenza che è orientato, come è evidente in fig. 7b, dal secondo verso il primo.

Componenti di un vettore

La rappresentazione di vettore come freccia e la relativa definizione grafica di somma vettoriale possono essere intuitive ma sicuramente poco pratiche nell'operare. Per rappresentare un vettore si ricorre alle sue cosiddette **componenti.**

Consideriamo un vettore $\vec{v}$ (vedi fig. 8) in un sistema di riferimento cartesiano a due dimensioni con il punto di applicazione coincidente con l'origine O e la sua direzione giacente nel piano *x-y* del sistema di riferimento. Il vettore può quindi essere considerato un segmento $\overline{AB}$ di lunghezza v inclinato di un angolo θ rispetto all'asse x .

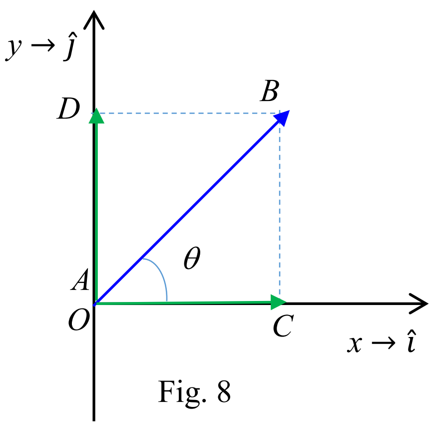


Fig. 8

Geometricamente:

$\overline{OC} = \overline{AB} \cos\theta = v \cos\theta = v_x$

$\overline{OD} = \overline{AB} \sin\theta = v \sin\theta = v_y$

v_x è detta *componente x del vettore*

v_y è detta *componente y del vettore*

osserviamo che:

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ $\qquad$ $\tan\theta = \frac{v_y}{v_x}$

Se introduciamo il concetto di vettore unitario detto **versore** come un vettore di modulo unitario che ha solo informazioni di direzione e verso, un generico vettore $\vec{v}$ potrà essere scritto come:

$\vec{v} = v\,\hat{u}_v$

con v modulo del vettore e $\hat{u}_v$ versore unitario che fornisce la direzione e il verso di $\vec{v}$.

Con questa notazione possiamo assegnare dei vettori unitari agli assi x e y del sistema cartesiano, generalmente indicati $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$, che individuano rispettivamente la direzione e il verso positivo dell'asse x e la direzione e il verso positivo dell'asse y.

Possiamo quindi immaginare due vettori (in verde in fig. 8) uno lungo l'asse x, $\overrightarrow{v_x}$, di modulo v_x e direzione e verso $\hat{\imath}$, e uno lungo l'asse y , $\overrightarrow{v_y}$, di modulo v_y e direzione e verso $\hat{\jmath}$, di cui $\vec{v}$ risulta essere la somma vettoriale:

$$\vec{v} = \overrightarrow{v_x} + \overrightarrow{v_y} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath}$$

detta *notazione cartesiana di un vettore*.

Abbiamo considerato in vettore in un piano, ma generalmente un vettore è orientato nello spazio a tre dimensioni. Si può vedere che in un sistema di riferimento cartesiano a 3 dimensioni, detto $\hat{k}$ il versore dall'asse z orientato come in fig. 9 rispetto a $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$, la notazione più generale per un vettore è:

$$\vec{v} = \overrightarrow{v_x} + \overrightarrow{v_y} + \overrightarrow{v_z} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}$$

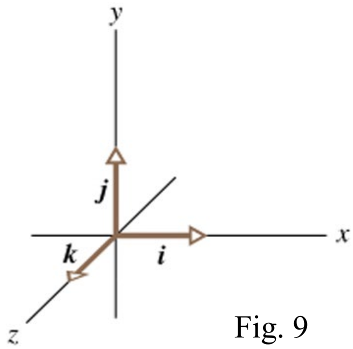


Fig. 9

Ma limitandoci a un vettore a due dimensioni, osserviamo che un vettore può essere ora facilmente descritto da due numeri corrispondenti alle sue componenti, infatti, con la convenzione di riferirci ad un sistema cartesiano, un vettore è completamente definito dalla conoscenza delle sue componenti v_x e v_y. Infatti il modulo può essere ricavato con le relazione $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, la direzione con la relazione $tan\,\theta = \frac{v_y}{v_x}$ mentre il verso discende dai segni di v_x e v_y come evidenziato in fig. 10.

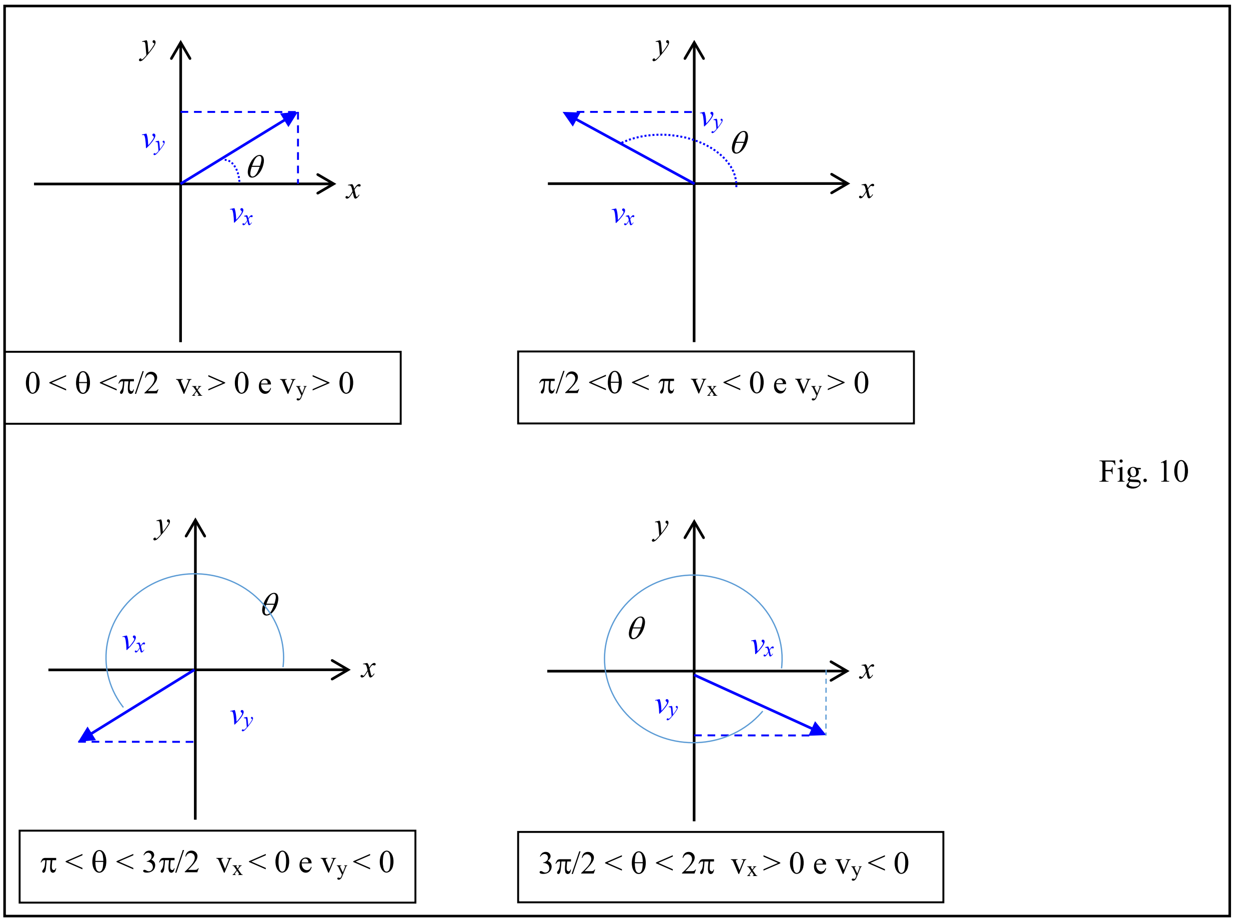


Fig. 10

Osservazione importante:

Abbiamo introdotto il concetto di componenti di un vettore in un riferimento *x-y* con asse *x* orizzontale. Il concetto è generalizzabile in un sistema con un asse *x'* ruotato rispetto all'orizzontale e con un asse *y'* perpendicolare a *x'*. In fig. 11 è rappresentato uno stesso vettore $\vec{a}$ in due sistemi di riferimento ruotati di un angolo ϕ uno rispetto all'altro. Le componenti sono diverse ma

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{a_x'^2 + a_y'^2}$$

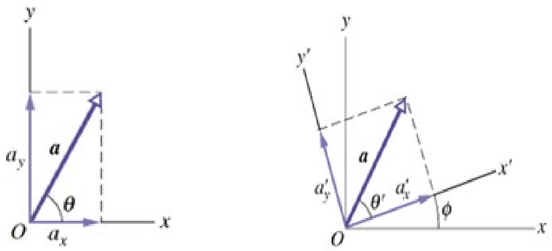


Fig. 11

Somma dei vettori tramite le componenti

La notazione cartesiana semplifica notevolmente l'operazione di somma e differenza fra vettori. Consideriamo due vettori descrivibili con due componenti:

$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath}$ e $\vec{b} = b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath}$

e troviamone il vettore somma $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ e il vettore differenza $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$

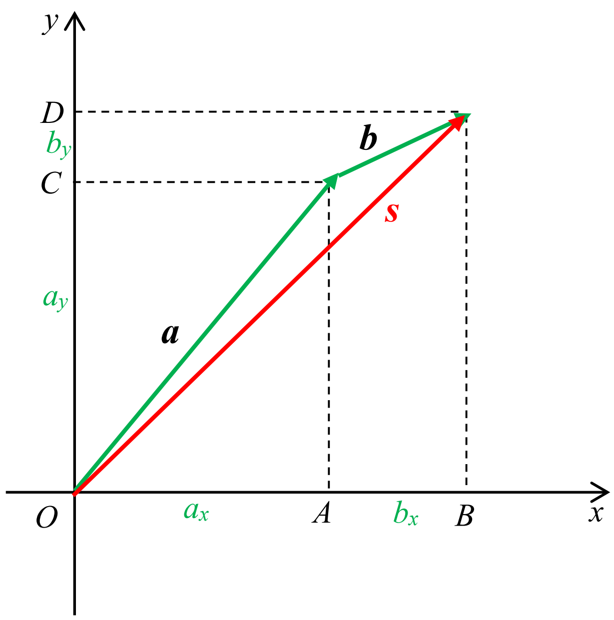


Fig. 12a

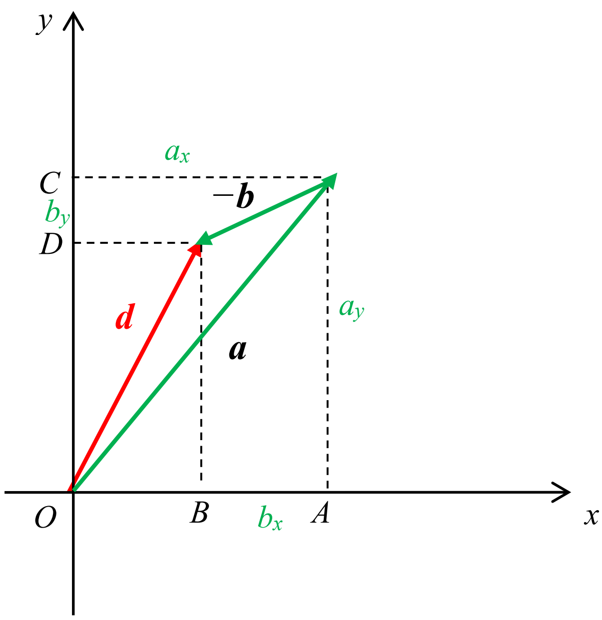


Fig. 12b

Come si vede graficamente nella fig. 12a per la somma e nella figura 12b per la differenza possiamo rispettivamente scrivere per le componenti:

del vettore somma

$$s_x = \overline{0A} + \overline{AB} = a_x + b_x$$

$$s_y = \overline{OC} + \overline{CD} = a_y + b_y$$

e del vettore differenza

$$d_x = \overline{0A} - \overline{AB} = a_x - b_x$$

$$d_x = \overline{OC} - \overline{CD} = a_y - b_y$$

Segue

$$\vec{s} = s_x\hat{\imath} + s_y\hat{\jmath} = (a_x + b_x)\hat{\imath} + (a_y + b_y)\hat{\jmath}$$

$$\vec{d} = d_x\hat{\imath} + d_y\hat{\jmath} = (a_x - b_x)\hat{\imath} + (a_y - b_y)\hat{\jmath}$$

Generalizzando a più vettori, possiamo concludere che il vettore somma (o il vettore differenza) ha come componente *x* la somma algebrica delle componenti *x* di tutti i vettori, come componente *y* la somma algebrica delle componenti y di tutti i vettori.

Prodotto fra vettori

1) prodotto fra vettore e uno scalare

Il prodotto di un vettore $\vec{a}$ per uno scalare $k > 0$ è un vettore che ha la stessa direzione e lo stesso verso di $\vec{a}$ e modulo pari a *ka*. Se $k < 0$ il vettore risultante ha verso opposto al precedente. (vedi fig. 13)

$$\vec{b} = k\vec{a}$$

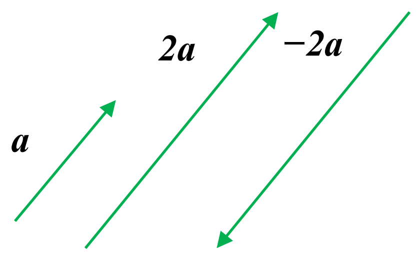


Fig. 13

2) prodotto fra due vettori che produce uno scalare: *prodotto scalare*

Il prodotto scalare (fig. 14) fra due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ che si scrive $\vec{a} \cdot \vec{b}$ è dato da: $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\phi$ con ϕ l'angolo compreso fra le direzioni dei vettori. Segue dalla definizione che $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

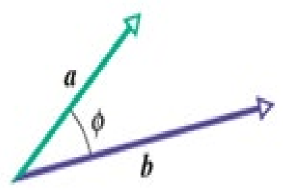


Fig. 14

Segue dalla definizione che se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono perpendicolari $\phi = 90°$, $cos\ \phi = 0$ e il prodotto scalare è uguale a 0, se invece $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono paralleli $\phi = 0°$, $cos\phi = 1$ e il prodotto scalare è massimo

Notiamo (vedi fig. 15) che

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\phi = a \cdot (b\cos\phi) = a \cdot b_a$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\phi = (a\cos\phi) \cdot b = a_b \cdot b$$

con b_a la componente di $\vec{b}$ lungo la direzione $\vec{a}$ e a_b la componente di $\vec{a}$ lungo la direzione di $\vec{b}$

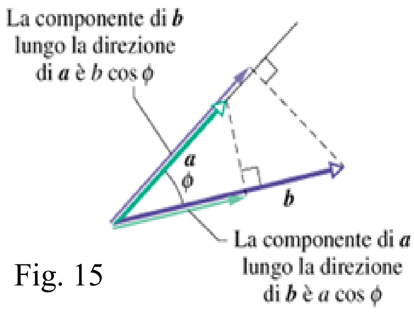


Fig. 15

3) prodotto fra due vettori che produce un vettore: *prodotto vettoriale*

Il prodotto vettoriale (fig. 16 a) fra due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ che si scrive $\vec{a} \times \vec{b}$ è un vettore $\vec{c}$ il cui modulo è dato da $c = absen\phi$ con ϕ il minore degli angoli compresi fra le direzioni dei vettori.

Segue dalla definizione che se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono perpendicolari $\phi = 90°$, $sen\ \phi = 1$ il prodotto vettoriale è massimo, se invece $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono paralleli $\phi = 0°$, $sen\ \phi = 0$ il prodotto scalare è pari a zero.

La direzione di $\vec{c}$ è perpendicolare al piano individuato dai vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e il verso è fissato dalla regola della mano destra, come mostrato in fig. 16a.

Notiamo dalla definizione che è importante l'ordine in cui sono indicati i vettori. Infatti come è mostrato in 16b, $\vec{b} \times \vec{a} = \vec{c'}$ con $\vec{c'} = -\vec{c}$

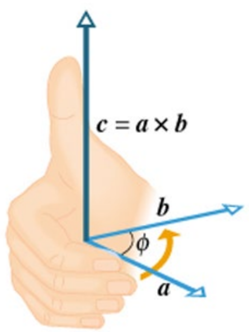


Fig. 16a

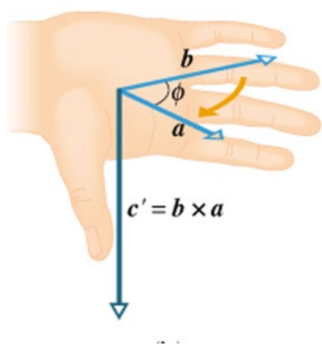


Fig. 16b

Un commento: è utile sottolineare che le definizioni per le operazioni fra vettori, che qui abbiamo dato assiomaticamente, rispecchiano in realtà quanto si osserva sperimentalmente. Vedremo ad esempio che il lavoro è una combinazione scalare fra i vettori forza e spostamento, il momento di una forza è una combinazione vettoriale fra il vettori posizione e forza, entrambi rispondenti alle definizioni date.

Un esempio numerico.

Un'auto si muove su un piano orizzontale a partire da un punto O prima di 10,0 Km verso est, quindi svolta a sinistra con un angolo d 60° e procede per altri 20,0 Km. Trovare il modulo e la direzione del vettore che individua la posizione finale rispetto a O.

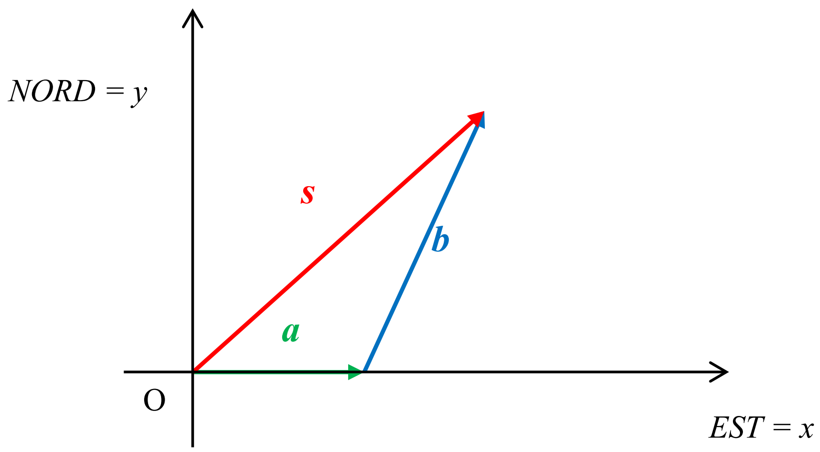
Abbiamo due vettori spostamento $\vec{a}$ e $\vec{b}$, il primo orientato lungo l'asse x ($\theta_a = 0°$) il secondo inclinato di un angolo $\theta_b = 60°$. Usando la notazione in componenti scriviamo

$\vec{a} = a_x\,\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath}$ e $\vec{b} = b_x\,\hat{\imath} + b\hat{\jmath}$ con $a_x = a\cos\theta_a = a = 10\ km$,

$a_y = a\,sen\theta_a = 0\ km$

$b_x = b\cos\theta_b = 20\cdot\cos 60° = 10\ km$,

$b_y = b\,sen\theta_b = 20\cdot sen 60° = 17{,}3\ km$



Ricordando la regola della somma segue che

$s_x = a_x + b_x = (10 + 10)\ Km = 20\ Km$ e $s_y = a_y + b_y = (0 + 17{,}3)\ Km = 17{,}3\ Km.$

Il vettore risultante $\vec{s} = s_x\,\hat{\imath} + s_y\hat{\jmath}$ ha modulo $s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = 26{,}5$ km ed è inclinato di un angolo θ_s rispetto all'asse x con $tan\theta_s = \frac{s_y}{s_x} = 0{,}866 \rightarrow \theta_s = 40{,}9°$

Notare che l'entità dello spostamento finale (modulo di s pari a 26,5 KM) non coincide con la somma dei percorsi fatti dall'auto (30 Km).