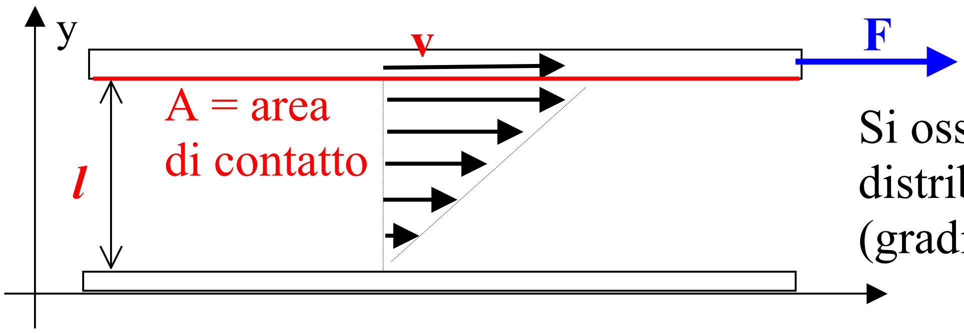
Viscosità

I fluidi, per come sono definiti, non dovrebbero presentare resistenza al moto di scorrimento; invece nei fluidi reali tale resistenza è osservata. Questa resistenza è dovuta ad una forma d'attrito interno, detta viscosità, fra strati adiacenti di fluido, che si oppone allo scorrimento dell'uno sull'altro.

Un fluido reale è pertanto caratterizzato da un *coefficiente di viscosità (η)* definito operativamente come segue.

Consideriamo due lastre di vetro, una fissa e l'altra in moto con velocità costante v, al cui interno si trova un fluido reale.



Si osserva una distribuzione di velocità (gradiente di velocità)

Per v = *costante*, bisogna applicare F= *costante* e risulta $F \propto \frac{vA}{l}$ con una proporzionalità η che dipende al fluido interposto.

$$\eta = \frac{Fl}{Av} \quad \text{ovvero} \quad F_V = \eta \frac{Av}{l} \quad \text{o più in generale} \quad F_V = \eta A \frac{dv}{dy}$$

dove si assume che η sia indipendente da v.

Unita di misura: $\frac{N \cdot m}{m^2 \cdot m / s} = \frac{N \cdot s}{m^2} = Pa \cdot s = \frac{Kg}{m \cdot s}$ nel sistema MKS.

(è anche usato il *Poise* $P = 10^{-1}$ Kg/ms)

Il *coefficiente di viscosità (η)* dipende fortemente dalla temperatura

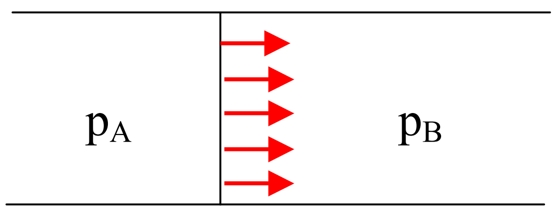
Ecco alcuni valori tipici:

Fluido	T *(° C)*	η (*Kg/ms)*
Acqua	0	$1.8 \cdot 10^{-3}$
Acqua	20	$1.0 \cdot 10^{-3}$
Acqua	100	$0.3 \cdot 10^{-3}$
Glicerina	20	$830 \cdot 10^{-3}$
Olio motore	30	$250 \cdot 10^{-3}$
Alcool	20	$1.2 \cdot 10^{-3}$

La viscosità introduce importanti differenze nel moto di un fluido reale rispetto a quello di un fluido ideale.

Condiderato un tubo orizzontale a sezione A costante, si ha per:

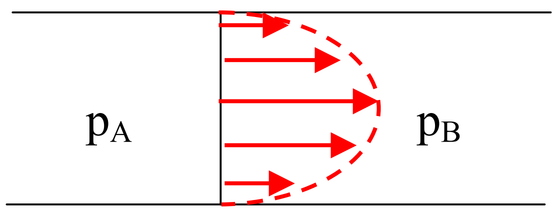
un fluido ideale



v costante nella sezione A

$p_A = p_B$ costante

un fluido reale

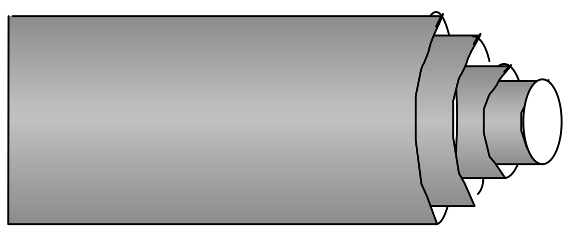


v variabile nella sezione A

$p_A > p_B$

La portata per un fluido reale non può essere più calcolata come Av;

$Q \neq Av$



Moto laminare,

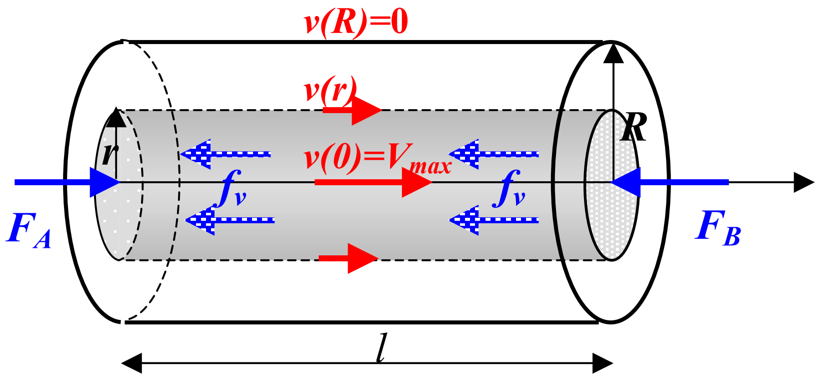
stazionario se la distribuzione di velocità non cambia nel tempo

Calcolo della portata per un fluido reale in un tubo cilindrico

Consideriamo un cilindro di raggio R lungo L, in cui scorre un fluido in moto laminare e stazionario. La velocità in esso ha una distribuzione con $v(R)=0$, $v(0)= Vmax$.

Stazionario $\Rightarrow v(r) = cost \Rightarrow \vec{F}^{R}_{est} = 0$

Per una porzione di fluido in un cilindro di raggio r < R abbiamo $\vec{F}^{R}_{est} = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_V = 0$; essendo tutte le forze parallele (all'asse), diviene: $F_A - F_B - F_V = 0$



$$F_A = p_A \cdot \pi r^2$$

$$F_B = p_B \cdot \pi r^2$$

$$F_V = \eta A \frac{dv}{dr} \quad \text{con } A = 2\pi r \cdot l$$

poichè v diminuisce mentre r aumenta

$\frac{dv}{dr}$ ed F_V sono implicitamente negative

pertanto scriviamo: $\pi r^2 \left(p_A - p_B\right) + \eta 2\pi r \cdot l \frac{dv}{dr} = 0$

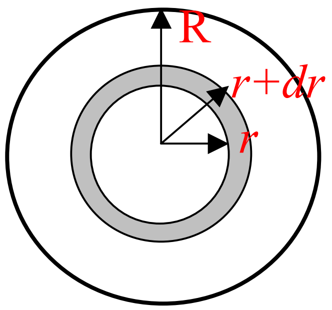
$$\frac{dv}{dr} = -\frac{r(p_A - p_B)}{2\eta l} \Rightarrow dv = -\frac{(p_A - p_B)}{2\eta l} \cdot rdr$$

questa espressione ci da la variazione di velocità *dv* quando il raggio aumenta di *dr*, il segno meno mette in evidenza che la velocità diminuisce mentre il raggio aumenta. Integrando fra *r* ed R troviamo la corrispondente differenza di velocità. (ricordiamo che *v(R)=0)*

$$\int_{v(r)}^{v(R)} dv = -\frac{(p_A - p_B)}{2\eta l}\int_r^R r dr \;\Rightarrow\; v(R) - v(r) = -\frac{(p_A - p_B)}{2\eta l}\frac{R^2 - r^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad v(r) = \frac{(p_A - p_B)}{4\eta l}\left(R^2 - r^2\right)$$

v(r) ha un'andamento parabolico con *r,* con massimo in $r = R^2$.
In una corona circolare con raggio *r* ed *r+dr*, di area $dA=2\pi r\cdot dr$, la velocità risulta costante. Possiamo calcolare pertanto la relativa portata come velocità per area $\Rightarrow dQ = v(r)\cdot dA$



La portata totale si ottiene sommando tutti i contributi *dQ* al variare di *r* da *0* ad $R \Rightarrow$

$$Q = \sum dQ = \int_0^R dQ$$

$$Q = \int_0^R \frac{(p_A - p_B)}{4\eta l}(R^2 - r^2)\cdot 2\pi r\cdot dr = \frac{\pi(p_A - p_B)}{2\eta l}\int_0^R (R^2 - r^2) r dr$$

calcolando $\int_0^R (R^2 - r^2) r dr = \int_0^R R^2 r dr - \int_0^R r^3 dr = \frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} = \frac{R^4}{4}$

Infine $\boxed{Q = \frac{\pi R^4 (p_A - p_B)}{8\eta l}}$ LEGGE DI POISEUILLE

Da notare la dipendenza dalla quarta potenza del raggio