

Applicazioni del metodo delle immagini

Alexis Pompili (pompili@ba.infn.it) - **Esercitazioni Fisica II**
Laurea Triennale in Fisica - Anno Accademico 2016-2017

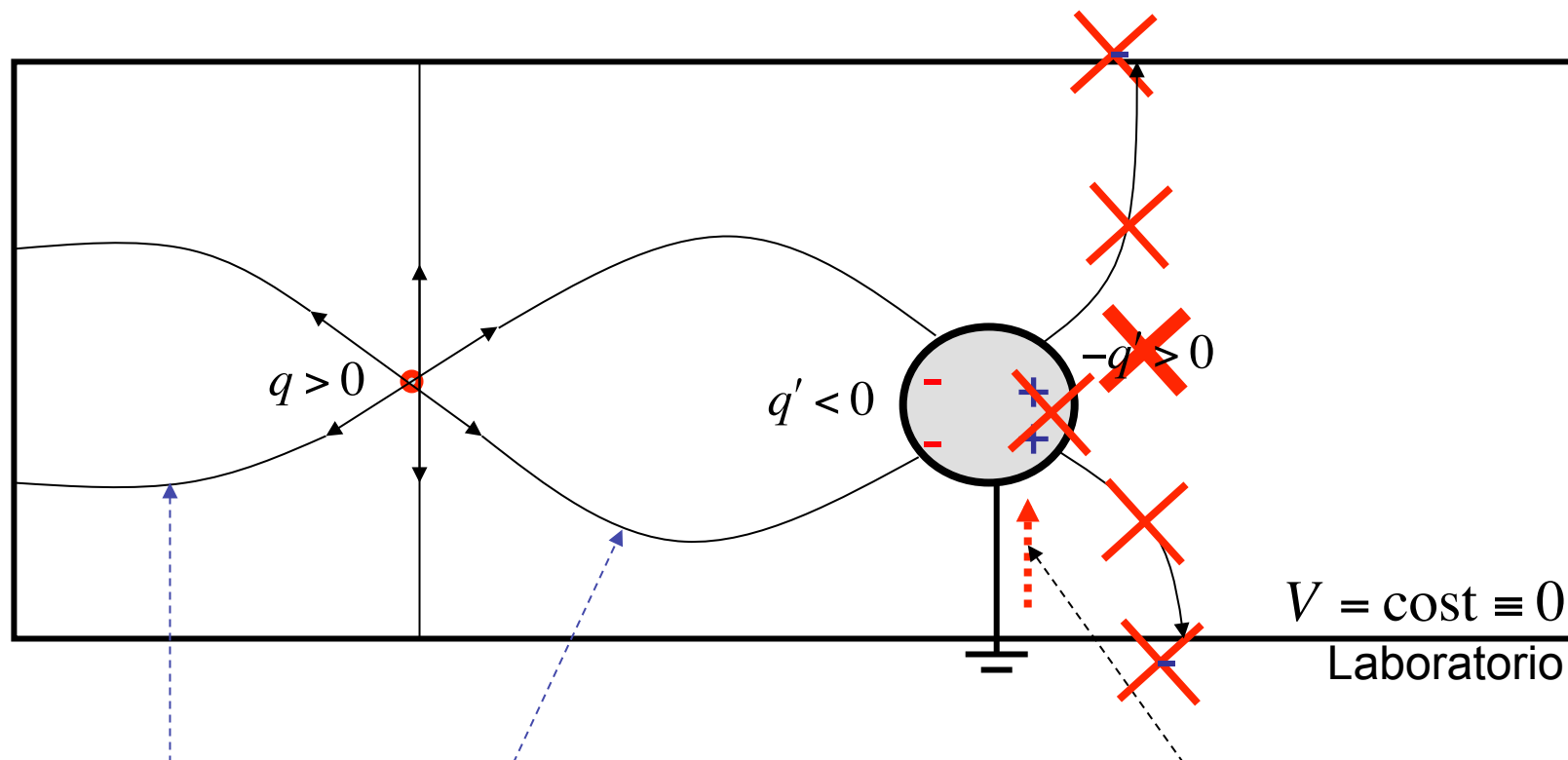
Applicazioni del metodo delle immagini

Il **metodo delle immagini** e' stato introdotto per trattare la situazione di una carica puntiforme di fronte ad un piano conduttore (indefinito) e messo a terra.

Adesso andiamo a studiare ulteriori applicazioni di notevole interesse:

- a) **Sfera conduttrice - messa a terra - nel campo di una carica puntiforme;**
- b) **Sfera conduttrice nel campo di una carica puntiforme;**
- c) **Sfera conduttrice immersa in un campo elettrico uniforme.**

Configurazione (a) [carica puntiforme positiva]

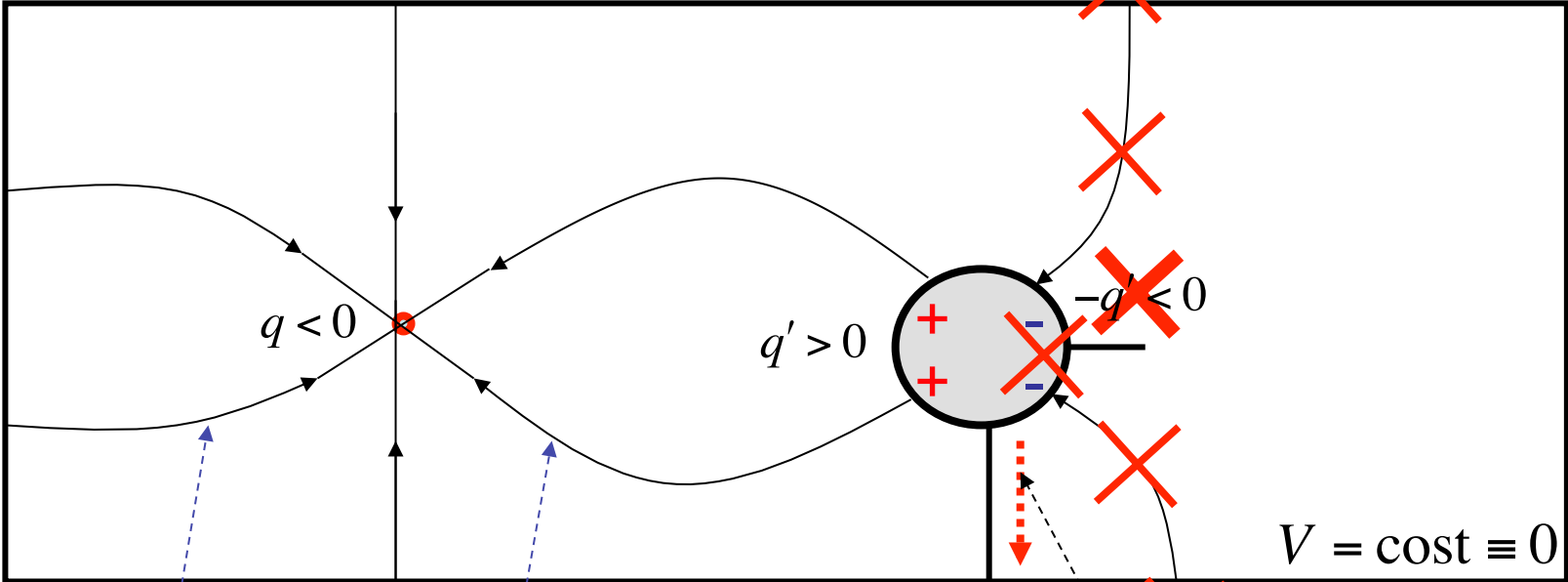


Induzione elettrostatica **non completa**: $|q'| < q$

elettroni “salgono” a neutralizzare la carica $-q'$ sulla superficie del conduttore !

Volendo discutere del perché questo avvenga, possiamo immaginare che - nel transitorio - degli elettroni vengono indotti sulle pareti del laboratorio ma essendovi il collegamento fra conduttore e pareti (stesso potenz.) non può aversi un campo elettrico fra di essi; le cariche pertanto si neutralizzano.

Configurazione (a) alternativa [carica puntiforme negativa]



Induzione elettrostatica non completa: $q' < |q|$

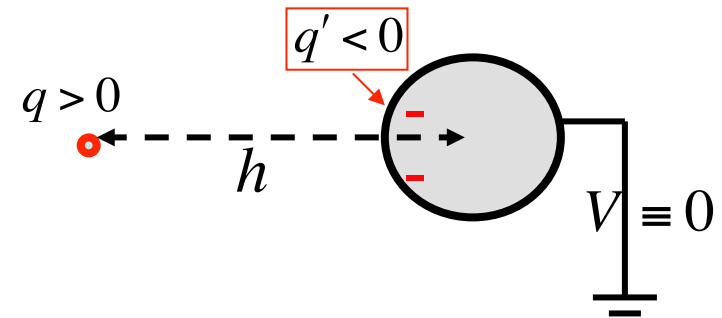
elettroni dalla superf. del conduttore
“scendono” verso le pareti del lab. !

Una descrizione immaginaria del fenomeno puo' essere data in modo analogo alla precedente configurazione; stavolta gli elettroni migrano dalla superf. del conduttore verso terra per neutralizzare la carica positiva indotta transitoriamente sulle pareti del laboratorio.

Applicazioni del metodo delle immagini:

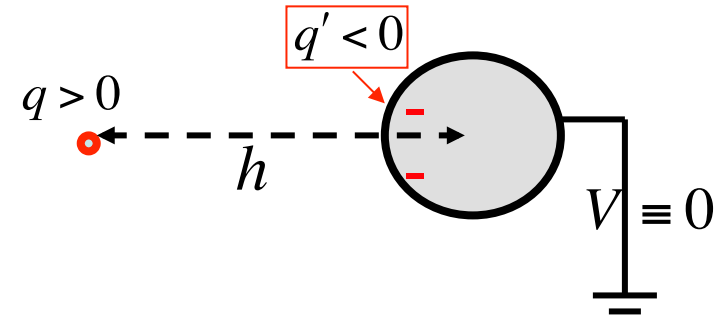
a) Sfera conduttrice messa a terra nel campo di una carica puntiforme

Problema: calcolare potenziale e campo elettrico nei vari punti circostanti il conduttore.



Difficolta' del problema: la carica q' indotta sulla sfera non e' nota (induzione elettrostatica **non completa**: $|q'| < q$); ne conosciamo solo il segno (opposto a quello della carica inducente). Inoltre la distribuzione superficiale di q' **non e' uniforme** (a causa della diversa distanza dalla carica puntiforme inducenti dei vari elementi di superficie).

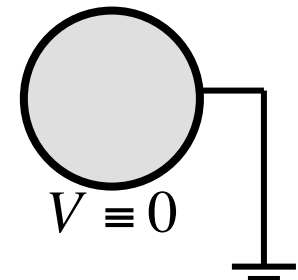
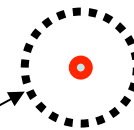
Problema: calcolare potenziale e campo elettrico nei vari punti circostanti il conduttore.



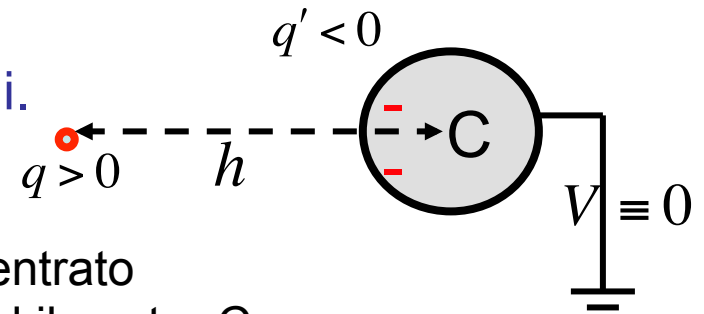
Difficolta' del problema: la carica q' indotta sulla sfera non e' nota (induzione elettrostatica **non completa**: $|q'| < q$); ne conosciamo solo il segno (opposto a quello della carica inducente). Inoltre la distribuzione superficiale di q' **non e' uniforme** (a causa della diversa distanza dalla carica puntiforme inducenti dei vari elementi di superficie).

Per determinare $V(x,y,z)$ nei punti dello spazio vuoto (per poi ricavare il campo) **non e'** dunque **possibile utilizzare direttamente il principio di sovrapposizione!** Tuttavia **il potenziale deve soddisfare l'equazione di Laplace nei punti dello spazio vuoto** ($\nabla^2 V = 0$) **con le seguenti condizioni al contorno**:

$$\left\{ \begin{array}{l} V = 0 \quad (\text{sulla superficie sferica del conduttore}) \\ V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (\text{su superfici sferiche di raggio } r \ll h \text{ centrate sulla carica puntiforme}) \end{array} \right.$$

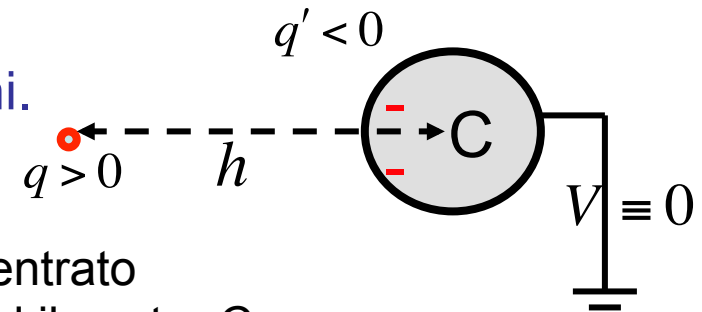


Soluzione: si ricorre al metodo delle immagini.



Considero un sistema di riferimento cartesiano centrato sulla carica puntiforme q . L'asse x passi per q ed il centro C .

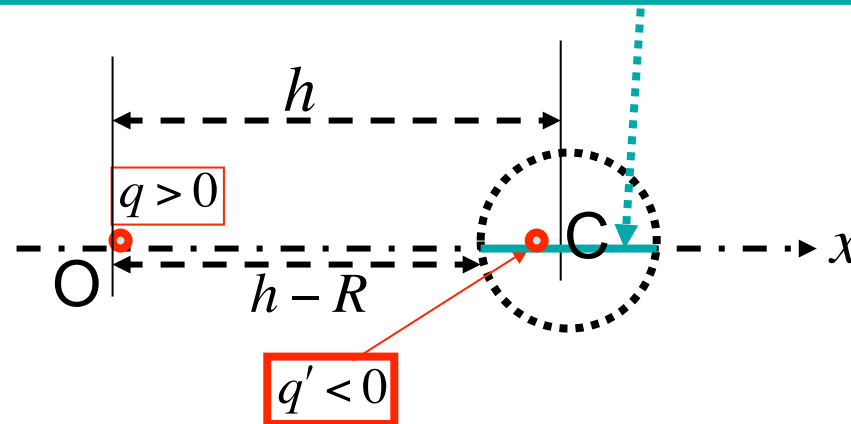
Soluzione: si ricorre al metodo delle immagini.



Considero un sistema di riferimento cartesiano centrato sulla carica puntiforme q . L'asse x passi per q ed il centro C .

Si va a considerare una carica immagine q' anch'essa negativa (come la carica indotta sulla sfera) da porre :

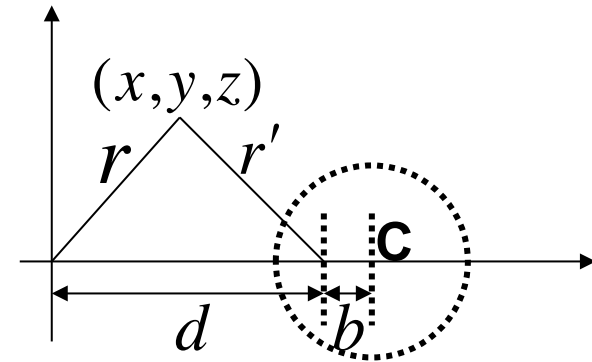
- 1) sull'asse x : unica direzione privilegiata in uno spazio altrimenti isotropo;
- 2) dentro la sfera: non può essere posta nella regione vuota (dove calcolo V)



Il potenziale $V(x,y,z)$ associato alle 2 cariche puntiformi puo' essere ottenuto per sovrapposizione:

$$V(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r'}$$

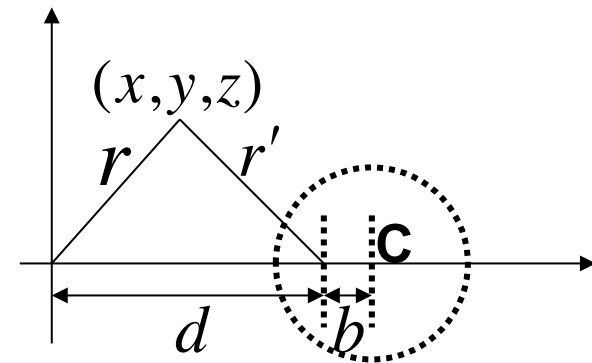
dove $\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 + z^2 & (1) \\ r'^2 = (x-d)^2 + y^2 + z^2 & (2) \end{cases}$



Il potenziale $V(x,y,z)$ associato alle 2 cariche puntiformi puo' essere ottenuto per sovrapposizione:

$$V(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r'}$$

dove $\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 + z^2 & (1) \\ r'^2 = (x-d)^2 + y^2 + z^2 & (2) \end{cases}$

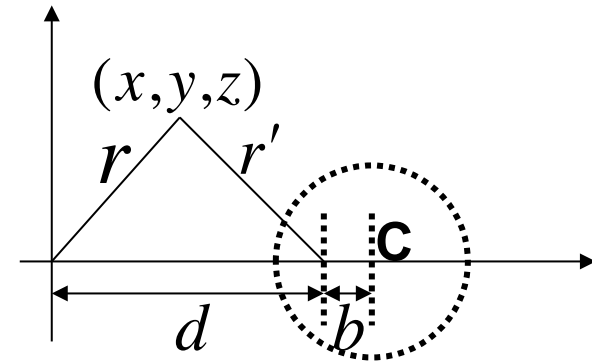


Il luogo dei punti per i quali $V(x,y,z)=0$ e' quello per cui si ha: $\frac{q}{r} = -\frac{q'}{r'}$

Il potenziale $V(x,y,z)$ associato alle 2 cariche puntiformi puo' essere ottenuto per sovrapposizione:

$$V(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r'}$$

dove $\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 + z^2 & (1) \\ r'^2 = (x-d)^2 + y^2 + z^2 & (2) \end{cases}$



Il luogo dei punti per i quali $V(x,y,z)=0$ e' quello per cui si ha: $\frac{q}{r} = -\frac{q'}{r'}$

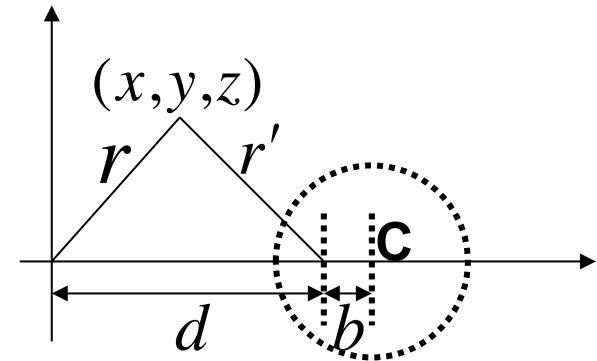
Tale condizione implica: 1) $q' = -q \frac{r'}{r}$ (essendo $q > 0$ si trova correttamente $q' < 0$)

$$2) r'^2 = \left(\frac{q'}{q}\right)^2 r^2$$

Il potenziale $V(x,y,z)$ associato alle 2 cariche puntiformi può essere ottenuto per sovrapposizione:

$$V(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r'}$$

dove $\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 + z^2 & (1) \\ r'^2 = (x-d)^2 + y^2 + z^2 & (2) \end{cases}$



Il luogo dei punti per i quali $V(x,y,z)=0$ è quello per cui si ha: $\frac{q}{r} = -\frac{q'}{r'}$

Tale condizione implica: 1) $q' = -q \frac{r'}{r}$ (essendo $q > 0$ si trova correttamente $q' < 0$)

$$2) r'^2 = \left(\frac{q'}{q}\right)^2 r^2 \quad \begin{matrix} (1) \\ \longleftrightarrow \\ (2) \end{matrix} (x-d)^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{q'}{q}\right)^2 (x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\longleftrightarrow [1 - (q'/q)^2](x^2 + y^2 + z^2) - 2xd + d^2 = 0$$

$$\longleftrightarrow (x^2 + y^2 + z^2) - 2x \frac{d}{[1 - (q'/q)^2]} + d \frac{d}{[1 - (q'/q)^2]} = 0$$

Bisogna trovare le condizioni per le quali la superficie sferica (per $V=0$)...

$$(x^2 + y^2 + z^2) - 2x \frac{d}{[1 - (q'/q)^2]} + d \frac{d}{[1 - (q'/q)^2]} = 0$$

... possa coincidere con la superficie sferica (reale) di centro C e raggio R

d'equazione:

$$(x - h)^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \quad \longleftrightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2xh + (h^2 - R^2) = 0$$

Bisogna trovare le condizioni per le quali la superficie sferica (per $V=0$)...

$$(x^2 + y^2 + z^2) - 2x \frac{d}{[1 - (q'/q)^2]} + d \frac{d}{[1 - (q'/q)^2]} = 0$$

... possa coincidere con la superficie sferica (reale) di centro C e raggio R
d'equazione:

$$(x - h)^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \quad \longleftrightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2xh + (h^2 - R^2) = 0$$

Per confronto:

$$\begin{cases} h = \frac{d}{[1 - (q'/q)^2]} \\ h^2 - R^2 = \frac{d^2}{[1 - (q'/q)^2]} \end{cases} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{cases} h - h(q'/q)^2 = d \\ h^2 - R^2 = hd \end{cases}$$

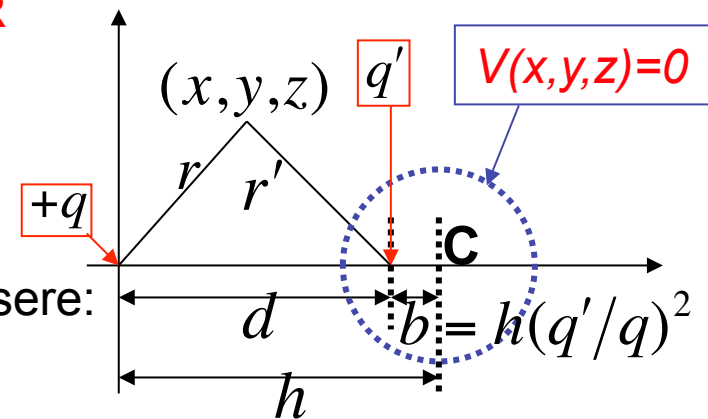
$$\begin{cases} h - d = h(q'/q)^2 \\ R^2 = h(h - d) \end{cases} \quad \longleftrightarrow \quad b \equiv h - d \quad \longleftrightarrow \quad \begin{cases} b = h(q'/q)^2 \\ R^2 = hb \end{cases}$$

Ricapitolando:

Il potenziale associato alle 2 cariche puntiformi q e q' e' **nullo sulla superficie sferica di centro C e raggio R** (coincidente con la superficie del conduttore) se la carica q' si trova a distanza d dalla carica q ed alla distanza $b = h(q'/q)^2 = R^2/h$ dal centro.

Il valore della carica puntiforme “immagine” deve essere:

$$q' = -q\sqrt{\frac{b}{h}} = -q\sqrt{\frac{R^2}{h^2}} = -q\frac{R}{h}$$



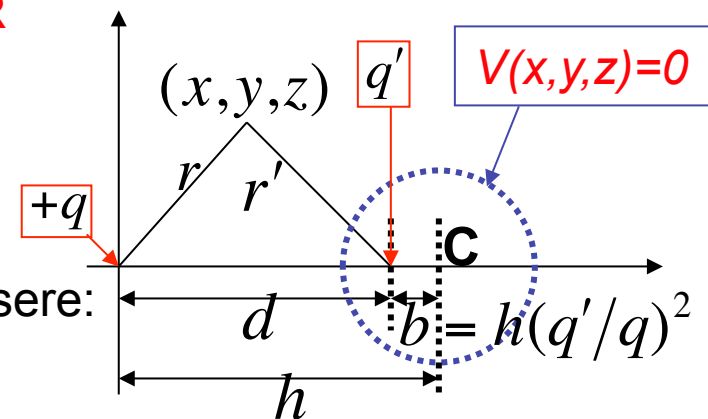
N.B.: $R \leq h \Rightarrow b = R^2/h \equiv R \cdot [< 1] < R$ implica che **q' sia comunque entro la sfera** (come ci si aspettava: la carica immagine non puo' stare nella regione in cui calcolo V!)

Ricapitolando:

Il potenziale associato alle 2 cariche puntiformi q e q' e' **nullo sulla superficie sferica di centro C e raggio R** (coincidente con la superficie del conduttore) se la carica q' si trova a distanza d dalla carica q ed alla distanza $b = h(q'/q)^2 = R^2/h$ dal centro.

Il valore della carica puntiforme “immagine” deve essere:

$$q' = -q\sqrt{\frac{b}{h}} = -q\sqrt{\frac{R^2}{h^2}} = -q\frac{R}{h}$$



Nei punti esterni alla sfera il campo e' derivabile dal potenziale: $V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} \right)$

Il campo elettrico sara' normale rispetto alla superficie del conduttore.

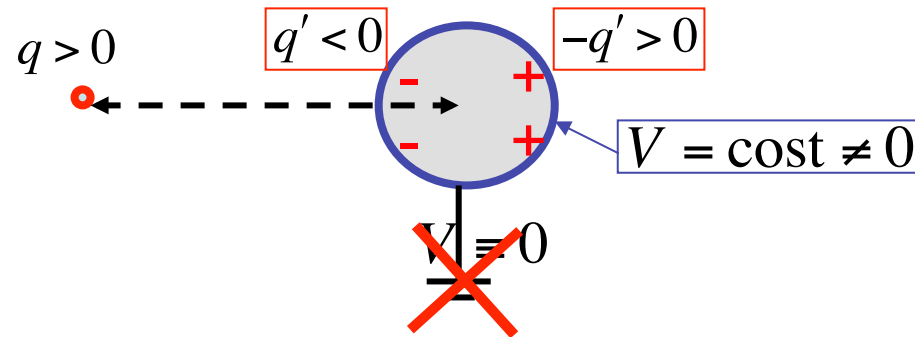
Quando q si allontana dalla sfera (h aumenta) q' si avvicina al centro ($b \propto 1/h$).

Se $h \gg R$ si ha $b \rightarrow 0$ e q' puo' essere posta con buona approx. nel centro C ; in tale condizione limite la carica indotta puo' essere considerata distribuita uniformemente. Inoltre $h \gg R$ implica $|q'| \ll q$.

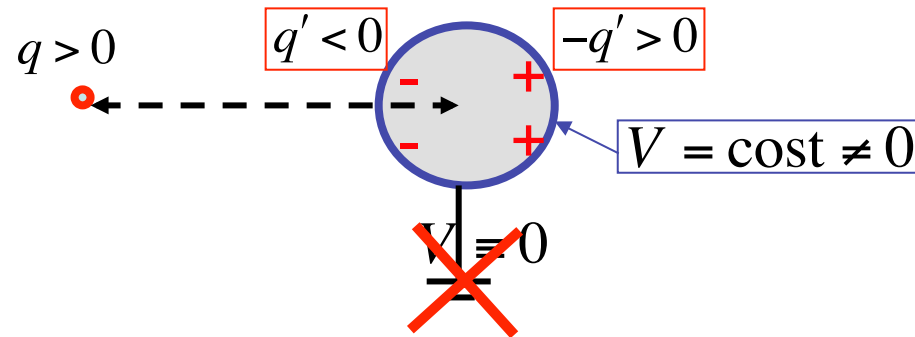
Applicazioni del metodo delle immagini:

b) Sfera conduttrice nel campo elettrico di una carica puntiforme

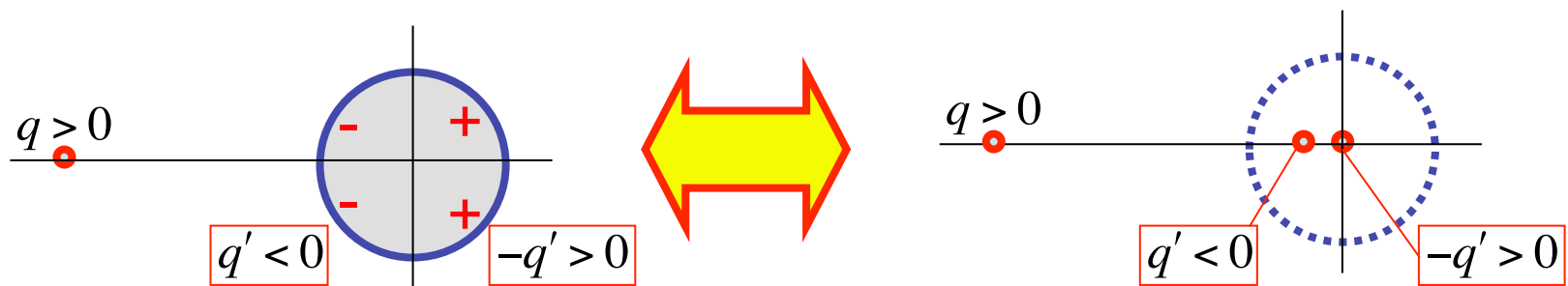
Nel caso la sfera conduttrice non sia collegata a terra bensì inizialmente isolata, deve aversi su di essa della carica indotta di entrambi i segni e stesso valore (la carica totale deve essere nulla).



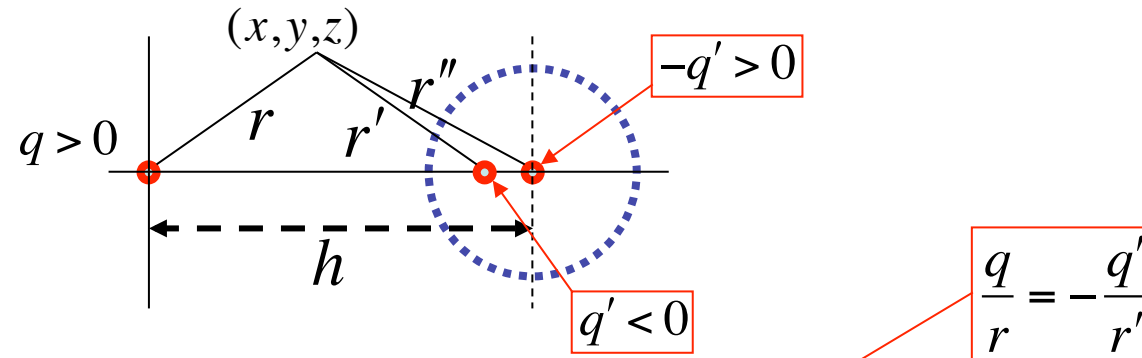
Nel caso la sfera conduttrice non sia collegata a terra bensì inizialmente isolata, deve aversi su di essa della carica indotta di entrambi i segni e stesso valore (la carica totale deve essere nulla).



La superficie della sfera conduttrice sarà ancora equipotenziale, con V non più nullo! Per soddisfare tale condizione bisogna introdurre una ulteriore carica immagine $-q'$ che rappresenti l'ulteriore carica presente sulla sfera conduttrice. Per evidenti ragioni di simmetria, dovendo garantire $V = \text{cost}$ sulla superficie sferica, questa seconda carica immagine puntiforme non può che essere posta sul centro C !

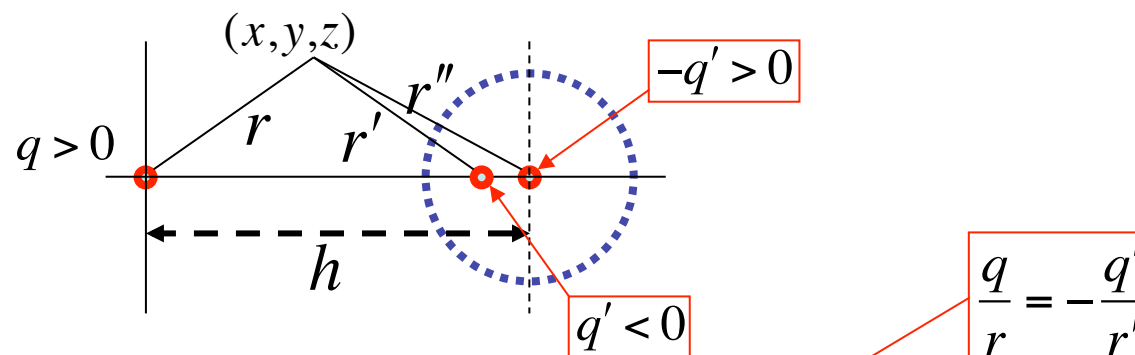


Il potenziale in un punto generico esterno alla sfera si ottiene per **sovrapposizione** dei contributi associati a ciascuna delle tre cariche puntiformi (una reale, 2 immagine):



$$V(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r'} + \frac{(-q')}{4\pi\epsilon_0 r''} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\cancel{\frac{q}{r}} + \cancel{\frac{q'}{r}} - \frac{q'}{r''} \right)$$

Il potenziale in un punto generico esterno alla sfera si ottiene per **sovrapposizione** dei contributi associati a ciascuna delle tre cariche puntiformi (una reale, 2 immagine):



$$V(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r'} + \frac{(-q')}{4\pi\epsilon_0 r''} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\cancel{\frac{q}{r}} + \cancel{\frac{q'}{r}} - \frac{q'}{r''} \right)$$

Pertanto sulla sfera (di centro C e raggio R):

$$V_{SF} = V(r'' \equiv R) = -\frac{q'}{4\pi\epsilon_0 R} \stackrel{=}{=} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 h}$$

$q' = -q \frac{R}{h}$

Il potenziale sui punti della sfera **e' pari**

- 1) al potenziale generato da q nel punto che corrisponde al centro della sfera ... o equivalentemente ...
- 2) a quello associato alla sfera conduttrice - supposta avente carica q - nel punto occupato dalla carica q medesima.

Applicazioni del metodo delle immagini:

c) Sfera conduttrice immersa in un campo elettrico uniforme

Il campo uniforme $\vec{E}_o$ e' considerabile come quello prodotto da una carica puntiforme infinita ($q \rightarrow \infty$) posta a distanza infinita ($h \rightarrow \infty$):

$$\vec{E}_o = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \cdot \frac{q}{h^2} \hat{z} \quad \Rightarrow \quad \frac{q}{h^2} = 4\pi\epsilon_o E_o$$

Poiche' vale ancora: $q' = -q \frac{R}{h}$, $b = \frac{R^2}{h}$... si avra' ($\vec{E}_o$ uniforme quindi costante):

$$q'b = -q \frac{R}{h} \cdot \frac{R^2}{h} = -\frac{q}{h^2} \cdot R^3 = -4\pi\epsilon_o R^3 E_o = \cos t$$

Il campo uniforme $\vec{E}_o$ e' considerabile come quello prodotto da una carica puntiforme infinita ($q \rightarrow \infty$) posta a distanza infinita ($h \rightarrow \infty$):

$$\vec{E}_o = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \cdot \frac{q}{h^2} \hat{z} \quad \Rightarrow \quad \frac{q}{h^2} = 4\pi\epsilon_o E_o$$

Poiche' vale ancora: $q' = -q \frac{R}{h}$, $b = \frac{R^2}{h}$... si avra' ($\vec{E}_o$ uniforme quindi costante):

$$q'b = -q \frac{R}{h} \cdot \frac{R^2}{h} = -\frac{q}{h^2} \cdot R^3 = -4\pi\epsilon_o R^3 E_o = \cos t$$

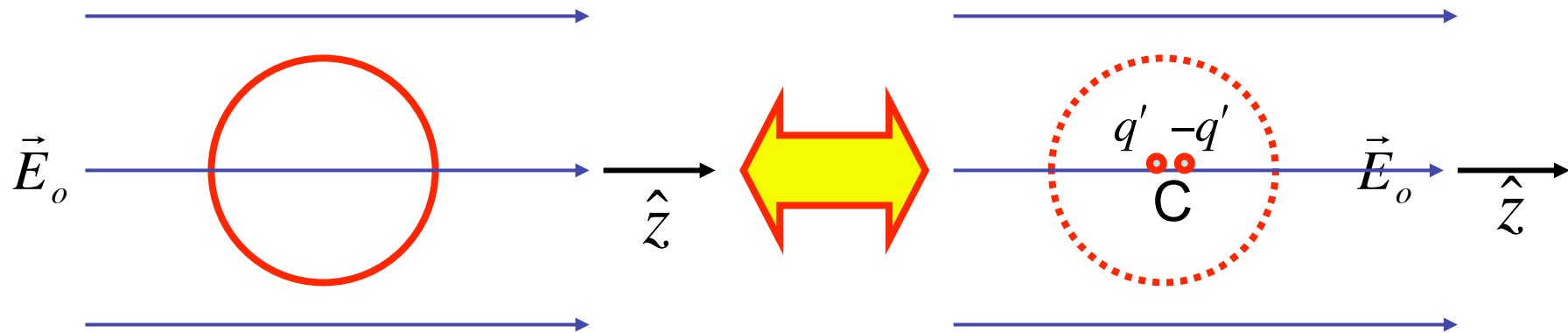
Per $h \rightarrow \infty$ si ha: $b \rightarrow 0$; cioe' ...

...la carica immagine q' si avvicina indefinitamente al centro !

Si noti che $q \rightarrow \infty$ non implica $q' \rightarrow \infty$ perche' anche $h \rightarrow \infty$!

Essendo la sfera isolata c' e' una 2^a carica indotta $-q' > 0$ posta approx. nel suo centro

Complessivamente: le cariche immagine q' e $-q'$ sono ($b \rightarrow 0$) vicinissime e praticamente sul centro della sfera e rappresentano la carica superficiale presente sulla sfera ed indotta dal campo uniforme:

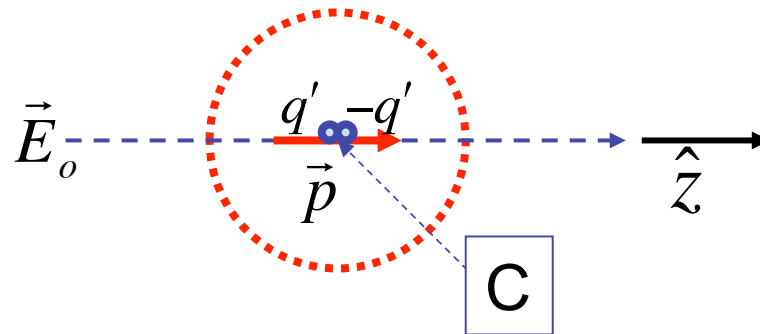


Il controcampo $\vec{E}'$ prodotto dalla distribuzione superficiale di carica indotta sulla sfera e' equivalente a quello prodotto da 2 cariche puntiformi q' e $-q'$ (cariche immagine) poste nel centro della sfera e vicinissime fra loro.

Questo sistema di 2 cariche elettriche puntiformi opposte e vicinissime fra loro costituisce il cosiddetto **dipolo elettrico che verra' studiato in dettaglio piu' avanti.**

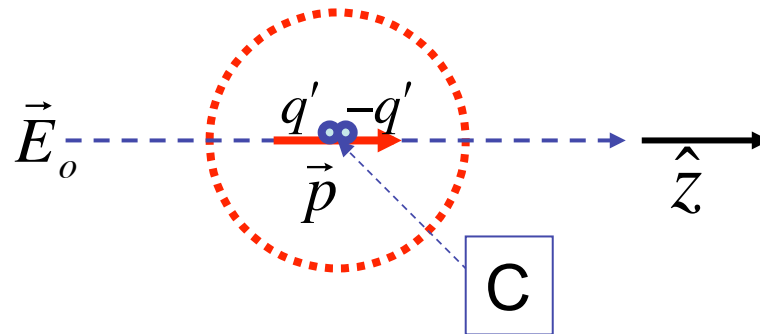
La quantita' (**costante**) che caratterizza il dipolo elettrico e' il ...

... **momento di dipolo elettrico** : $\vec{p} = q'\vec{b}$ con $\vec{b}$ che punta da $q'(<0)$ a $-q'(>0)$



La quantita' (**costante**) che caratterizza il dipolo elettrico e' il ...

... **momento di dipolo elettrico** : $\vec{p} = q'\vec{b}$ con $\vec{b}$ che punta da $q'(<0)$ a $-q'(>0)$

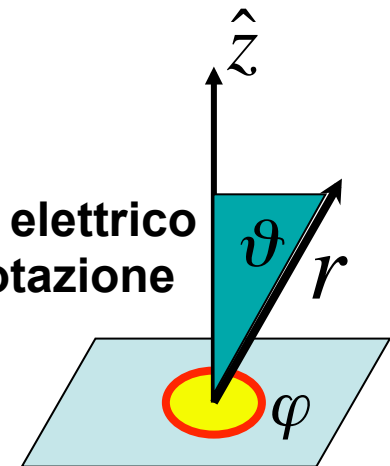


Si noti che: $|\vec{p}| = q'b = 4\pi\epsilon_o R^3 |\vec{E}_o| = \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) 3\epsilon_o E_o = 3\epsilon_o V_{SF} E_o$

Dunque: $|\vec{p}| = \text{cost}$ (e $\vec{p} = |\vec{p}|\hat{z} = \text{cost} \cdot \hat{z}$) nonche' $|\vec{p}| \propto |\vec{E}_o|$

Si vedra' (piu' avanti) che il potenziale associato ad un dipolo elettrico gode di simmetria azimuthale (~~$\propto \varphi$~~ , essendo φ l'angolo di rotazione Intorno $\hat{z}$):

$$V_{\text{dip}}(r, \vartheta) \cong \frac{p \cos \vartheta}{4\pi\epsilon_o r^2}$$



Il controcampo, cioè il campo elettrico del dipolo, è deducibile dal potenziale:

$$\vec{E}' = \vec{E}_{\text{dip}} = -\vec{\nabla} V_{\text{dip}} = -\left(\vec{i} \frac{\partial V}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial V}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial V}{\partial z} \right)$$

Passando a coordinate polari e facendo le derivate parziali (cfr. Appendice):

$$\vec{E}' = \vec{E}_{\text{dip}} = \vec{\nabla} V_{\text{dip}}(r, \vartheta) = \left(-\frac{\partial V}{\partial r}, -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial \vartheta}, -\frac{1}{r \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) \cong \left(\frac{2p \cos \vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \frac{p \sin \vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, 0 \right)$$

Dunque: $\vec{E}_{\text{dip}} \cong \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \vartheta \cdot \hat{r} + \sin \vartheta \cdot \hat{\vartheta})$

Il controcampo, cioè il campo elettrico del dipolo, è deducibile dal potenziale:

$$\vec{E}' = \vec{E}_{\text{dip}} = -\vec{\nabla} V_{\text{dip}} = -\left(\vec{i} \frac{\partial V}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial V}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial V}{\partial z} \right)$$

Passando a coordinate polari e facendo le derivate parziali (cfr. Appendice):

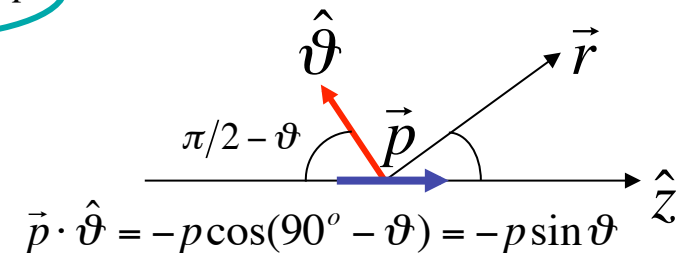
$$\vec{E}' = \vec{E}_{\text{dip}} = -\vec{\nabla} V_{\text{dip}}(r, \vartheta) = \left(-\frac{\partial V}{\partial r}, -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \vartheta}, -\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) \cong \left(\frac{2p \cos \vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \frac{p \sin \vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, 0 \right)$$

Dunque: $\vec{E}_{\text{dip}} \cong \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \vartheta \cdot \hat{r} + \sin \vartheta \cdot \hat{\vartheta})$

Operiamo la seguente manipolazione:

$$\begin{aligned} 2p \cos \vartheta \cdot \hat{r} + p \sin \vartheta \cdot \hat{\vartheta} &= 2p \cos \vartheta \cdot \hat{r} + p \sin \vartheta \cdot \hat{\vartheta} - \vec{p} + \vec{p} = 2p \cos \vartheta \cdot \hat{r} + \cancel{p \sin \vartheta \cdot \hat{\vartheta} - \vec{p}} + \underbrace{p \cos \vartheta \cdot \hat{r} - p \sin \vartheta \cdot \hat{\vartheta}}_{\vec{p}} \\ &= 2p \cos \vartheta \cdot \hat{r} - \vec{p} + p \cos \vartheta \cdot \hat{r} = 3p \cos \vartheta \cdot \hat{r} - \vec{p} \end{aligned}$$

Pertanto: $\vec{E}_{\text{dip}} \cong \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3 \cos \vartheta \cdot \hat{r} - \hat{z})$

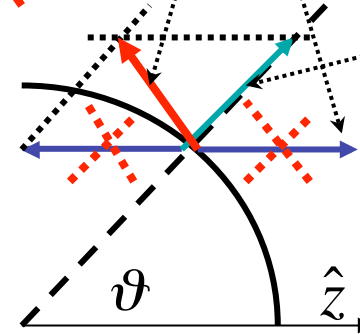


Il campo **totale (esterno + controcampo)** $\mathbf{e}'$: $\vec{E}_{Tot} = \vec{E}_o + \vec{E}'$

Poiche' $|\vec{p}| = 3\epsilon_o V_{SF} E_o$ si ha: $\vec{E}_{Tot} \equiv E_o \hat{z} + \frac{3\epsilon_o V_{SF} E_o}{4\pi\epsilon_o R^3} (3\cos\vartheta \cdot \hat{r} - \hat{z}) = E_o \hat{z} + \frac{V_{SF}}{4/3\pi R^3} E_o (3\cos\vartheta \cdot \hat{r} - \hat{z})$

Per punti sulla sfera ($r = R$) deve aversi:

$$\vec{E}_{Tot}(r = R) = E_o \hat{z} + \frac{V_{SF}}{4/3\pi R^3} E_o (3\cos\vartheta \cdot \hat{r} - \hat{z}) = \cancel{E_o \hat{z}} + 3E_o \cos\vartheta \cdot \hat{r} - \cancel{E_o \hat{z}} = 3E_o \cos\vartheta \cdot \hat{r}$$



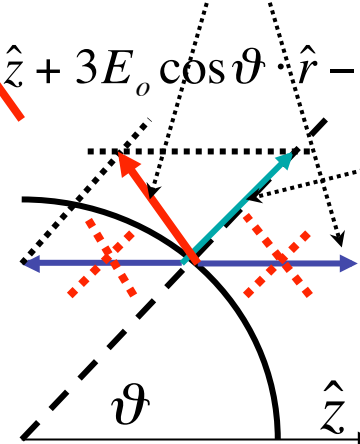
Per punti sulla sfera il campo $\mathbf{e}'$ normale alla superficie (come ci si aspetta) !

Il campo **totale (esterno + controcampo)** $\mathbf{e}'$: $\vec{E}_{Tot} = \vec{E}_o + \vec{E}'$

Poiche' $|\vec{p}| = 3\epsilon_o V_{SF} E_o$ si ha: $\vec{E}_{Tot} \equiv E_o \hat{z} + \frac{3\epsilon_o V_{SF} E_o}{4\pi\epsilon_o R^3} (3\cos\vartheta \cdot \hat{r} - \hat{z}) = E_o \hat{z} + \frac{V_{SF}}{4/3\pi R^3} E_o (3\cos\vartheta \cdot \hat{r} - \hat{z})$

Per punti sulla sfera ($r = R$) deve aversi:

$$\vec{E}_{Tot}(r = R) = E_o \hat{z} + \frac{V_{SF}}{4/3\pi R^3} E_o (3\cos\vartheta \cdot \hat{r} - \hat{z}) = \cancel{E_o \hat{z}} + 3E_o \cos\vartheta \cdot \hat{r} - \cancel{E_o \hat{z}} = 3E_o \cos\vartheta \cdot \hat{r}$$



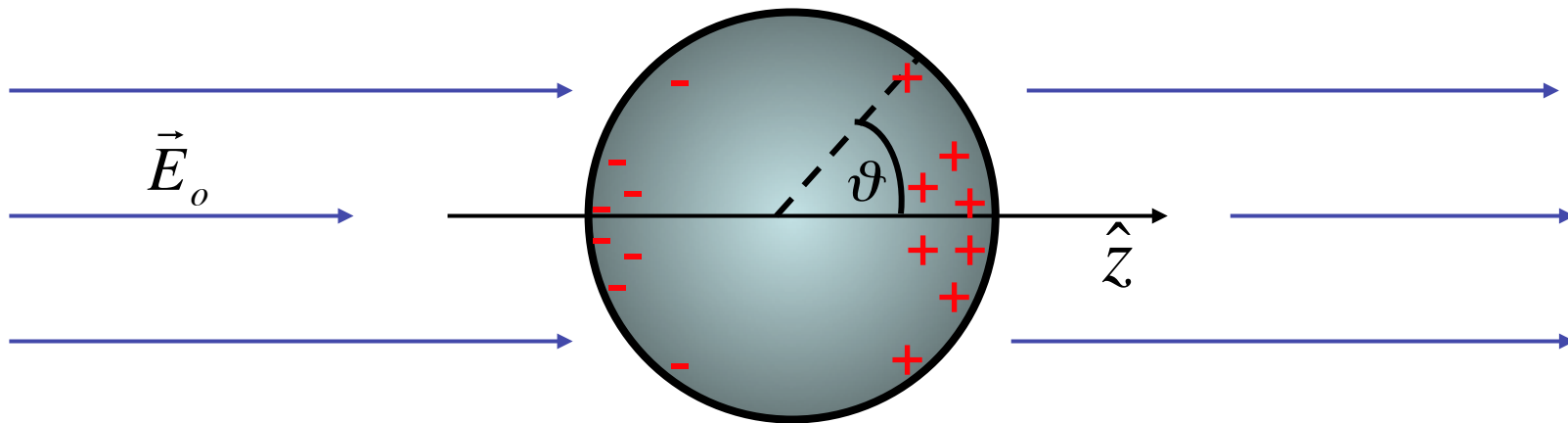
Per punti sulla sfera il campo $\mathbf{e}'$ normale alla superficie (come ci si aspetta) !

Confrontando con la solita espressione “sulla” superficie $\vec{E}(r = R) = \frac{\sigma}{\epsilon_o} \hat{n}$ si ricava:

$$\hat{n} = \hat{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma}{\epsilon_o} = 3E_o \cos\vartheta \Leftrightarrow \boxed{\sigma = 3\epsilon_o E_o \cos\vartheta}$$

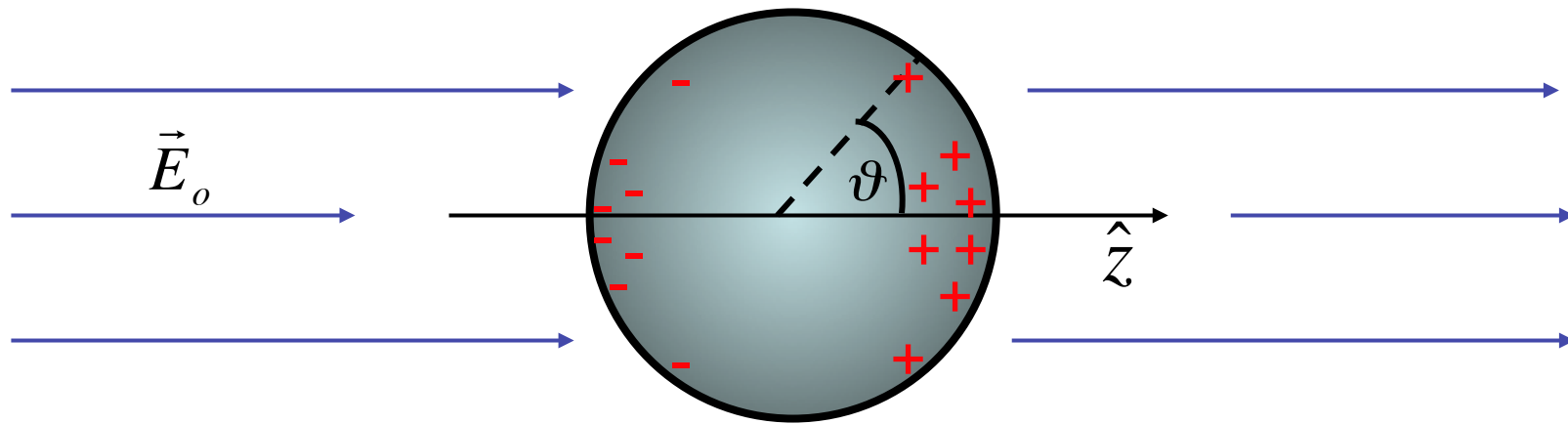
Pertanto la distribuzione della carica indotta sulla superficie sferica ($r = R$) non e' uniforme e dipende solo da ϑ :

$$\boxed{\sigma = 3\varepsilon_o E_o \cos \vartheta} \rightarrow \begin{cases} \sigma(\vartheta = 0) = \sigma_{MAX} = 3\varepsilon_o E_o & \text{e' massima per } \vartheta = 0 \\ \sigma(\vartheta = \pi/2, 3\pi/2) = 0 & \text{decesce proporz. a } \cos \vartheta \\ \sigma(\vartheta = \pi) = \sigma_{MIN} = -3\varepsilon_o E_o & \text{si annulla per } \vartheta = \pi/2 \\ & \text{e' minima per } \vartheta = \pi \end{cases}$$



Pertanto la distribuzione della carica indotta sulla superficie sferica ($r = R$) non e' uniforme e dipende solo da ϑ :

$$\boxed{\sigma = 3\varepsilon_0 E_o \cos \vartheta} \rightarrow \begin{cases} \sigma(\vartheta = 0) = \sigma_{MAX} = 3\varepsilon_0 E_o & \text{e' massima per } \vartheta = 0 \\ \sigma(\vartheta = \pi/2, 3\pi/2) = 0 & \text{decrese proporz. a } \cos \vartheta \\ \sigma(\vartheta = \pi) = \sigma_{MIN} = -3\varepsilon_0 E_o & \text{si annulla per } \vartheta = \pi/2 \\ & \text{e' minima per } \vartheta = \pi \end{cases}$$

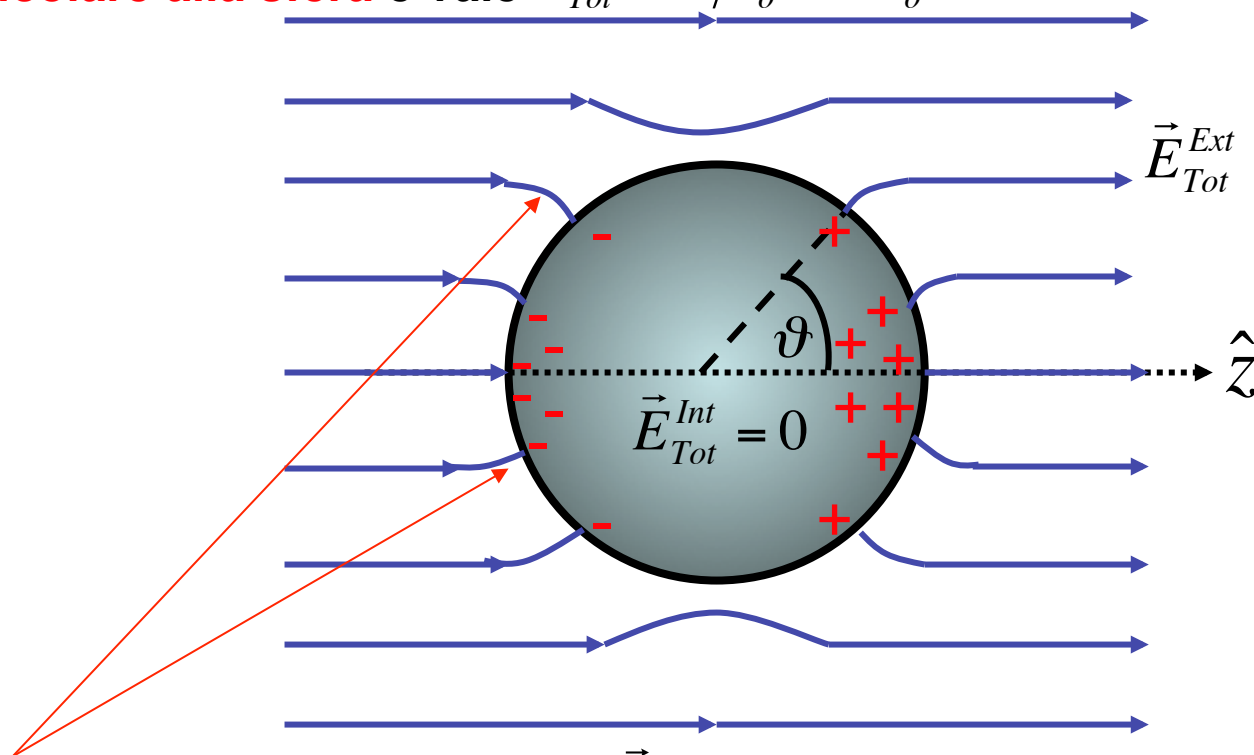


L' integrale della densita' superf. di carica indotta e' nullo (come ci si deve aspettare):

$$\int_{SFERA} \sigma dS = \int_0^\pi 3\varepsilon_0 E_o \cos \vartheta \cdot 2\pi R^2 \sin \vartheta d\vartheta = 6\pi R^2 \varepsilon_0 E_o \int_{+1}^{-1} \cos \vartheta [-d(\cos \vartheta)] = 6\pi R^2 \varepsilon_0 E_o \int_{-1}^{+1} \cos \vartheta d(\cos \vartheta) = 0$$

Conclusione: in base al metodo delle cariche immagini la soluzione del nostro problema (per punti esterni alla superficie della sfera) si ottiene **sovrapponendo**, al campo uniforme $\vec{E}_o$, il campo di un dipolo posto nel centro della sfera di momento $\vec{p} = 4\pi\epsilon_o R^3 \vec{E}_o$ (con R raggio della sfera) **[controcampo]**: $\vec{E}_{Tot} = \vec{E}_o + \vec{E}'$

Sulla superficie sferica ($r = R$) la densita' della carica indotta e' $\sigma = 3\epsilon_o E_o \cos\vartheta$ ed il **campo totale (esterno+controcampo)** per punti immediatamente esterni e' **perpendicolare alla sfera** e vale $E_{Tot}^{Ext} = \sigma/\epsilon_o = 3E_o \cos\vartheta$



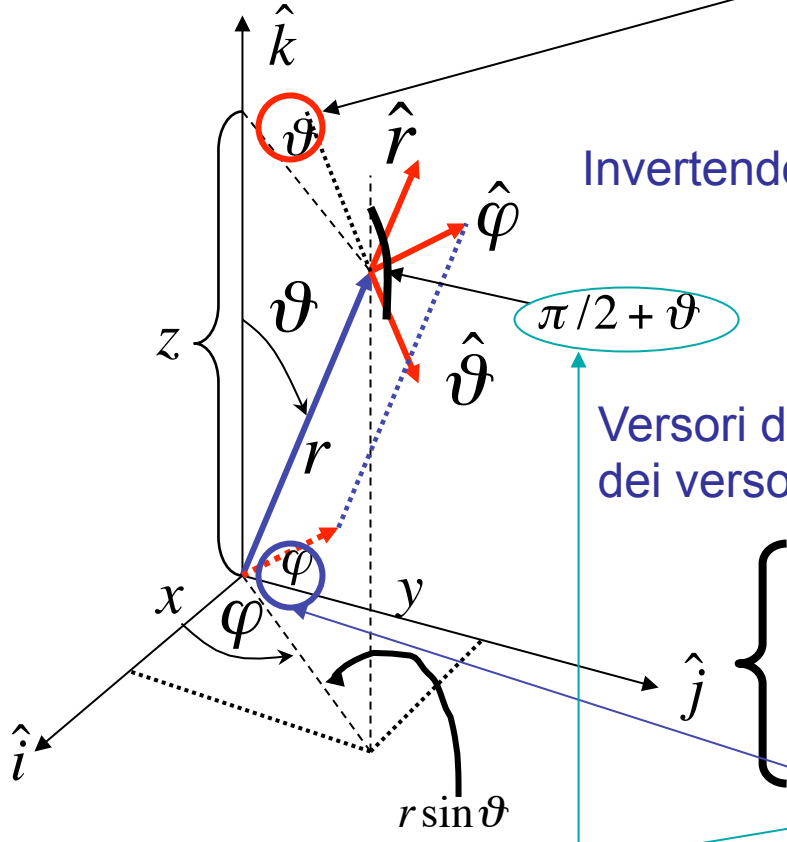
La **distorsione** del campo uniforme $\vec{E}_o$ dovuto alla carica indotta sulla sfera che genera il controcampo $\vec{E}'$ (che garantisce campo interno nullo) e' apprezzabile solo nei pressi della superficie sferica poiche' $\vec{E}' = \vec{E}_{dip} \propto 1/r^3$!

Appendice: passaggio a coordinate sferiche

Vogliamo esprimere l'operatore gradiente in coordinate curvilinee sferiche:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \Rightarrow \vec{\nabla} = ([?] \hat{r} + [?] \hat{\vartheta} + [?] \hat{\varphi})$$

Definiamo le coordinate sferiche:



Invertendo... $\begin{cases} x = r \sin \vartheta \cos \varphi \\ y = r \sin \vartheta \sin \varphi \\ z = r \cos \vartheta \end{cases}$...si ha: $\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \vartheta = \arccos \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \\ \varphi = \arctg \left(\frac{y}{x} \right) \end{cases}$

Versori delle coordinate sferiche in funzione dei versori delle coordinate cartesiane :

$$\begin{cases} \hat{i} = (\sin \vartheta \cos \varphi) \hat{r} + (\cos \vartheta \cos \varphi) \hat{\vartheta} + (-\sin \varphi) \hat{\varphi} \\ \hat{j} = (\sin \vartheta \sin \varphi) \hat{r} + (\cos \vartheta \sin \varphi) \hat{\vartheta} + (\cos \varphi) \hat{\varphi} \\ \hat{k} = (\cos \vartheta) \hat{r} + (-\sin \vartheta) \hat{\vartheta} \end{cases} \quad \text{Red X}$$

Appendice: passaggio a coordinate sferiche - 2

Le derivate parziali nelle coordinate cartesiane vanno riespresse in coordinate sferiche:

$$\vec{\nabla}f(r,\vartheta,\varphi) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k} = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\hat{k}$$

[A] [B] [C]

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{r \cos \varphi \sin \vartheta}{r} = \cos \varphi \sin \vartheta$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{r \sin \varphi \sin \vartheta}{r} = \sin \varphi \sin \vartheta$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{r \cos \vartheta}{r} = \cos \vartheta$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\arctg \frac{y}{x}) = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{r \sin \vartheta \sin \varphi}{r^2 \sin^2 \vartheta} = -\frac{\sin \varphi}{r \sin \vartheta}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\arctg \frac{y}{x}) = \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{r \sin \vartheta \cos \varphi}{r^2 \sin^2 \vartheta} = \frac{\cos \varphi}{r \sin \vartheta}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(\arctg \frac{y}{x}) = 0$$

Appendice: passaggio a coordinate sferiche - 3

Un utile trasformazione di coordinate: $\mu \equiv \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Rightarrow \vartheta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) = \arccos \mu$

Pertanto:
$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \mu} = \frac{\partial}{\partial \mu}(\arccos \mu) = -\frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}}} = -\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{r}{r \sin \vartheta} = -\frac{1}{\sin \vartheta}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(z(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \right) = -\frac{1}{2} z(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} 2x = -\frac{xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{r^2 \cos \vartheta \sin \vartheta \cos \varphi}{r^3} = -\frac{\cos \vartheta \sin \vartheta \cos \varphi}{r}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(z(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \right) = -\frac{1}{2} z(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} 2y = -\frac{yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{r^2 \cos \vartheta \sin \vartheta \sin \varphi}{r^3} = -\frac{\cos \vartheta \sin \vartheta \sin \varphi}{r}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(z(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \right) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} - z \frac{1}{2} \frac{2z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{x^2 + y^2 + z^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{r^2 \sin^2 \vartheta}{r^3} = \frac{\sin^2 \vartheta}{r}$$

[A]
$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{\partial \vartheta}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial x} = -\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{-\cos \vartheta \sin \vartheta \cos \varphi}{r} = \frac{\cos \vartheta \cos \varphi}{r}$$

[B]
$$\frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \frac{\partial \vartheta}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial y} = -\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{-\cos \vartheta \sin \vartheta \sin \varphi}{r} = \frac{\cos \vartheta \sin \varphi}{r}$$

[C]
$$\frac{\partial \vartheta}{\partial z} = \frac{\partial \vartheta}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial z} = -\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\sin^2 \vartheta}{r} = -\frac{\sin \vartheta}{r}$$

Appendice: passaggio a coordinate sferiche - 4

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} f(r, \vartheta, \varphi) &= \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k} = \left(\frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \hat{k} \\
 &= \left(\frac{\partial f}{\partial r} \cos \varphi \sin \vartheta + \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \frac{\cos \varphi \cos \vartheta}{r} - \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r \sin \vartheta} \right) \left[\hat{r} \sin \vartheta \cos \varphi + \hat{\vartheta} \cos \vartheta \cos \varphi - \hat{\varphi} \sin \varphi \right] + \\
 &\quad + \left(\frac{\partial f}{\partial r} \sin \varphi \sin \vartheta + \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \frac{\cos \vartheta \sin \varphi}{r} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r \sin \vartheta} \right) \left[\hat{r} \sin \varphi \sin \vartheta + \hat{\vartheta} \cos \vartheta \sin \varphi + \hat{\varphi} \cos \varphi \right] + \\
 &\quad + \left(\frac{\partial f}{\partial r} \cos \vartheta - \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \frac{\sin \vartheta}{r} \right) \left[\hat{r} \cos \vartheta - \hat{\vartheta} \sin \vartheta \right] = \\
 &= \hat{r} \frac{\partial f}{\partial r} \left(\sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi + \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi + \cos^2 \vartheta \right) + \hat{\vartheta} \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \left(\cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi + \cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi - \sin^2 \vartheta \right) + \\
 &\quad + \hat{\varphi} \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \left(\frac{\sin^2 \varphi}{\sin \vartheta} + \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \vartheta} \right) + [\text{somma di termini che si elidono a coppie}] \\
 &= \hat{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \hat{\vartheta} \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \vartheta} + \hat{\varphi} \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}
 \end{aligned}$$

Esercizio -1

TRACCIA :

Una sfera conduttrice, isolata e scarica, di raggio $R = 1\text{cm}$, viene immersa in un campo elettrico uniforme di modulo $E_o = 10^4 \text{ V/m}$; il potenziale vale $V_o = 10^4 \text{ V}$ nel punto coincidente con il centro della sfera quando questa non c'è.

a) Calcolare il potenziale della sfera, la densità di carica indotta ed il campo elettrico sulla superficie.

Ripetere il calcolo nei due casi :

b) in cui la sfera pur restando isolata possieda una carica $Q = 10^{-8} \text{ C}$

c) in cui la sfera sia a potenziale zero.

Esercizio - 2

RISOLUZIONE (a) :

In base al metodo delle immagini la soluzione del nostro problema per i punti esterni alla superficie della sfera si ottiene sovrapponendo al campo esterno $\vec{E}_o$ il campo di un dipolo elettrico, posto nel centro della sfera, di momento $\vec{p} = 4\pi\epsilon_o R^3 \vec{E}_o$ (se R e' il raggio della sfera).

Il campo elettrico sulla superficie della sfera vale: $E_{Tot}^{Ext} = 3E_o \cos \vartheta = 3 \cdot 10^4 \cos \vartheta \frac{V}{m}$

La densita' di carica indotta sulla superficie della sfera vale:

$$\sigma(\vartheta) = \epsilon_o E_{Tot}^{Ext} = 3\epsilon_o E_o \cos \vartheta = 2.66 \cdot 10^{-7} \cos \vartheta \frac{C}{m^2}$$

Il potenziale assunto dalla sfera e' proprio $V_o = 10^4 V$

Nota: il campo totale dentro la sfera deve essere nullo quindi le cariche indotte generano un controcampo uguale ed opposto ad $\vec{E}_o$

Esercizio - 3

RISOLUZIONE (b) :

Nel caso in cui la sfera isolata possieda già una carica Q , agli effetti già visti bisogna aggiungere quelli della carica Q (per il principio di sovrapposizione):

Il campo elettrico sulla superficie della sfera ($r=R$) vale:

$$E_{Tot}^{Ext} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o R^2} + 3E_o \cos\vartheta = (90 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^4 \cos\vartheta) \frac{V}{m}$$

La densità di carica indotta sulla superficie della sfera vale:

$$\sigma(\vartheta) = \epsilon_o E_{Tot}^{Ext} = \frac{Q}{4\pi R^2} + 3\epsilon_o E_o \cos\vartheta \cong (79.61 \cdot 10^{-7} + 2.66 \cdot 10^{-7} \cos\vartheta) \frac{C}{m^2}$$

Il potenziale sulla superficie della sfera vale:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o R} + V_o \cong 1.9 \cdot 10^4 V$$

Esercizio - 4

RISOLUZIONE (c) :

Si noti che una carica $\bar{Q} = -4\pi\epsilon_o R V_o \cong -1.11 \cdot 10^{-8} C$ darebbe potenziale nullo sulla sfera:

$$\bar{V} = \frac{\bar{Q}}{4\pi\epsilon_o R} + V_o = -V_o + V_o = 0$$

Questo vuol dire che una sfera conduttrice tenuta a massa e posta in un campo elettrico uniforme in un punto in cui il potenziale vale V_o (in sua assenza) deve presentare sulla sua superficie una carica pari a $\bar{Q} = -4\pi\epsilon_o R V_o$.

Tale carica sara' distribuita con densita' superficiale variabile:

$$\bar{\sigma}(\vartheta) = \frac{\bar{Q}}{4\pi R^2} + 3\epsilon_o E_o \cos \vartheta = -\epsilon_o \frac{V_o}{R} + 3\epsilon_o E_o \cos \vartheta \cong (-88.5 \cdot 10^{-7} + 2.7 \cdot 10^{-7} \cos \vartheta) \frac{C}{m^2}$$

Il campo elettrico sulla superficie della sfera vale:

$$\bar{E}_{Tot}^{Ext} = \frac{\bar{Q}}{4\pi\epsilon_o R^2} + 3E_o \cos \vartheta = -\frac{V_o}{R} + 3E_o \cos \vartheta = (-10^6 + 3 \cdot 10^4 \cos \vartheta) \frac{V}{m}$$

N.B.: tutti i risultati visti presuppongono implicitamente che la presenza di cariche sulla superficie della sfera non alteri la distribuzione delle cariche ("lontane") che generano $\vec{E}_o$.