FISICA II
(ELETTROMAGNETISMO ed OTTICA)

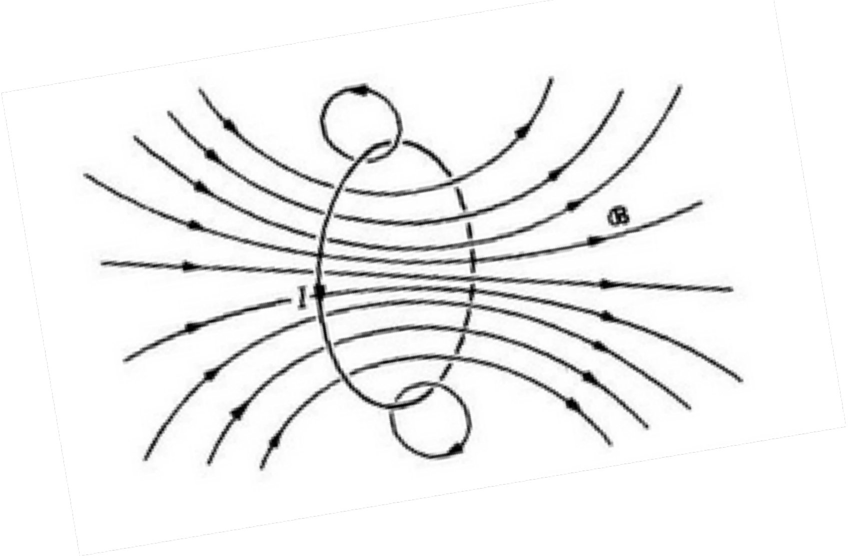
Lezione 23 : Autoinduzione & circuito RL-serie

Titolare del corso : Alexis Pompili
(Dipartimento Interateneo di Fisica, stanza 106, piano-I, 080-5443208)

Modo piu' semplice/veloce di contattarmi : alexis.pompili@ba.infn.it

Ricevimento: giovedi' 11-13, 15-17

Autoflusso

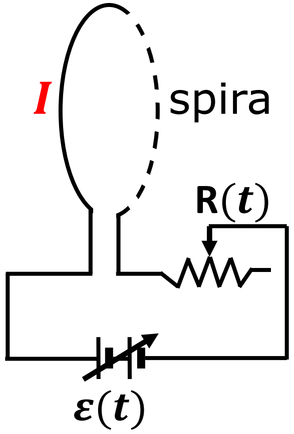


Consideriamo un circuito in cui fluisce una corrente I;
secondo la Legge di Ampere la corrente I produce un campo magnetico $\vec{B}$ che, in ogni punto dello spazio, è proporzionale ad I.

Possiamo calcolare il flusso del campo $\vec{B}$ attraverso il circuito, chiamato ***autoflusso*** o ***flusso concatenato*** perchè dovuto al campo generato dal circuito stesso, che **è quindi proporzionale ad I** e si scrive: $\Phi_m(\vec{B}) \propto I \quad \Rightarrow \quad \Phi_m = LI$

il coeff. di proporzionalità L (autoinduttanza) dipende dalla forma del conduttore ed è espresso nell'unità di misura (derivata) **«*henry*»** $H = Wb \cdot A^{-1} = m^2/Kg \cdot C^{-2}$

Suppongo ora la corrente I non sia costante !
Questa variazione nel tempo può essere ottenuta variando la f.e.m. applicata o la resistenza o entrambe:



Autoinduzione

Quando I cambia nel tempo anche il flusso attraverso il circuito (l'autoflusso) varia: $\Phi_m(\mathrm{t}) = LI(t)$

… ma secondo la legge di Faraday dell'induzione elettrom. nel circuito viene indotta una f.e.m.:

questo caso «speciale» di induzione viene chiamata ***autoinduzione*.**

Si scrive:

f.e.m. autoindotta : $V_L = -\dfrac{d\Phi_m}{dt} = -L\dfrac{dI}{dt}$ [ma se la forma cambia: $V_L = -\dfrac{d(LI)}{dt}$]

L **costante** (dipende dalla geometria)

Autoinduzione

- **Quando I cambia nel tempo anche il flusso attraverso il circuito (l'autoflusso) varia:** $\Phi_m(t) = LI(t)$

… ma secondo la legge di Faraday dell'induzione elettrom. nel circuito viene indotta una f.e.m.:
questo caso «speciale» di induzione viene chiamata ***autoinduzione*****.**

Si scrive:

f.e.m. autoindotta : $V_L = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$ [ma se la forma cambia: $V_L = -\frac{d(LI)}{dt}$]

L **costante** (dipende dalla geometria)

V_L **agisce sempre in modo da opporsi al cambiamento della** I

Autoinduzione

Quando I cambia nel tempo anche il flusso attraverso il circuito (l'autoflusso) varia: $\Phi_m(t) = LI(t)$

… ma secondo la legge di Faraday dell'induzione elettrom. nel circuito viene indotta una f.e.m.:
questo caso «speciale» di induzione viene chiamata ***autoinduzione*.**

Si scrive:

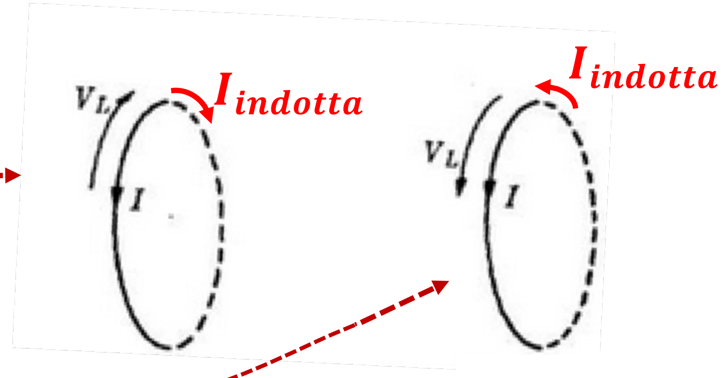
f.e.m. autoindotta : $V_L = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$ [ma se la forma cambia: $V_L = -\frac{d(LI)}{dt}$]

L **costante** (dipende dalla geometria)

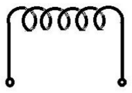
V_L **agisce sempre in modo da opporsi al cambiamento della** I

Sia p.es. **antioraria la corrente inducente I ; due sono i casi :**

- I aumenta ⇨ $\frac{dI}{dt} > 0$ ⇨ $V_L < 0$ ⇨ $I_{indotta} < 0$ (oraria)
- I diminuisce ⇨ $\frac{dI}{dt} < 0$ ⇨ $V_L > 0$ ⇨ $I_{indotta} > 0$ (antioraria)

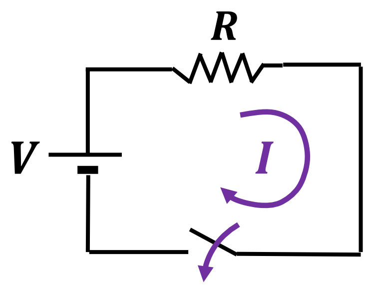


Per indicare che un conduttore ha un'autoinduttanza apprezzabile si usa il simbolo dell'***induttore***
(anche se non è concentrata in un punto ma è una proprietà del circuito nel suo insieme)



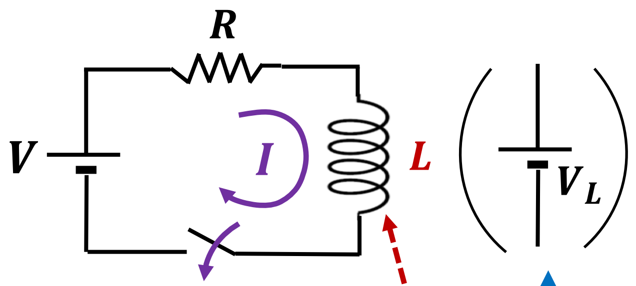
Transitorio nel quale si stabilisce una corrente in un circuito

Quando una f.e.m. V viene applicata ad un circuito chiudendo un interruttore la corrente **non raggiunge istantaneamente** **il valore $I = \frac{V}{R}$ corrispondente alla legge di Ohm, ma sale gradualmente avvicinandosi a tale valore (*valore a regime*).**



Questo processo è dovuto alla comparsa della f.e.m. autoindotta V_L che si oppone alla variazione della corrente (ed agisce mentre la corrente aumenta da zero fino al suo valore costante finale).

Per tener conto di questo fenomeno - pur se l'autoinduttanza non è concentrata in un punto - si introduce l'induttore che rappresenta qui l'autoinduttanza del circuito :



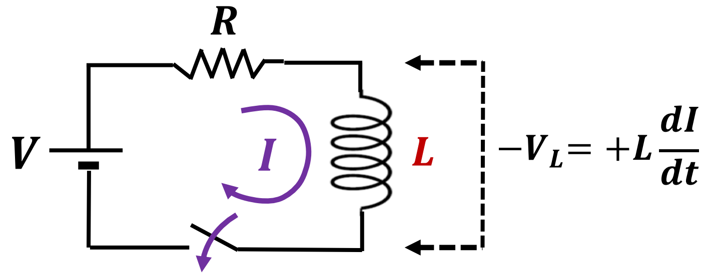
L'autoinduttanza va considerata come la sede della f.e.m. autoindotta $V_L = -L\frac{dI}{dt}$ **e va immaginata come un generatore di f.e.m. circuitale che però agisce nella maglia in modo opposto al generatore presente :**

(per via del segno -). In tal caso l'equazione della maglia si scrive come:

$$V + V_L = RI \iff V - L\frac{dI}{dt} = RI$$

Circuito RL con generatore - I

- **Parimenti si può immaginare che l'induttore sia un elemento circuitale ai capi del quale vi è la caduta di potenziale** $(-V_L) = +L\frac{dI}{dt}$ **:**



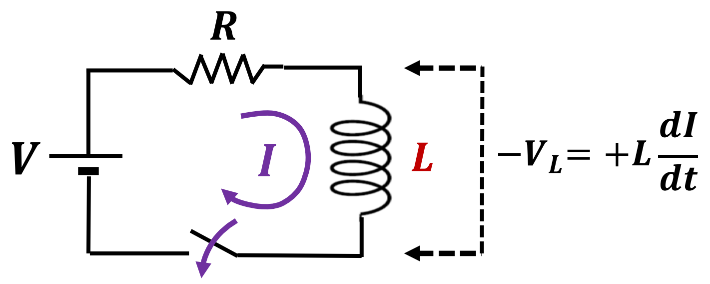
$$V = -V_L + RI \quad \Longleftrightarrow \quad V = RI + L\frac{dI}{dt}$$

Questa equazione differenziale di 1° grado puo' essere risolta separando le variabili :

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{V}{R} - I = \frac{L}{R}\frac{dI}{dt} \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{R}{L}dt = \frac{dI}{I - V/R}$$

Integrando (si tenga conto che $I = 0$ quando $t = 0$): $-\int_0^t \frac{R}{L}dt' -= \int_0^I \frac{dI'}{I' - V/R} \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{R}{L}t = ln(I - V/R) - ln(-V/R)$

- **Parimenti si può immaginare che l'induttore sia un elemento circuitale ai capi del quale vi è la caduta di potenziale** $(-V_L) = +L\dfrac{dI}{dt}$ **:**



$$V = -V_L + RI \quad \Longleftrightarrow \quad V = RI + L\frac{dI}{dt}$$

Questa equazione differenziale di 1° grado puo' essere risolta separando le variabili :

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{V}{R} - I = \frac{L}{R}\frac{dI}{dt} \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{R}{L}dt = \frac{dI}{I - V/R}$$

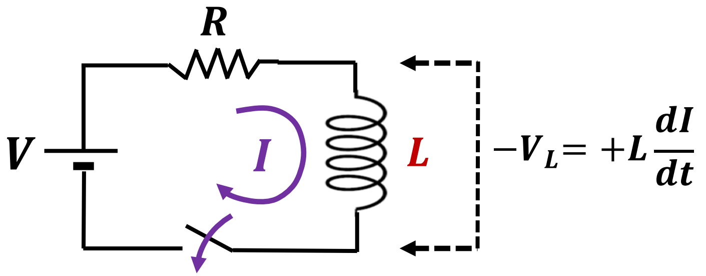
Integrando (si tenga conto che $I = 0$ quando $t = 0$): $-\int_0^t \frac{R}{L}dt' - = \int_0^I \frac{dI'}{I' - V/R} \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{R}{L}t = ln(I - V/R) - ln(-V/R)$

Esponenziando ambo i membri:

$$e^{-\frac{R}{L}t} = e^{ln(I-V/R)-ln(-V/R)} = e^{ln(I-V/R)} \cdot e^{-ln(-V/R)} = \frac{e^{ln(I-V/R)}}{e^{+ln(-V/R)}} \quad \Longleftrightarrow \quad e^{+ln(-V/R)} \cdot e^{-\frac{R}{L}t} = e^{ln(I-V/R)}$$

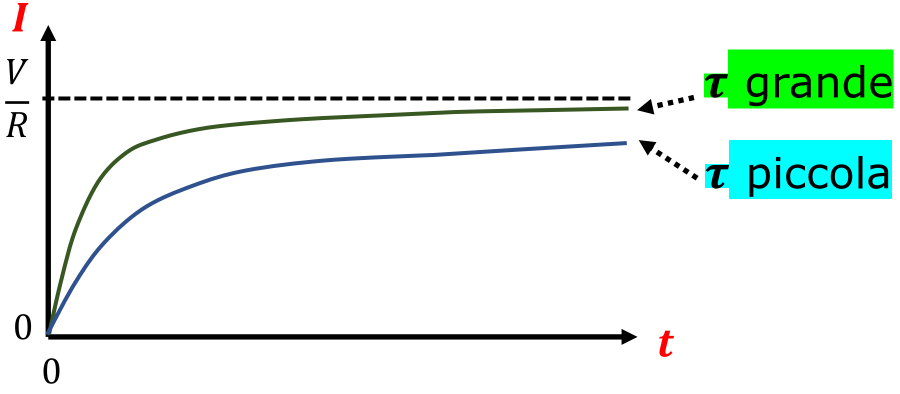
$$\Longleftrightarrow \quad -\frac{V}{R}e^{-\frac{R}{L}t} = I - \frac{V}{R}$$

$$\Longleftrightarrow \quad I = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$



- Discutiamo il risultato trovato: $\boxed{I = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \equiv \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \text{ con } \tau = \frac{L}{R}}$

Il 2° termine in parentesi decresce all'aumentare tempo e la corrente I raggiunge asintoticamente il valore $\frac{V}{R}$ dato dalla legge di Ohm; lo fa tanto più rapidamente quanto più la costante temporale del circuito è piccola.



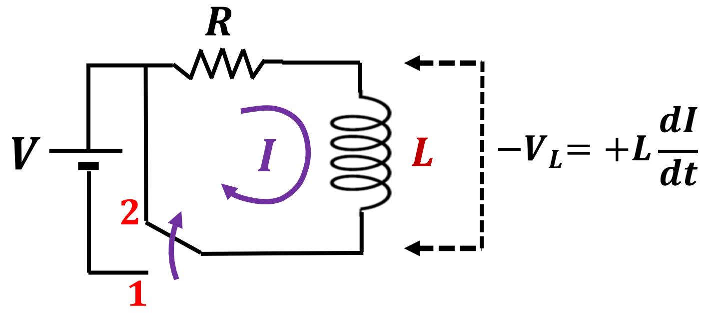
- Si noti la similitudine matematica con il corpo che si muove in un fluido viscoso :

$V - RI = L\frac{dI}{dt}$ simile a … $F - K\eta v = m\frac{dv}{dt}$ suggerendo le seguenti corrispondenze: $\left\{\begin{array}{l} V \leftrightarrow F \\ L \leftrightarrow m \\ R \leftrightarrow K\eta \end{array}\right.$

[p.es. F=mg]

Circuito RL senza generatore (*extracorrente* di apertura)

- Supponiamo invece di aprire il circuito una volta stabilita la $\boldsymbol{I}$ (portando l'interruttore dalla posizione 1 alla 2 e cosi facendo togliendo la f.e.m senza aprire il circuito) :



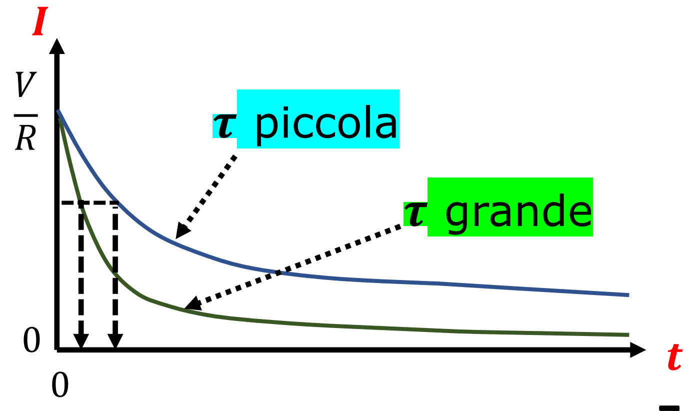
L'equazione del circuito adesso è: $\boldsymbol{0 = RI + L\frac{dI}{dt}}$

$$\Longleftrightarrow \; -I = \frac{L}{R}\frac{dI}{dt} \; \Longleftrightarrow \; -\frac{R}{L}dt = \frac{dI}{I} \; \Longrightarrow \; -\int_0^t \frac{R}{L}dt' - = \int_{\frac{V}{R}}^{I}\frac{dI'}{I'} \; \Longleftrightarrow \; -\frac{R}{L}t = ln(I) - ln\left(\frac{V}{R}\right)$$

Esponenziando ambo i membri: $\boldsymbol{e^{-\frac{R}{L}t} = e^{lnI - ln(V/R)}}$ $\Longleftrightarrow$ $e^{+ln(V/R)} \cdot e^{-\frac{R}{L}t} = e^{lnI}$ $\Longleftrightarrow$

$$\boldsymbol{I = \frac{V}{R}e^{-\frac{R}{L}t} \equiv \frac{V}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}} \text{ con } \boldsymbol{\tau = \frac{L}{R}}$$

Stavolta la corrente diminuisce esponenzialmente all'aumentare del tempo secondo la costante di tempo $\boldsymbol{\tau = \frac{L}{R}}$ [diminuisce di 1/e (~63%) in 1τ]



Anche stavolta l'induttanza tende ad opporsi alla variazione di corrente per cui all'apertura del circuito la corrente non va a 0 immediatamente ma si ha un effetto di scarica che si osserva sull'interruttore definita ***extracorrente di apertura***.