Prova scritta Fisica-II per Chimica Triennale - 26 giugno 2020 ore 16.00

Esercizio n.1 (15 punti) [tempo di esecuzione 40']

In un volume sferico di raggio R e di centro O è distribuita con simmetria sferica - ma non uniformemente - una carica elettrica la cui densità di volume dipende linearmente dal modulo della distanza dal punto O, secondo la relazione $\rho = Ar$ con A=cost. Il tutto è disposto nel vuoto.

1) Ricavare l'espressione della carica totale Q contenuta nella sfera.

2) Ricavare l'andamento del campo elettrico con la distanza r, internamente ed esternamente alla sfera e darne una rappresentazione grafica.

Esercizio n.2 (15 punti) [tempo di esecuzione 35']

Calcolare il campo magnetico al centro di una spira piana quadrata di lato L percorsa da una corrente I, nel vuoto.

Esercizio n.1

La frazione di carica su un guscio sferico di raggio generico r e volume $d\tau = 4\pi r^2 dr$: $dQ = \rho d\tau$ dove $\rho = Ar$

La carica totale sulla sfera s'ottiene per integrazione: $Q = \int_{sfera} \rho d\tau = \int_0^R Ar \cdot 4\pi r^2\, dr = \pi\, A \int_0^R 4r^3 dr = \pi\, A \left[r^4\right]_0^R = \pi A R^4$

Esternamente alla sfera ($r > R$), applicando il T. di Gauss si ha:

$$E_0 \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Longrightarrow E_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{AR^4}{4\varepsilon_0 r^2}$$

Internamente alla sfera ($r < R$) , applicando il T. di Gauss si ha:

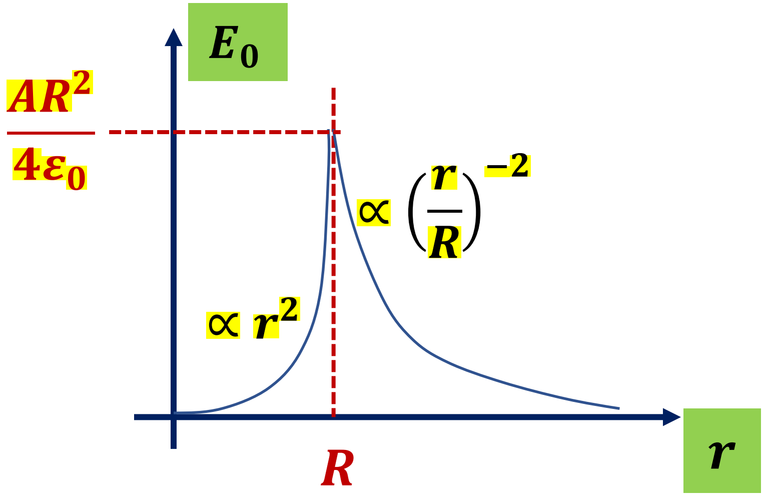
$$E_0 \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q(r)}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r Ar' \cdot 4\pi r'^2\, dr' = \frac{\pi A r^4}{\varepsilon_0} \Longrightarrow E_0 = \frac{\pi A r^4}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Ar^2}{4\varepsilon_0}$$

Non si ha discontinuita' attraverso la sfera ($r = R$); infatti:

$$E_0(r > R) = \frac{AR^4}{4\varepsilon_0 r^2} \Longrightarrow E_0(r = R) = \frac{AR^{\cancel{4}\,2}}{4\varepsilon_0 \cancel{R^2}}$$

$$E_0(r < R) = \frac{Ar^2}{4\varepsilon_0} \Longrightarrow E_0(r = R) = \frac{AR^2}{4\varepsilon_0}$$

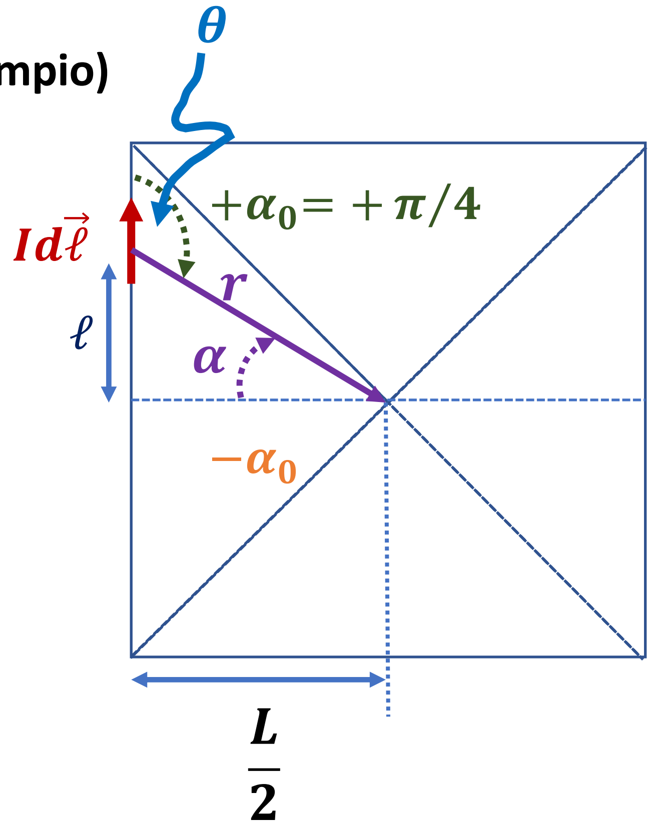
$$\left.\right\} E_0(r = R) = \frac{AR^2}{4\varepsilon_0}$$



Esercizio n.2

I contributi dei 4 lati sono concordi (*entranti* nel foglio, scelta la corrente oraria ad esempio) e uguali fra loro per la simmetria della configurazione.

Il contributo di ciascun lato si calcola come nel caso di un filo rettilineo indefinito (ma usando gli estremi di integrazione opportuni) :



$$B_{lato} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{lato} \frac{\hat{u}_T \times \hat{u}_r}{r^2} d\ell = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{lato} \frac{\sin\theta \, d\ell}{r^2}$$

... dove :

$$\sin\theta = \sin\left(\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$$

$$\frac{L}{2} = r\cos\alpha \Rightarrow r = \frac{L}{2\cos\alpha} \qquad \ell = \frac{L}{2} tg\alpha \Longrightarrow d\ell = \frac{L}{2} \cdot \frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}$$

Mettendo tutto insieme :

$$B_{lato} = \frac{\mu_0 I}{\cancel{4}\pi} \int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0} \frac{\cancel{L}(\cos\alpha)\cancel{4}(\cancel{\cos^2\alpha})}{2L^{\cancel{2}}(\cancel{\cos^2\alpha})} d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi L} \int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0} \cos\alpha \, d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi L} [\sin\alpha]_{-\alpha_0}^{+\alpha_0}$$

$$[\sin\alpha_0 - \sin(-\alpha_0)] = 2\sin\alpha_0$$

Essendo $\sin(\alpha_0 = \pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ si ha : $\boxed{B = 4B_{lato} = 4\frac{\mu_0 I}{\pi L}\sin\alpha_0 = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi L}}$