Prova scritta Fisica-II per Chimica Triennale - 20/2/2020 - ore 15.30-18.30 (Aula 5 - Chimica)

Esercizio n.1 (11 punti)

All'interno di una sfera di raggio $R = 0.384m$ è distribuita della carica elettrica con densità volumetrica $\rho = k/r$ dove $k = 7.53 \cdot 10^{-3} C/m^2$ ed r è la distanza del punto in cui si considera ρ dal centro della sfera. Calcolare:

1) la carica elettrica q contenuta all'interno della sfera;
2) il campo elettrostatico $\vec{E}$ nei punti alle distanze $r_1 = \mathrm{R}/2$ ed $r_2 = 2\mathrm{R}$ dal centro della sfera;
3) il potenziale elettrostatico V_0 nel centro della sfera; 4) l'energia elettrostatica U della distribuzione di carica.

Soluzione

Indico con dV il volume di un guscio sferico di spessore infinitesimo che porta carica elettrica $dq = \rho dV = \frac{k}{r} dV = \frac{k}{r} 4\pi r^2 dr$

La carica elet. s'ottiene per integrazione sull'intera sfera : $q = \int_0^R 4\pi k r dr = 4\pi k \int_0^R r dr = 4\pi k \frac{R^2}{2} = 2\pi k R^2 \cong 6.98 \cdot 10^{-3} C$

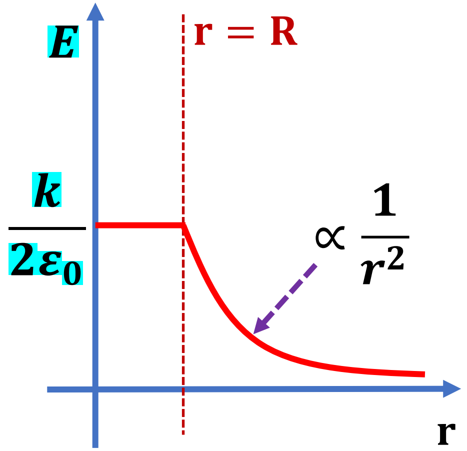
Il campo viene calcolato mediante il Teorema di Gauss: $\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \oint_S \rho dV$

Essendo la configurazione di carica e quindi anche il campo a simmetria sferica si ha, per $\mathrm{r} < \mathrm{R}$: $4\pi r^2 E(r < R) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^{r<R} 4\pi k r dr$ (1)

Invece per $\mathrm{r} > \mathrm{R}$: $4\pi r^2 E(r \geq R) = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{2\pi k R^2}{\varepsilon_0}$ (2)

Quindi per $r_1 = \frac{R}{2}$ si usa la (1) riscrivibile come: $\boxed{E(r<R)} = \frac{4\pi k}{\varepsilon_0 4\pi r^2}\int_0^{r<R} r\,dr = \frac{k}{\varepsilon_0 r^2}\cdot\frac{r^2}{2} = \boxed{\frac{k}{2\varepsilon_0}}$ **(1’)**

$$\Rightarrow E\left(r_1 = \frac{R}{2}\right) = \frac{k}{2\varepsilon_0} \cong \frac{7.53\cdot 10^{-3}}{2\cdot 8.85\cdot 10^{-12}}\frac{V}{m} \cong 4.25\cdot 10^{8}\,\frac{V}{m}$$



Invece per $r_2 = 2\mathrm{R}$ si usa la (2) riscrivibile come: $\boxed{E(r\geq R)} = \frac{2\pi k R^2}{\varepsilon_0 4\pi r^2} = \boxed{\frac{kR^2}{2\varepsilon_0 r^2}}$ **(2’)**

$$\Rightarrow E(r_2 = 2R) = \frac{kR^2}{2\varepsilon_0 (2R)^2} = \frac{k}{8\varepsilon_0} \cong \frac{7.53\cdot 10^{-3}}{8\cdot 8.85\cdot 10^{-12}}\frac{V}{m} \cong 1.06\cdot 10^{8}\,\frac{V}{m}$$

Il potenziale si trova dalla sua definizione considerando il campo interno alla sfera [dalla (1’)] ed esterno [dalla (2’)] alla sfera :

$$V_0 = V(r=0) = -\int_{\infty}^{r=0}\vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_{\infty}^{r=R}E(r>R)dr - \int_{r=R}^{r=0}E(r<R)dr = -\int_{\infty}^{R}\frac{kR^2}{2\varepsilon_0 r^2}dr - \int_{R}^{0}\frac{k}{2\varepsilon_0}dr =$$

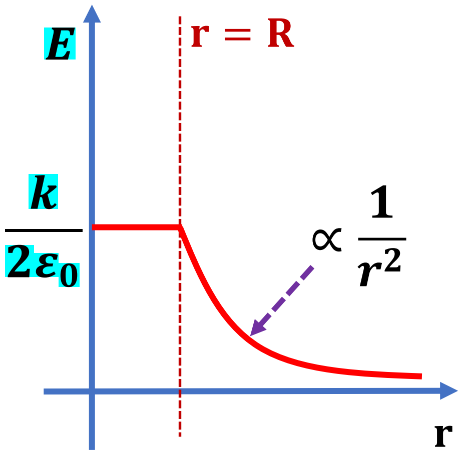
$$= -\int_{\infty}^{R}\frac{kR^2}{2\varepsilon_0 r^2}dr - \int_{R}^{0}\frac{k}{2\varepsilon_0}dr = \frac{kR^2}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{R} - \frac{k}{2\varepsilon_0}[r]_R^0 = \frac{kR^2}{2\varepsilon_0 R} + \frac{k}{2\varepsilon_0}[r]_0^R = \frac{kR}{2\varepsilon_0} + \frac{kR}{2\varepsilon_0} = \frac{kR}{\varepsilon_0} \cong 3.27\cdot 10^{8} V$$

Essendo il capo elettrico costante all'interno della sfera ed uguale al campo di una carica puntiforme q all'esterno si ha:

$$U = U_{int} + U_{ext}$$

dove :

$$U_{int} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E(r<R)^2 \cdot V_{sfera} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{k^2}{4\varepsilon_0^2}\frac{4\pi R^3}{3} = \frac{\pi k^2 R^3}{6\varepsilon_0}$$



$$U_{ext} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_R^\infty E(r>R)^2\,\mathrm{dV} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_R^\infty \frac{k^2 R^4}{4\varepsilon_0^2 r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{\pi k^2 R^4}{2\varepsilon_0}\int_R^\infty \frac{dr}{r^2}$$

$$= \frac{\pi k^2 R^4}{2\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_R^\infty = \frac{\pi k^2 R^4}{2\varepsilon_0}\frac{1}{R} = \frac{\pi k^2 R^3}{2\varepsilon_0}$$

e sommando i due contributi: $U = U_{int} + U_{ext} = \frac{\pi k^2 R^3}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\frac{\pi k^2 R^3}{\varepsilon_0} \cong 7.59 \cdot 10^5 \mathrm{J}$

Prova scritta Fisica-II per Chimica Triennale - 20/2/2020 - ore 15.30-18.30 (Aula 5 - Chimica)

Esercizio n.2 (9 punti)

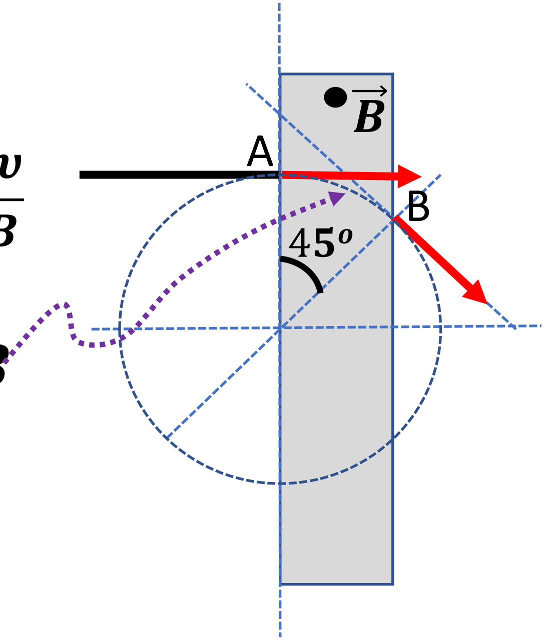
Una particella, dopo aver percorso un tratto $\ell = 1cm$ in una regione in cui è presente un campo magnetico uniforme $\vec{B}$, viaggia con velocità $v = 1m/s$ in una direzione che forma un angolo di 45° con la direzione originale. Determinare il valore del campo se si tratta di un elettrone e se invece si tratta di un protone [$q = 1.6 \cdot 10^{-19} C$, $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} Kg$, $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} Kg$].

Soluzione

La forza di Lorentz agisce sulla particella è una forza centripeta : $$qvB = \frac{mv^2}{r}$$

Conseguentemente la particella percorre un arco di circonferenza (lungo $\ell = 1cm$) di raggio: $$r = \frac{mv}{qB}$$

$$\ell \equiv \widehat{AB}$$



Uscendo a 45° la particella percorre un ottavo di circonferenza : $$\ell = \frac{2\pi r}{8} \equiv \frac{\pi r}{4}$$

Pertanto : $$\ell = \frac{\pi r}{4} = \frac{\pi}{4}\frac{mv}{qB} \quad \Leftrightarrow \quad B = \frac{\pi m v}{4 \ell q}$$

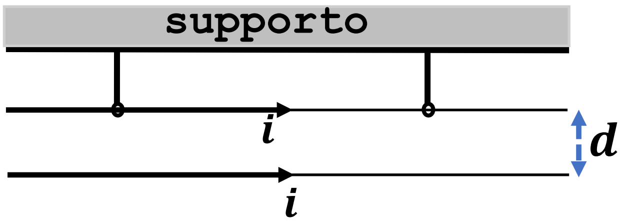
Se la particella è un protone (come in figura): $$B = \frac{3.14 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27} \cdot 1}{4 \cdot 10^{-2} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}} T \cong 8.2 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{T}$$

Se la particella è un elettrone (la figura continua a valere se il campo magnetico è entrante invece che uscente):

$$B = \frac{3.14 \cdot 9.11 \cdot 10^{-31} \cdot 1}{4 \cdot 10^{-2} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}} T \cong 4.47 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{T}$$

Prova scritta Fisica-II per Chimica Triennale - 20/2/2020 - ore 15.30-18.30 (Aula 5 - Chimica)

Esercizio n.3 (5 punti)

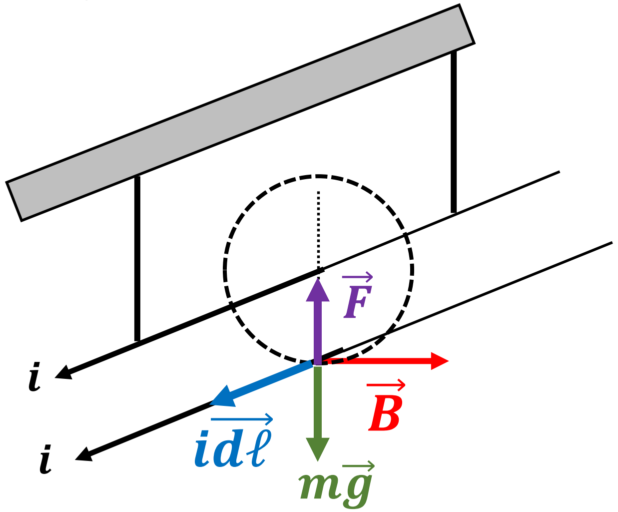


Un filo conduttore vincolato in posizione orizzontale è percorso da una corrente $i = 10A$. Un secondo filo conduttore, parallelo al primo, percorso dalla stessa corrente e nello stesso verso, è posto inferiormente al primo libero di muoversi. Determinare il valore della distanza d affinchè il filo inferiore sia in posizione di equilibrio se la sua densità di massa per unità di lunghezza è $\lambda_M = 1g/m$. (Si considerino i fili di lunghezza infinita)**. Cosa succede se si inverte il senso di percorrenza della corrente nel secondo filo ?**

Soluzione

La forza magnetica agente sul filo è $\vec{F} = i\vec{\ell}\times\vec{B}$ **(attrattiva)**

e per unità di lunghezza è : $\frac{F}{\ell} = iB = i\frac{\mu_0 i}{2\pi d} \equiv \frac{\mu_0 i^2}{2\pi d}$



La forza magnetica puo' e deve bilanciare la forza peso (essendo attrattiva! Se le correnti fossero discordi questo non sarebbe possibile!):

$$\frac{mg}{\ell} = \frac{F}{\ell} \iff \lambda_M g = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi d}$$

da cui si ricava la distanza in cui il filo inferiore rimane sospeso in equilibrio:

$$d = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi\lambda_M g} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^2}{2\pi \cdot 10^{-3} \cdot 9.81} = 2.04 \cdot 10^{-3} m \cong 2mm$$

Prova scritta Fisica-II per Chimica Triennale - 20/2/2020 - ore 15.30-18.30 (Aula 5 - Chimica)

Esercizio n.4 (5 punti)

Un filo conduttore di diametro $d = 2.5mm$ e resistenza per unità di lunghezza $R^* = 3.5m\Omega/m$ è percorso da una corrente $i = 10A$.
Calcolare la densità di energia magnetica sulla superficie del filo.

Soluzione

Il campo magnetico di un filo percorso da corrente è : $B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$ con r distanza dall'asse del filo

Sulla superficie del filo $r = \frac{d}{2}$ per cui il campo è : $B = \frac{\mu_0 i}{\pi d} = 1.6 \cdot 10^{-3} T$

La densità di energia magnetica sulla superficie del filo si calcola semplicemente mediante : $u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} = 1.02 \mathrm{J}/m^3$

Nota: la resistenza non è un dato utile per risolvere il problema.