Prova scritta Fisica-II per Chimica Triennale - 8 maggio 2020 - ore 11.00

Esercizio n.1 (15 punti)

Tre lamine (strati di carica), quadrate e uguali fra loro, di lato $\ell = 30cm$, L_1, L_2, L_3 , sono disposte parallelamente e i loro potenziali elettrostatici sono $V_1 = 100V$, $V_2 = 200V$ e $V_3 = 400V$.
La distanza L_1L_2 è di $d_{12} = 2mm$, mentre quella L_2L_3 è di $d_{23} = 3mm$.
Calcolare, trascurando gli effetti di bordo, la forza che si deve esercitare sulla lamina L_2 affinché quest'ultima non si muova.

Esercizio n.2 (15 punti)

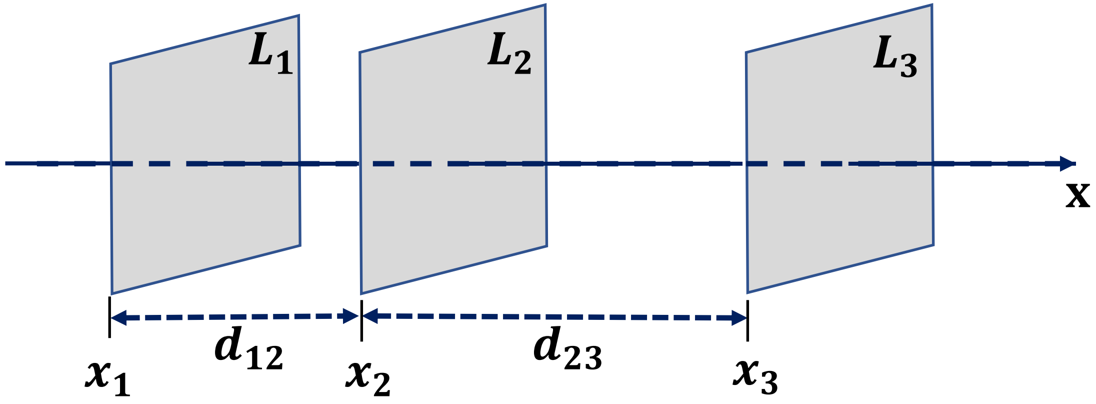
Una sbarra conduttrice, di resistenza per unità di lunghezza ρ, si appoggia senza attrito su due binari di resistenza nulla, orizzontali e divergenti con angolo fra loro $\alpha = \pi/4$. Il sistema è immerso in un campo magnetico uniforme $B = 1.2T$, perpendicolare al piano (del foglio) in cui si trovano binari e sbarra, ed uscente dal foglio.
La barra può muoversi, allontanandosi dal punto d'intersezione, in modo da essere sempre ortogonale ad uno dei due binari e (si fa in modo da farla muovere) con velocità costante $v = 10m/s$. Calcolare:

1) la resistenza per unità di lunghezza ρ se la corrente indotta nel circuito vale $i = 0.24A$;
2) la forza magnetica che agisce sulla sbarra in funzione del tempo;
3) la carica che ha percorso il circuito al tempo $t = 10s$ se inizialmente la sbarra si trova nel punto d'intersezione dei binari [suggerimento: non la si può ricavare direttamente dalla legge di Felici].

Soluzione n.1

$L_1, L_2, L_3 \gg d_{12}, d_{23}$ → **Il campo elettrostatico totale è perpendicolare alle 3 lamine !**

Esso vale nelle 4 possibili regioni:



A sinistra di L_1: $$\vec{E}_1^{Tot} = -\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{2\varepsilon_0}\hat{x}$$

Tra L_1 ed L_2 : $$\vec{E}_2^{Tot} = \frac{\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3}{2\varepsilon_0}\hat{x}$$

Tra L_2 ed L_3 : $$\vec{E}_3^{Tot} = \frac{\sigma_1+\sigma_2-\sigma_3}{2\varepsilon_0}\hat{x}$$

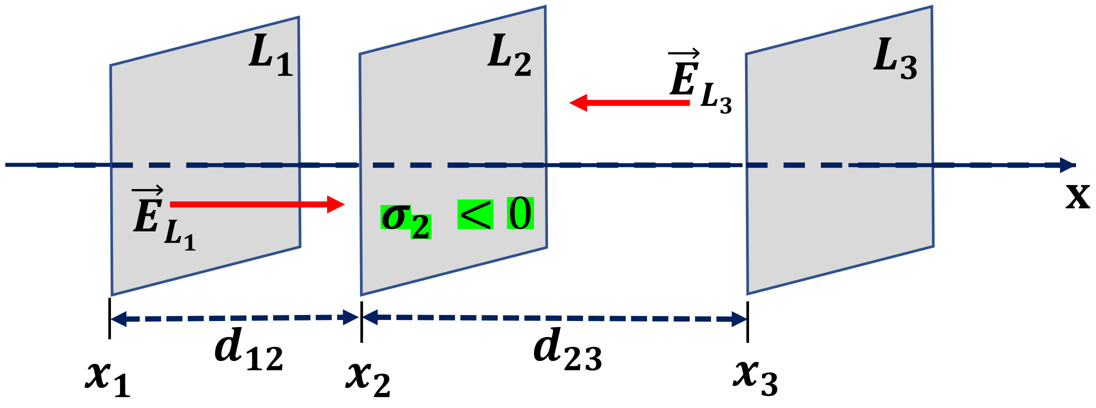
A destra di L_3: $$\vec{E}_4^{Tot} = +\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{2\varepsilon_0}\hat{x}$$

Il campo elettrostatico totale è quindi costante nelle 4 regioni ed, in particolare, fra le due coppie di lamine (le 2 regioni che ci interessano ai fini del quesito del problema). Pertanto:

$$\left.\begin{aligned} V_2 - V_1 &= -\int_{x_1}^{x_2} \vec{E}_2^{Tot}\cdot d\hat{x} = -E_2^{Tot}\int_{x_1}^{x_2} dx = -E_2^{Tot}\, d_{12} \\ V_3 - V_2 &= -\int_{x_2}^{x_3} \vec{E}_3^{Tot}\cdot d\hat{x} = -E_3^{Tot}\int_{x_2}^{x_3} dx = -E_3^{Tot}\, d_{23} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} \sigma_3 - \sigma_1 + \sigma_2 &= 2\varepsilon_0 \frac{V_2 - V_1}{d_{12}} \\ \sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2 &= 2\varepsilon_0 \frac{V_3 - V_2}{d_{23}} \end{aligned}\right.$$

Osservando le due equazioni di questo sistema (di 2 equazioni in 3 incognite; queste ultime sono le 3 densità superficiali di carica dei 3 strati) **si nota che 1)** per sottrazione membro a membro posso ricavare σ_2 **e 2)** per addizione ricavo $\sigma_3 - \sigma_1$

$L_1, L_2, L_3 \gg d_{12}, d_{23}$



1) per sottrazione membro a membro :

$$\cancel{(\sigma_3-\sigma_1)} + \sigma_2 - \cancel{(\sigma_3-\sigma_1)} + \sigma_2 = 2\varepsilon_0\left(\frac{V_2-V_1}{d_{12}} - \frac{V_3-V_2}{d_{23}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cancel{2}\sigma_2 = \cancel{2}\varepsilon_0\left(\frac{V_2-V_1}{d_{12}} - \frac{V_3-V_2}{d_{23}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sigma_2 = \varepsilon_0\left(\frac{V_2-V_1}{d_{12}} - \frac{V_3-V_2}{d_{23}}\right) = -\frac{10^5}{6}\varepsilon_0 \quad < 0$$

2) per addizione membro a membro : $(\sigma_3-\sigma_1) + \cancel{\sigma_2} + (\sigma_3-\sigma_1) - \cancel{\sigma_2} = 2\varepsilon_0\left(\frac{V_2-V_1}{d_{12}} + \frac{V_3-V_2}{d_{23}}\right)$

$$\Leftrightarrow \cancel{2}(\sigma_3-\sigma_1) = \cancel{2}\varepsilon_0\left(\frac{V_2-V_1}{d_{12}} + \frac{V_3-V_2}{d_{23}}\right) \quad \Leftrightarrow (\sigma_3-\sigma_1) = \varepsilon_0\left(\frac{V_2-V_1}{d_{12}} + \frac{V_3-V_2}{d_{23}}\right) = \frac{7\cdot 10^5}{6}\varepsilon_0$$

< 0

La forza totale sullo strato L_2 si calcola tramite la relazione : $\vec{F} = (q_2)\vec{E}^{Tot} = (\sigma_2 \ell^2)\,\vec{E}^{Tot}$ ... dove $\vec{E}^{Tot} = \vec{E}_{L_1} + \vec{E}_{L_3} = +\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\hat{x} - \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}\hat{x} = \frac{(\sigma_1-\sigma_3)}{2\varepsilon_0}\hat{x}$

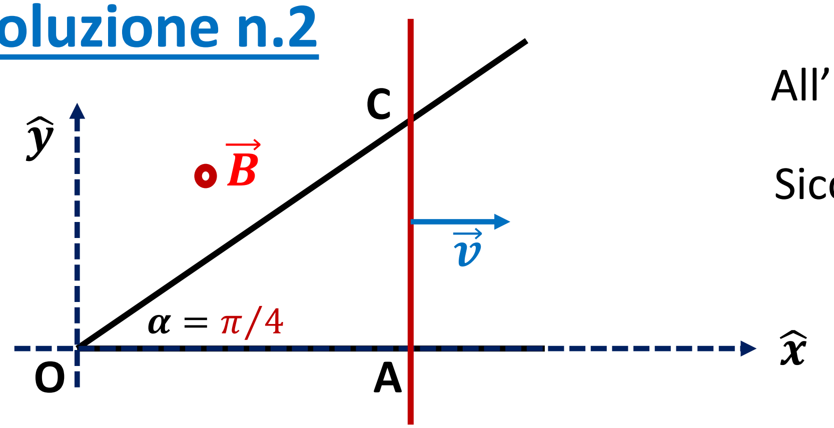
Si noti che ... $\vec{E}^{Tot} \neq \vec{E}_2^{Tot} + \vec{E}_3^{Tot} = \frac{\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3}{2\varepsilon_0}\hat{x} + \frac{\sigma_1+\sigma_2-\sigma_3}{2\varepsilon_0}\hat{x} = \frac{2(\sigma_1-\sigma_3)}{2\varepsilon_0}\hat{x} = \frac{(\sigma_1-\sigma_3)}{\varepsilon_0}\hat{x}$

$$\Leftrightarrow \vec{F} = (\sigma_2\ell^2)\cdot\frac{(\sigma_1-\sigma_3)}{2\varepsilon_0}\hat{x} = 9\cdot 10^{-2}\left(-\frac{10^5}{6}\varepsilon_0\right)\cdot\frac{1}{2}\left(-\frac{7\cdot 10^5}{6}\right)(+\hat{x}) = F(+\hat{x})$$

con ... $F = 7.74\cdot 10^{-4} N$

La forza da esercitare è uguale ed opposta a questa appena calcolata ed esercitata sullo strato L_2 dalle altre due lamine!

Soluzione n.2



All'istante generico t la sbarra si trova nella posizione $x(t) = \overline{OA}$

Siccome si fa in modo che la **velocità sia costante ... il moto è uniforme :** $x(t) = vt$

Il punto di contatto superiore ***C*** ha coordinate: $x(t), y(t) = x(t)tg(\alpha) = x(t)$

1

Indicato con il simbolo Δ il triangolo ***OAC*** : $\Phi_B(t) = BS(\Delta) = B\frac{1}{2}x(t)y(t) = \frac{B}{2}x^2(t) = \frac{B}{2}v^2t^2$

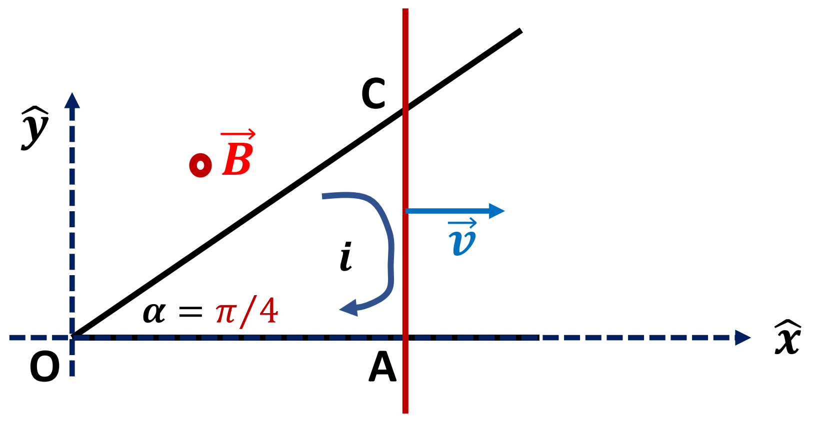
La f.e.m. **indotta** è : $\varepsilon(t) = -\frac{d\Phi_B(t)}{dt} = -\frac{B}{2}v^2\frac{d}{dt}(t^2) = -Bv^2t$ e varia linearmente nel tempo

La corrente **indotta** ad un generico istante è : $i(t) = \frac{\varepsilon(t)}{R(t)}$?

La resistenza del circuito «triangolare» ***OAC*** è del solo lato ***AC*** (i binari hanno resistenza nulla) e varia linearmente nel tempo siccome è $\overline{AC} = y(t) = x(t) = vt$ a variare (linearmente) nel tempo: $R(t) = \rho \cdot \overline{AC} = \rho vt$

Pertanto : $i(\cancel{t}) = \frac{Bv^2\cancel{t}}{\rho v\cancel{t}} = \frac{Bv}{\rho}$ e risulta che la corrente NON dipende dal tempo (come del resto la traccia sembra suggerire !)

Dalla formula precedente ricaviamo la resistenza per unità di lunghezza: $\rho = \frac{Bv}{i} = \frac{1.2T \cdot 10m/s}{0.24A} = 50\Omega/m$



La forza magnetica agente sulla sbarra è : $d\vec{F} = i d\vec{\ell} \times \vec{B}$;
gli elettroni si accumulano in C e fluiscono verso A attraverso O, quindi la corrente è oraria (in effetti «eredita» il segno «-» dalla f.e.m.).
Ci si aspetta pertanto che $\vec{F} \parallel -\hat{x}$.
Calcoliamola: $$d\vec{F} = i d\vec{\ell} \times \vec{B} = -i d\vec{y} \times \vec{B} = (-\hat{x}) \frac{B^2 v}{\rho}$$

$$\vec{F} = -\frac{B^2 v}{\rho} \int_A^C d\vec{y} \times \hat{z} = (-\hat{x}) \frac{B^2 v}{\rho} \int_A^C dy = (-\hat{x}) \frac{B^2 v}{\rho} \overline{AC} = (-\hat{x}) \frac{(Bv)^2 t}{\rho}$$

Pertanto il modulo della forza magnetica frenante è (in funzione del tempo): $F = \frac{(Bv)^2 t}{\rho} = \left(\frac{Bv}{\rho}\right)^2 \rho t = i^2 \rho t$

Dal momento che la resistenza varia nel tempo non si può applicare la Legge di Felici per calcolare la carica!
A corrente costante: $\mathbf{Q} = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{t} = 0.24A \cdot 10s = 2.4C$.

Sempre per t=10s si ha (volendo, non era richiesto): $F = i^2 \rho t = 0.24A \cdot 0.24A \cdot 10s \cdot 50\Omega/m = 28.8N$